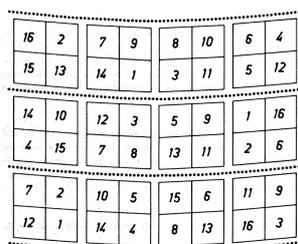


Pierre Dagnelie

# PRINCIPES D'EXPÉRIMENTATION

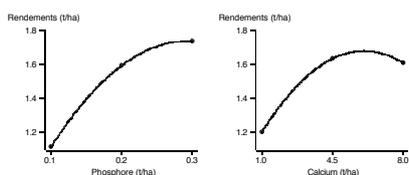
Planification des expériences  
et analyse de leurs résultats



Planification



Réalisation



Interprétation

| Sources de variation | Degrés de liberté | S. des carrés des écarts | Carrés moyens | F       | p      |
|----------------------|-------------------|--------------------------|---------------|---------|--------|
| Phosphore            | 2                 | 6,2949                   | 3,1474        | 39,9*** | 0,0000 |
| Régression linéaire  | 1                 | 5,7348                   | 5,7348        | 72,8*** | 0,0000 |
| Régression quadrat.  | 1                 | 0,5601                   | 0,5601        | 7,11*   | 0,018  |
| Calcium              | 2                 | 3,5022                   | 1,7511        | 22,2*** | 0,0000 |
| Régression linéaire  | 1                 | 2,4494                   | 2,4494        | 31,1*** | 0,0001 |
| Régression quadrat.  | 1                 | 1,0528                   | 1,0528        | 13,4*** | 0,0023 |
| Interaction          | 4                 | 0,1525                   | 0,0381        | 0,48    | 0,75   |
| Blocs                | 2                 | 1,9191                   | 0,9596        |         |        |
| Variation résiduelle | 15                | 1,1820                   | 0,0788        |         |        |
| Totaux               | 25                | 13,0507                  |               |         |        |

Analyse

*Du même auteur*

- DAGNELIE P. [1969-1970]. *Théorie et méthodes statistiques : applications agronomiques* (2 vol.). Gembloux, Presses agronomiques de Gembloux, 378 + 451 p.\*
- DAGNELIE P. [1975]. *Analyse statistique à plusieurs variables*. Gembloux, Presses agronomiques de Gembloux, 362 p.\*
- DAGNELIE P. [1981]. *Théorie et méthodes statistiques : exercices* (en collaboration avec J.J. CLAUSTRIAUX ET C. DEBOUCHE). Gembloux, Presses agronomiques de Gembloux, 186 p.\*
- DAGNELIE P. [1985]. *Estatística : teoria e métodos* (2 vol. ; traduction en portugais par A. ST. AUBYN). Mem Martins, Europa-América, 440 + 536 p.
- DAGNELIE P. [2007-2011]. *Statistique théorique et appliquée* (2 vol.). Bruxelles, De Boeck, 511 + 736 p.\*
- DAGNELIE P. [2009]. *Principes d'expérimentation : photographies*. Document PDF, <www.dagnelie.be>, 20 p.
- DAGNELIE P., RONDEUX J., THILL A. [1976]. *Tables dendrométriques*. Gembloux, Presses agronomiques de Gembloux, 128 p.
- DAGNELIE P., PALM R., RONDEUX J., THILL A. [1985]. *Tables de cubage des arbres et des peuplements forestiers*. Gembloux, Presses agronomiques de Gembloux, 148 p.\*
- DAGNELIE P., PALM R., RONDEUX J., THILL A. [1988]. *Tables de production relatives à l'épicéa commun (Picea abies KARST.)*. Gembloux, Presses agronomiques de Gembloux, 123 p.

\* Titres qui ont fait l'objet de diverses rééditions et réimpressions.

Pierre Dagnelie

# **PRINCIPES D'EXPÉRIMENTATION**

Planification des expériences  
et analyse de leurs résultats

© 2012, LES PRESSES AGRONOMIQUES DE GEMBLoux, A.S.B.L.  
Passage des Déportés 2 – B-5030 Gembloux (Belgique)  
<[www.pressesagro.be](http://www.pressesagro.be)>  
D/2012/1665/117  
ISBN 978-2-87016-117-3

# Avant-propos

*Principes d'expérimentation : planification des expériences et analyse de leurs résultats* présente les notions de base de l'expérimentation, considérée comme l'utilisation raisonnée des plans d'expériences. Cet ouvrage s'étend de la conception de tels plans à l'analyse et l'interprétation des résultats obtenus.

Ces notions sont présentées d'une manière très générale et sont illustrées par de nombreux exemples, essentiellement à caractère agronomique (au sens large). L'ensemble comprend aussi des tables numériques, un index bibliographique de plus de 400 références, un index des traductions et sigles anglais, et un index des matières.

Ce livre s'adresse aux enseignants, aux étudiants et aux chercheurs de toutes les disciplines qui font appel à la méthode expérimentale, dans le cadre des universités, des grandes écoles et des centres de recherche publics et privés.

\*  
\* \*

*Principes d'expérimentation : planification des expériences et analyse de leurs résultats*, publié initialement en 2003, est une version remaniée et considérablement élargie d'un premier livre datant de 1981 [DAGNELIE, 1981].

La présente édition diffère de l'édition de 2003 par une actualisation du texte et de la documentation, et par l'introduction de nouveaux développements.

Outre la bibliographie, les principales modifications concernent l'introduction générale et les paragraphes 1.2.3, 2.4.4, 2.4.5, 7.1.2, 7.2, 7.3, 9.1.5, 9.5, 12.4.1, 12.4.3 et 12.4.4. De plus, des codes relatifs aux logiciels Minitab, R et SAS sont donnés pour une série d'exemples (§ 7.4.2, 7.5.2, 8.5.2, 8.6.2, 9.4.2, 9.5.2 et 10.4.2).

\*  
\* \*

*Principes d'expérimentation : planification des expériences et analyse de leurs résultats* est complété par une série de photographies en couleurs, accompagnées

de légendes détaillées. Ces photographies sont disponibles sous la forme d'un document électronique, dont la référence est :

DAGNELIE P. [2009]. *Principes d'expérimentation : photographies*.  
Document PDF, <www.dagnelie.be>, 20 p.

Les données numériques des exemples, ainsi qu'un certain nombre de solutions détaillées obtenues à l'aide du logiciel R, sont aussi disponibles sur le même site.

\*  
\* \*

*Principes d'expérimentation : planification des expériences et analyse de leurs résultats* existe sous deux formes différentes : une version imprimée classique et une version électronique.

La *version imprimée* est publiée par les Presses agronomiques de Gembloux (<www.pressesagro.be>) et est soumise aux conditions habituelles du copyright, qui sont définies page 4.

La *version électronique* est disponible à l'adresse <www.dagnelie.be> et est soumise aux conditions suivantes :

1. la consultation de ce document via internet, son impression et son utilisation à des fins personnelles sont entièrement libres ;
2. aucune utilisation commerciale de ce document, en tout ou en partie, n'est permise sans l'autorisation de l'auteur (<pierre@dagnelie.be>);
3. toute référence à ce document, notamment dans d'autres publications, doit être présentée sous la forme :

DAGNELIE P. [2012]. *Principes d'expérimentation : planification des expériences et analyse de leurs résultats*. Édition électronique, <www.dagnelie.be>, 413 p.

4. toute reproduction de brefs extraits et toute citation de ce document, notamment en matière d'enseignement, doit être accompagnée de la même mention.

\*  
\* \*

Nous renouvelons bien volontiers nos sincères remerciements à toutes les personnes (enseignants, chercheurs, techniciens et étudiants) qui nous ont aidé dans la préparation de ce document, notamment par la mise à notre disposition de résultats de recherche et par de nombreuses questions, remarques et suggestions.

Février 2012.

# Table des matières

|   |    |
|---|----|
| <b>Introduction</b> .....   | 13 |
| Observation et expérimentation. Historique. Protocole expérimental. Plan général. Objectif. Deux tendances générales. Logiciels. Bibliographie. Documentation par internet. |    |
| <b>1 Le but et les conditions de l'expérience</b> .....   | 23 |
| 1.1 Définition du but de l'expérience .....   | 24 |
| Expérience à objectif unique. Expérience à objectifs multiples.   |    |
| 1.2 Définition des conditions de l'expérience .....   | 26 |
| Expériences plus ou moins importantes. Stratégie ou programme expérimental. Conditions réglementaires.  |    |
| <b>2 Les facteurs et les traitements ou objets</b> .....  | 31 |
| 2.1 Concepts de base .....  | 32 |
| La notion de facteur. La notion de traitement ou objet.   |    |
| 2.2 Les expériences à un facteur .....  | 35 |
| Le choix des modalités. Les témoins ou objets de référence.   |    |
| 2.3 Les expériences factorielles et factorielles fractionnaires .....   | 38 |
| Principes généraux. Les expériences factorielles complètes. Les expériences factorielles fractionnaires.  |    |
| 2.4 Les autres expériences à deux ou plusieurs facteurs .....   | 54 |
| L'étude des surfaces de réponse. L'étude des mélanges. Les plans optimaux. Les expériences organisées en deux ou plusieurs phases. Les expériences numériques.              |    |
| <b>3 Les unités expérimentales</b> .....  | 79 |
| 3.1 La notion d'unité expérimentale .....   | 80 |
| 3.2 Les dimensions des unités expérimentales .....  | 81 |
| Principes généraux. Les bordures et les périodes tampons.   |    |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.3      | La forme des unités expérimentales .....   | 86         |
| 3.4      | Le nombre de répétitions .....   | 88         |
| 3.5      | La variabilité du matériel expérimental .....  | 93         |
|          | Principes généraux. L'étude de la variabilité par le modèle de SMITH. L'étude de la variabilité par l'analyse spatiale.  |            |
| 3.6      | Exemple : expérience d'uniformité .....  | 97         |
|          | Présentation et données. Interprétation des résultats : modèle de SMITH. Interprétation des résultats : analyse spatiale.  |            |
| <b>4</b> | <b>Les observations .....</b>  | <b>107</b> |
| 4.1      | Différents types d'observations .....  | 108        |
| 4.2      | La nature et l'enregistrement des observations .....   | 110        |
| <b>5</b> | <b>Les expériences complètement aléatoires .....</b>   | <b>115</b> |
| 5.1      | Principes .....  | 116        |
| 5.2      | Analyse des résultats .....  | 118        |
| 5.3      | Discussion .....   | 120        |
| 5.4      | Exemple 1 : expérience complètement aléatoire à deux facteurs ...  | 123        |
|          | Présentation et données. Analyse des résultats. Importance de la randomisation.  |            |
| 5.5      | Exemple 2 : expérience complètement aléatoire à quatre facteurs ..   | 131        |
|          | Présentation et données. Interprétation des résultats : analyse de la variance. Interprétation des résultats : demi-diagramme de probabilité. Interprétation des résultats : régression multiple. Étude de deux expériences factorielles fractionnaires. |            |
| <b>6</b> | <b>Les expériences en blocs aléatoires complets .....</b>  | <b>147</b> |
| 6.1      | Principes .....  | 148        |
|          | Les expériences en champ. Quelques autres situations.  |            |
| 6.2      | Analyse des résultats .....  | 151        |
| 6.3      | Discussion .....   | 152        |
| 6.4      | Exemple 1 : expérience en blocs aléatoires complets (planification)  | 156        |
|          | Présentation. Parcelles sans bordures. Parcelles avec bordures.  |            |
| 6.5      | Exemple 2 : expérience en blocs aléatoires complets (analyse de résultats) .....   | 164        |
|          | Présentation et données. Analyse des résultats : analyse de la variance. Analyse des résultats : régression.   |            |

|  |     |
|--|-----|
| <b>7 Les expériences en parcelles divisées (<i>split-plot</i>) et en bandes croisées (<i>split-block</i>)</b> .....  | 175 |
| 7.1 Principes .....  | 176 |
| Les expériences en blocs aléatoires complets et parcelles divisées.<br>Autres dispositifs expérimentaux en parcelles divisées. Les expériences en bandes croisées.   |     |
| 7.2 Analyse des résultats .....  | 180 |
| Les expériences en blocs aléatoires complets et parcelles divisées.<br>Autres dispositifs expérimentaux en parcelles divisées. Les expériences en bandes croisées.   |     |
| 7.3 Discussion .....   | 184 |
| 7.4 Exemple 1 : expérience en blocs aléatoires complets et parcelles divisées .....  | 187 |
| Présentation et données. Analyse des résultats.  |     |
| 7.5 Exemple 2 : expérience en blocs aléatoires complets et bandes croisées .....   | 194 |
| Présentation et données. Analyse des résultats.  |     |
| <b>8 Les expériences en carré latin et avec permutation des objets (<i>cross-over</i>)</b> .....   | 201 |
| 8.1 Principes .....  | 202 |
| Le carré latin. Le dispositif avec permutation des objets ( <i>cross-over</i> ).   |     |
| 8.2 Analyse des résultats .....  | 205 |
| Le carré latin. Le dispositif avec permutation des objets ( <i>cross-over</i> ). Notions complémentaires.  |     |
| 8.3 Discussion .....   | 209 |
| 8.4 Quelques cas particuliers et extensions du carré latin .....   | 210 |
| 8.5 Exemple 1 : expérience en carré latin .....  | 214 |
| Présentation et données. Analyse des résultats.  |     |
| 8.6 Exemple 2 : expérience avec permutation des objets ( <i>cross-over</i> ) ..  | 221 |
| Présentation et données. Analyse des résultats.  |     |
| <b>9 Les expériences en blocs aléatoires incomplets : expériences non factorielles</b> .....   | 227 |
| 9.1 Principes .....  | 228 |
| Généralités. Les blocs incomplets équilibrés. Les réseaux carrés équilibrés et les réseaux équilibrés. Les carrés latins incomplets. Les dispositifs partiellement équilibrés. Le cas des surfaces de réponse et des plans optimaux. |     |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 9.2       | Analyse des résultats .....   | 242        |
|           | Les blocs incomplets équilibrés. Les réseaux carrés équilibrés et les carrés latins incomplets.   |            |
| 9.3       | Discussion .....  | 247        |
| 9.4       | Exemple 1 : expérience en blocs incomplets équilibrés .....   | 249        |
|           | Présentation et données. Analyse des résultats.   |            |
| 9.5       | Exemple 2 : expérience en réseau carré équilibré .....  | 253        |
|           | Présentation et données. Analyse des résultats.   |            |
| <b>10</b> | <b>Les expériences en blocs aléatoires incomplets : expériences factorielles</b> .....  | <b>259</b> |
| 10.1      | Principes .....   | 260        |
|           | Généralités. La confusion complète. La confusion partielle. Les expériences factorielles fractionnaires et à répétition unique. Quelques principes de construction. |            |
| 10.2      | Analyse des résultats .....   | 268        |
| 10.3      | Discussion .....  | 270        |
| 10.4      | Exemple : expérience avec confusion complète .....  | 271        |
|           | Présentation et données. Analyse des résultats.   |            |
| <b>11</b> | <b>Les facteurs lieux et temps</b> .....  | <b>277</b> |
| 11.1      | Les expériences répétées dans l'espace et/ou dans le temps .....  | 278        |
|           | Principes. Analyse des résultats. Discussion.   |            |
| 11.2      | Les mesures répétées à différents moments sur les mêmes unités expérimentales .....   | 287        |
|           | Principes. Analyse des résultats. L'étude des successions de cultures ou rotations.   |            |
| 11.3      | Exemple 1 : expériences répétées en plusieurs endroits .....  | 294        |
|           | Présentation et données. Analyse des résultats.   |            |
| 11.4      | Exemple 2 : expériences répétées en plusieurs endroits et au cours de plusieurs années .....  | 303        |
|           | Présentation et données. Analyse des résultats.   |            |
| 11.5      | Exemple 3 : mesures répétées à différents moments .....   | 311        |
|           | Présentation et données. Analyse des résultats.   |            |
| 11.6      | Exemple 4 : comparaison de successions de cultures .....  | 319        |
|           | Présentation. Analyse des résultats.  |            |

|  |     |
|--|-----|
| <b>12 Notions complémentaires</b> .....  | 323 |
| 12.1 Introduction .....  | 324 |
| 12.2 Les cultures mélangées .....  | 324 |
| 12.3 Quelques questions relatives au voisinage des parcelles .....   | 326 |
| Les dispositifs expérimentaux équilibrés pour les parcelles voisines.<br>Les dispositifs expérimentaux avec témoins systématiques. L'analyse des résultats avec ajustement en fonction des parcelles voisines.               |     |
| 12.4 L'analyse de la variance et ses généralisations .....   | 332 |
| L'analyse de la variance orthogonale et non orthogonale. L'analyse de la covariance. Le modèle linéaire général. Le modèle linéaire mixte et le modèle linéaire généralisé. L'analyse de la variance à plusieurs dimensions. |     |
| 12.5 Les données manquantes .....  | 351 |
| 12.6 L'étude des résidus de l'analyse de la variance .....   | 352 |
| 12.7 L'analyse de deux ou plusieurs variables .....  | 354 |
| 12.8 Les méthodes bayésiennes .....  | 358 |
| 12.9 La simulation de résultats d'expériences .....  | 358 |
| <b>Synthèse</b> .....  | 363 |
| Généralités. La planification des expériences. La réalisation des expériences.<br>L'analyse et l'interprétation des résultats. Et puis encore ...  |     |
| <b>Tables</b> .....  | 373 |
| Permutations aléatoires de 10, 20 et 50 nombres. Carrés latins de base.  |     |
| <b>Index bibliographique</b> .....   | 377 |
| <b>Index des traductions et sigles anglais</b> .....   | 399 |
| <b>Index des matières</b> .....  | 405 |



# Introduction

## Observation et expérimentation

Depuis bien longtemps, l'observation et l'expérimentation sont deux outils essentiels de l'avancement des sciences.

L'*observation*<sup>1</sup> permet d'acquérir une première connaissance des phénomènes de la nature, au sens le plus large, et d'en déduire éventuellement des hypothèses, qui doivent ensuite être vérifiées et précisées, ou amendées.

Dans certaines disciplines, telles l'économie, la météorologie et les sciences de la Terre, il n'est pas ou il n'est guère possible de provoquer la réalisation des phénomènes auxquels on s'intéresse. La vérification des hypothèses émises ne peut alors se faire que par une *observation structurée*<sup>2</sup>, dans le temps ou dans l'espace, ou par *enquête*<sup>3</sup>.

Dans d'autres disciplines où, au contraire, les phénomènes étudiés peuvent être provoqués assez facilement, telles la biologie, la chimie et la physique, le contrôle des hypothèses se fait habituellement par l'expérience ou l'expérimentation. En effet, l'*expérience*<sup>4</sup> (ou l'*essai*) a précisément pour but d'éprouver tout élément qui peut conduire à un enrichissement des connaissances, et l'*expérimentation*<sup>5</sup> peut être considérée comme étant l'emploi systématique et raisonné de l'expérience scientifique.

Le cycle permanent « hypothèse à tester – expérience – hypothèse nouvelle », passant par la planification des expériences, leur réalisation, l'analyse des données collectées et l'interprétation des résultats, constitue la pierre angulaire de la *méthode expérimentale*<sup>6</sup>. Ce cycle, qui illustre également la page 1 de couverture,

---

<sup>1</sup> En anglais : *observation*.

<sup>2</sup> En anglais : *observational study*.

<sup>3</sup> En anglais : *survey*.

<sup>4</sup> En anglais : *experiment, trial*.

<sup>5</sup> En anglais : *experimentation*.

<sup>6</sup> En anglais : *experimental method*.

peut être schématisé de la manière suivante :



Mais il ne faut nullement en conclure que l'expérience scientifique ne peut conduire qu'à l'acceptation ou au rejet, à la confirmation ou à l'infirmité d'une hypothèse. Très souvent, l'expérience fournit en effet aussi, et peut-être surtout, des informations chiffrées qui ne sont aucunement du type « tout ou rien », telles que des estimations de productions ou d'accroissements de productions, en quantité ou en qualité, des estimations de conditions optimales de fabrication, etc.

## Historique

Nous ne souhaitons pas présenter ici un long historique de la méthode expérimentale et de ses applications, au sujet desquelles on trouvera des informations détaillées dans certains livres et articles spécialisés, tels ceux de BLOOM [1986], COCHRAN [1976], DROESBEKE *et al.* [1997], EDMONDSON [2005] et LECLERCQ [1960]. Il nous paraît cependant utile de citer quelques points de repère, et notamment :

– au dix-septième siècle :

les principes de base énoncés par Francis BACON (1561-1626) et René DESCARTES (1596-1650) ;

– au dix-huitième siècle :

les travaux d'Antoine-Laurent DE LAVOISIER (1743-1794), Arthur YOUNG (1741-1820) et Johann Georg VON ZIMMERMANN (1728-1795), dont nous extrayons le texte suivant : « *une expérience diffère d'une simple observation, en ce que la connaissance qu'une observation nous procure, semble se présenter d'elle-même ; au lieu que celle qu'une expérience nous fournit, est le fruit de quelque tentative que l'on fait dans le dessein de voir si une chose est, ou n'est point* » [ZIMMERMANN, 1774] ;

– au dix-neuvième siècle :

les recherches et les travaux de Claude BERNARD (1813-1878), Justus VON LIEBIG (1803-1873) et Johann (Gregor) MENDEL (1822-1884), ainsi que les premières expériences agronomiques de longue durée, dont certaines subsistent toujours à l'heure actuelle [Anonyme, 2006] ;

– au vingtième siècle :

l'introduction de l'outil statistique dans la planification des expériences et dans l'analyse de leurs résultats, essentiellement à la suite des travaux réalisés en Grande-Bretagne par Ronald Aylmer FISHER (1890-1962) et ses disciples, dans le

cadre de la Station expérimentale de Rothamsted (*Rothamsted Experimental Station*, actuellement *Rothamsted Research*, Harpenden) [FISHER, 1925, 1931, 1935; YATES, 1937].

On peut ainsi considérer que l'engagement de R.A. FISHER à Rothamsted, qui est intervenu en 1919, constitue le point de départ de l'expérimentation moderne [BOX, 1978, 1980; PREECE, 1990; YATES, 1964].

Très rapidement, les principes développés par FISHER dans le domaine de l'agronomie ont été étendus à de nombreuses autres disciplines.

Il faut citer tout d'abord le secteur médical et le secteur industriel, à l'initiative notamment d'Austin Bradford HILL (1897-1991) pour le premier et George Edward P. BOX (1919-) pour le deuxième [ARMITAGE, 1995; DAY, 2006; EDERER, 1998; SNEE, 1983]. Les sciences psychologiques, de l'éducation et du comportement, de même que les sciences commerciales (le marketing en particulier), constituent d'autres exemples de domaines d'application de l'expérimentation.

## Protocole expérimental

Dans la mesure où l'expérience a pour but de provoquer un phénomène et, ensuite, d'en observer la réalisation dans des conditions bien définies, il est normal qu'elle soit, avant toute chose, l'objet d'une *planification*<sup>7</sup> très stricte. Cette planification doit conduire à la mise au point d'un *plan d'expérience* ou d'un *protocole expérimental*<sup>8</sup>.

On peut considérer que les différents éléments de base d'un protocole expérimental sont :

1. la définition du ou des *buts* et des *conditions* de réalisation de l'expérience (expérience en laboratoire ou en champ par exemple) ;
2. la définition du ou des *facteurs* (température, pression, etc.) dont on désire étudier l'influence, de ses ou de leurs modalités et des combinaisons de ces modalités, auxquelles nous associerons les notions de *traitement* ou d'*objet*<sup>9</sup> et de *plan* ou de *structure des traitements* ou *objets*<sup>10</sup> ;
3. la définition des individus ou, d'une manière plus générale, des *unités expérimentales* qu'on se propose d'observer (telles que des patients ou des groupes de patients, des animaux ou des plantes ou des groupes d'animaux ou de plantes, des pièces de bois ou de métal, etc.) ;
4. la définition des *observations* (rendements par exemple) qui devront être réalisées et des modalités de collecte de ces observations ;

---

<sup>7</sup> En anglais : *planning*.

<sup>8</sup> En anglais : *design of experiment*, *DOE*.

<sup>9</sup> En anglais : *treatment*.

<sup>10</sup> En anglais : *treatment design*, *treatment structure*.

5. la manière dont les différentes modalités ou combinaisons de modalités du ou des facteurs devront être affectées aux différentes unités expérimentales et la répartition des unes et des autres dans l'espace ou dans le temps, ce qui constitue le *dispositif expérimental*<sup>11</sup> ;
6. des informations générales relatives à l'*analyse des résultats* (telles qu'un schéma d'analyse de la variance et/ou la formulation d'une ou plusieurs équations de régression, y compris la spécification précise du ou des modèles envisagés).

Un travail fort ancien, mais absolument remarquable, de François CRETTE DE PALLUEL (1741-1798), permet d'illustrer ces différents éléments [CRETTE DE PALLUEL, 1788, 1790].

CRETTE DE PALLUEL souhaitait étudier les possibilités d'alimentation des moutons maintenus en hiver dans des bergeries : tel est le but et telles sont, en quelques mots, les conditions de l'expérience. Le facteur étudié est le facteur alimentation, et les traitements sont quatre alimentations différentes, respectivement à base de pommes de terre, de navets, de betteraves et de céréales. Seize moutons constituent les unités expérimentales. Les observations sont les poids des animaux avant l'expérience et au moment de l'abattage. Le dispositif expérimental est un carré latin (§ 8.1.1), dispositif qui ne deviendra d'un usage courant que bien plus tard. Et l'interprétation des résultats aurait pu être réalisée par l'analyse de la variance (§ 8.2.1), si cette méthode, développée au début du vingtième siècle, avait été connue un siècle et demi plus tôt.

Les différents éléments du plan d'expérience ne sont bien sûr pas totalement indépendants les uns des autres, et ils doivent en fait être toujours envisagés globalement. Ainsi, il est évident que la définition générale du but de l'expérience (point 1) ne peut être réalisée sans faire allusion dans une certaine mesure aux facteurs qui seront pris en considération (point 2) et aux caractéristiques ou aux variables qui devront être observées (point 4).

Il importe également de souligner le fait qu'un protocole expérimental devrait toujours être un document écrit, ou informatique, approuvé par tous les responsables de l'expérience, et non pas seulement quelques idées auxquelles l'expérimentateur a songé un jour ou l'autre. Un exemple détaillé de protocole expérimental est présenté au paragraphe 11.3.1.

## Plan général

Le plan général du présent ouvrage se réfère aux différents éléments qui viennent d'être énumérés.

Les chapitres 1 à 4 sont consacrés respectivement aux buts et aux conditions de réalisation de l'expérience, au choix des traitements ou des objets, au choix des

---

<sup>11</sup> En anglais : *experimental design*.

unités expérimentales, et au choix des observations. Les chapitres 5 à 10 présentent divers dispositifs expérimentaux. Et les chapitres 11 et 12 ont traité à quelques notions complémentaires.

## Objectif

En rédigeant cet ouvrage, notre objectif a été d'aboutir à un texte relativement synthétique. Nous nous sommes efforcé d'atteindre ce résultat en nous arrêtant à l'exposé de principes généraux et en renvoyant le lecteur à d'autres publications chaque fois que cela nous paraissait utile. En particulier, nous nous référons souvent, en ce qui concerne l'analyse des résultats d'expériences, aux deux tomes de *Statistique théorique et appliquée* [DAGNELIE, 2007, 2011]<sup>12</sup>.

Nous consacrons aussi une place importante à la présentation d'exemples, le plus souvent à caractère agronomique ou biologique dans un sens très large (productions végétales et animales, industries agricoles et alimentaires, biotechnologies, etc.). Ces exemples illustrent des situations aussi diversifiées que possible (expériences réalisées selon différents dispositifs, en laboratoire et en milieu extérieur, en régions tempérées, subtropicales et tropicales, etc.).

Toutefois, par rapport au texte initial de 1981, nous avons quelque peu élargi le sujet, en ne prenant pas exclusivement en considération les aspects agronomiques et biologiques de l'expérimentation, mais en faisant allusion aussi, par moments, à d'autres aspects, médicaux et industriels notamment.

D'autre part, on notera qu'une lecture simplifiée du présent document peut être réalisée en négligeant dans un premier temps les paragraphes dont les titres sont précédés du symbole  $\ominus$  et les alinéas qui sont marqués en marge des symboles  $\lceil$  et  $\lfloor$ .

Dans une optique de simplicité également, les exemples ont été choisis de telle sorte qu'ils soient relativement réduits, quant au volume de leurs données numériques, et qu'ils puissent donc être facilement « retravaillés » par le lecteur<sup>13</sup>.

---

<sup>12</sup> Les renvois aux différents paragraphes et aux différents exemples de ces ouvrages figurent dans le texte sous la forme [STAT1, § ...] et [STAT1, ex. ...] pour le tome 1, ainsi que [STAT2, § ...] et [STAT2, ex. ...] pour le tome 2. On peut trouver des informations relatives à ces deux volumes à l'adresse <www.dagnelie.be>.

<sup>13</sup> Il s'agit le plus souvent d'exemples extraits de travaux d'étudiants ou de jeunes chercheurs, qui ne sont pas toujours irréprochables, mais qui sont aussi didactiques, sinon plus didactiques, que des exemples de plus grande ampleur venant de chercheurs plus qualifiés. Rappelons également, à ce sujet, que les données numériques des exemples, ainsi qu'un certain nombre de solutions obtenues à l'aide du logiciel R, sont disponibles à l'adresse <www.dagnelie.be>.

## Deux tendances générales

La place importante prise par les applications industrielles des plans d'expériences au cours des dernières décennies est à l'origine de deux tendances qui peuvent conduire à certaines confusions. Nous pensons devoir attirer l'attention du lecteur sur ces deux points dès le début.

### Le mot *expérience*

La première évolution que nous souhaitons évoquer concerne la signification même du mot *expérience*.

Traditionnellement, dans le domaine agronomique notamment, le mot expérience correspond à l'ensemble des opérations qui permettent d'étudier deux ou plusieurs traitements appliqués à un certain nombre d'unités expérimentales. Ainsi, en ce qui concerne l'exemple de CRETTE DE PALUEL cité ci-dessus, l'étude de quatre alimentations différentes sur 16 moutons constitue *une seule expérience*.

Dans le domaine industriel par contre, le mot expérience désigne le plus souvent chacune des manipulations relative à une seule application d'un traitement donné à une unité expérimentale, c'est-à-dire chacun des éléments qui forment en fait un ensemble plus vaste. Dans cette optique, chaque opération conduisant par exemple à l'obtention d'une seule mesure de rendement d'un fermenteur utilisé à une température et une pression données constitue *une expérience*. Si trois températures différentes sont associées chacune à trois pressions différentes et si chacune des neuf combinaisons température-pression est répétée deux fois, l'ensemble des manipulations est considéré comme constituant *18 expériences*, et non pas une seule expérience.

La différence de conception provient notamment du fait que, dans le premier cas, l'ensemble des opérations (mise en place, supervision et observation des 16 moutons, par exemple) est réalisé en une seule fois, alors que dans le deuxième cas, les diverses opérations (réglages, fermentations et observation des résultats aux différentes températures et pressions, par exemple) sont réalisées le plus souvent de façon consécutive.

Il en résulte notamment qu'on parle généralement d'un « plan d'expérience » (au singulier) dans le domaine agronomique, et d'un « plan d'expériences » (au pluriel) dans le domaine industriel.

En ce qui nous concerne, nous nous en tiendrons toujours à la première acception, c'est-à-dire à la vision globale de l'expérience, en utilisant parfois le mot *essai* pour désigner, le cas échéant, les diverses manipulations consécutives<sup>14</sup>.

On notera que l'acception globale que nous adoptons est aussi celle qui prévaut dans le secteur médical. On parle en effet d'une seule expérience ou plus volontiers

---

<sup>14</sup> En anglais, le mot « *run* » est fréquemment utilisé pour désigner chacun des *essais* consécutifs.

d'un *essai clinique*<sup>15</sup> quand, par exemple, deux médicaments ou deux traitements différents sont comparés sur deux groupes de patients, parfois très nombreux.

### Traitements (ou objets) et dispositif expérimental

La deuxième tendance que nous voulons évoquer concerne les points 2 et 5 du protocole expérimental, tel que nous l'avons défini ci-dessus, ces deux points étant généralement ceux qui retiennent le plus l'attention.

Traditionnellement, le point 5, c'est-à-dire le choix du *dispositif expérimental* occupait une place prépondérante dans les ouvrages relatifs à l'expérimentation (en particulier dans le domaine agronomique). Par contre, le point 2, c'est-à-dire la définition des traitements ou de la *structure des traitements*, est largement prédominant et parfois exclusif dans les ouvrages plus récents (en particulier en matière industrielle). Le danger nous paraît être que l'attention accordée à ce dernier élément (*treatment design*) soit telle que le premier (*experimental design*) soit quasiment ou entièrement passé sous silence [DAGNELIE, 2000, 2008a].

Nous insistons donc pour que ces deux aspects, complémentaires, du protocole expérimental soient toujours pris en considération l'un et l'autre de façon équilibrée.

## Logiciels

Le recours à certains logiciels est essentiel, voire indispensable dans certains cas, tant en ce qui concerne la planification des expériences que l'analyse de leurs résultats. Il s'agit à la fois de logiciels statistiques généraux, tels que, entre autres, Minitab (<[www.minitab.com](http://www.minitab.com)>), R (<[www.r-project.org](http://www.r-project.org)>) et SAS (<[www.sas.com](http://www.sas.com)>), et de logiciels plus spécifiques, tels que Design-Ease et Design-Expert (<[www.statease.com](http://www.statease.com)>), JMP (<[www.jmp.com](http://www.jmp.com)>) et NemrodW (<[www.nemrodw.com](http://www.nemrodw.com)>)<sup>16</sup>.

Parmi les caractéristiques de ces logiciels, on peut citer le fait de pouvoir contribuer au choix des traitements ou objets, notamment dans le cas des expériences factorielles fractionnaires, des surfaces de réponse et des plans optimaux (§ 2.3 et 2.4), d'assurer le plus souvent la randomisation ou répartition au hasard (§ 5.1.2°), de réaliser l'analyse des résultats, de fournir un large éventail de représentations graphiques, et de pouvoir éventuellement contribuer à la préparation de rapports.

D'autres logiciels plus spécifiques encore existent également, en vue de répondre à différents objectifs particuliers, mais nous préférons ne pas donner de précisions

---

<sup>15</sup> En anglais : *clinical trial*.

<sup>16</sup> Les sites français de Minitab et SAS sont respectivement <[www.minitab.com/francais/](http://www.minitab.com/francais/)> et <[www.sas.com/offices/europe/france/](http://www.sas.com/offices/europe/france/)>, et des informations relatives au logiciel R peuvent être obtenues par l'intermédiaire de <[www.dagnelie.be/stcorr.html](http://www.dagnelie.be/stcorr.html)>.

à ce sujet, car les informations relatives à ces logiciels sont généralement très fluctuantes.

En outre, certaines procédures de conception de plans et d'analyse de résultats d'expériences peuvent être utilisées par l'intermédiaire de sites web. Tel est le cas par exemple pour <http://biometrics.hri.ac.uk/DesignOfExperiments/> [EDMONDSON *et al.*, 2002].

Lors de l'utilisation des différents logiciels, surtout à l'aide de menus, on veillera toutefois à n'avoir recours qu'à des fonctionnalités dont on connaît bien les fondements et les conditions d'emploi, au risque sinon d'aboutir à des *mésusages*<sup>17</sup> qui peuvent avoir des conséquences désastreuses.

## ⊖ Bibliographie

En matière bibliographique, nous ne donnons ici que les références d'un certain nombre de livres, ainsi que quelques indications complémentaires, et nous mentionnerons plus loin de nombreuses références relatives aux différents sujets abordés.

D'une manière générale, la littérature qui a trait aux plans d'expériences, comme la littérature statistique, est abondante surtout en anglais.

Sur le plan historique, nous rappelons tout d'abord les livres des « pionniers », à savoir FISHER [1935] et YATES [1937]. Nous y associons les « classiques » des années 1950, parmi lesquels les ouvrages de COCHRAN et COX [1950], COX [1958], DAVIES [1954], FEDERER [1955] et QUENOUILLE [1953]<sup>18</sup>.

Quant aux livres plus récents, ils sont pour la plupart plus ou moins étroitement liés à l'un ou l'autre domaine d'application. On peut néanmoins mentionner, comme textes relativement généraux, les travaux de DEAN et VOSS [1999] et KUEHL [2000], et les deux volumes plus encyclopédiques de HINKELMANN et KEMPTHORNE [2005, 2008].

Dans le domaine agronomique, on peut citer plus particulièrement les livres de MEAD [1988] et PETERSEN [1994] ; dans le domaine industriel, les ouvrages de BOX *et al.* [2005] et MONTGOMERY [2008] ; et en matière médicale, les livres de FLEISS [1999] et MATTHEWS [2006].

En français, les ouvrages récents sont largement orientés vers le secteur industriel et notamment le choix des traitements (*treatment design*). On peut mentionner les livres de GOUPY [2005], GOUPY et CREIGHTON [2009], et SADO et SADO [2000].

Il faut signaler en outre que certains ouvrages ont trait à des sujets ou des domaines d'application plus particuliers. Tel est le cas des livres de DODGE [1985]

---

<sup>17</sup> En anglais : *misuse*.

<sup>18</sup> Nous n'indiquons que les références des premières éditions de ces ouvrages, dont certains ont été l'objet de rééditions ultérieures.

et LITTLE et RUBIN [2002] en ce qui concerne les données manquantes, de DYKE [1988] et ROBINSON [2000] quant à la réalisation pratique des expériences, notamment en champ, de DEPLEDT [2009] et URDAPILLETA *et al.* [2001] en matière d'analyse sensorielle, utilisée entre autres dans le domaine agroalimentaire, et de WILLIAMS *et al.* [2002] en arboriculture fruitière et en expérimentation forestière.

Diverses informations peuvent également être trouvées dans d'autres sources documentaires classiques [STAT1, § 1.4.1]. En particulier, en ce qui concerne les revues, on peut suggérer, notamment, la consultation des titres *Journal of Applied Statistics*, *Journal of Quality Technology*, *Journal of Statistical Planning and Inference*, *Statistics in Medicine* et *Technometrics*.

## ⊖ Documentation par internet

La documentation accessible par internet apporte des compléments de plus en plus importants, et peut même se substituer dans une large mesure à la documentation bibliographique traditionnelle.

À titre indicatif, on peut citer comme sources d'informations<sup>19</sup> :

- les moteurs de recherche classiques, tels que Google (<[www.google.com](http://www.google.com)>) et Yahoo (<<http://search.yahoo.com>>);
- la version *Scholar* de Google (<[http://scholar.google.com/advanced\\_scholar\\_search](http://scholar.google.com/advanced_scholar_search)>), qui concerne plus particulièrement la recherche d'articles de revues;
- la page <[www.stata.com/links/journals4.html](http://www.stata.com/links/journals4.html)>, qui présente une liste de revues;
- la rubrique *Experimental Design* de <[www.statsoft.com/textbook/stathome.html](http://www.statsoft.com/textbook/stathome.html)>, qui fournit diverses informations générales relatives aux plans d'expériences, principalement dans le domaine industriel;
- la page <[www.statsci.org/statcomp.html](http://www.statsci.org/statcomp.html)>, qui donne accès à une série d'informations relatives à de nombreux logiciels.

En ce qui concerne en particulier les moteurs de recherche classiques, on devra toujours être très prudent lors de la consultation de sites dont les auteurs ne seraient pas bien connus ou bien identifiés, et dont le contenu pourrait être tout à fait incorrect. Quant aux revues, on peut noter que la plupart des sites qui leur sont consacrés permettent de consulter gratuitement les tables des matières et les résumés des articles, certains sites proposant aussi gratuitement les textes complets des articles ou d'une partie d'entre eux.

---

<sup>19</sup> Les indications que nous donnons au sujet des sites web peuvent être modifiées à tout moment, et peuvent donc être rapidement caduques.



# Chapitre 1

## Le but et les conditions de l'expérience

### Sommaire

#### **1.1 Définition du but de l'expérience**

1.1.1 Expérience à objectif unique

1.1.2 Expérience à objectifs multiples

#### **1.2 Définition des conditions de l'expérience**

1.2.1 Expériences plus ou moins importantes

1.2.2 Stratégie ou programme expérimental

1.2.3 Conditions réglementaires

## 1.1 Définition du but de l'expérience

### 1.1.1 Expérience à objectif unique

#### 1° Principe

La définition claire et précise du but de l'expérience est toujours un élément essentiel du protocole expérimental. Dans certains cas, quand l'objectif à atteindre est à première vue unique et évident, cette définition peut paraître très simple. Mais en réalité, il en est rarement ainsi.

#### 2° Domaine agronomique

Considérons par exemple, dans le domaine agronomique, le problème apparemment élémentaire de la comparaison des rendements de différentes variétés (races, provenances, origines ou descendances) d'une même espèce végétale ou animale. Ce problème peut en fait recouvrir des situations aussi différentes que :

- la comparaison de toutes les variétés, considérées sur pied d'égalité, en vue d'identifier la ou les « meilleures » d'entre elles dans des conditions données ;
- la comparaison d'une ou plusieurs nouvelles variétés avec une ou plusieurs variétés de référence, bien connues, en vue d'assurer le cas échéant la diffusion de la ou des nouvelles variétés qui seraient « supérieures » à la ou aux anciennes variétés ;
- la comparaison de toutes les variétés ou, plus vraisemblablement, de toutes les descendances, en vue d'estimer certains coefficients d'héritabilité.

Encore faudrait-il préciser clairement, dans chaque cas, ce qu'on entend par « meilleur » ou « supérieur ».

#### 3° Domaine médical

D'une manière fort semblable, dans le domaine médical, on peut faire la distinction entre, d'une part, les expériences de supériorité, destinés à comparer par exemple une nouvelle substance ou molécule à un témoin ou placebo (§ 2.2.2.4°), en vue d'établir la *supériorité*<sup>1</sup> ou l'*efficacité*<sup>2</sup> éventuelle de la nouvelle substance, et d'autre part, les expériences d'équivalence et de non-infériorité, qui ont pour but d'étudier soit l'*équivalence* ou la *bioéquivalence*<sup>3</sup>, soit la *non-infériorité*<sup>4</sup> d'un nouveau traitement par rapport à un traitement de référence.

#### 4° Connaissances préalables

Il n'est sans doute pas inutile de dire ou de rappeler ici que la définition d'un objectif précis nécessite un minimum de connaissances préalables des phénomènes

---

<sup>1</sup> En anglais : *superiority*.

<sup>2</sup> En anglais : *efficacy*.

<sup>3</sup> En anglais : *equivalence, bioequivalence*.

<sup>4</sup> En anglais : *non-inferiority*.

étudiés. Ces connaissances peuvent être acquises en général par une étude bibliographique et critique, ne conduisant pas seulement à une énumération de références, mais bien à une synthèse et à des conclusions, exprimées par exemple sous la forme d'hypothèses à vérifier ou de questions auxquelles des réponses doivent être apportées. Ces connaissances préalables peuvent également être élargies par des expériences ou des observations préliminaires.

L'expérimentateur averti ne ménage pas ses efforts à ce stade de la recherche, car il sait que tout enrichissement de ses connaissances de départ doit lui permettre de mieux organiser son expérience ou son programme d'expériences et, vraisemblablement, d'en tirer un bien meilleur profit. Cette remarque est particulièrement importante pour les expériences ou les programmes d'expériences coûteux ou de longue durée, très fréquents dans les principaux domaines considérés (agronomie, médecine, industrie, etc.).

En matière agronomique, on peut citer par exemple les programmes de sélection, même lorsqu'ils concernent des cultures annuelles, les expériences relatives aux rotations des cultures, aux cultures pérennes et aux grands animaux et, surtout, certaines expériences forestières.

### 1.1.2 Expérience à objectifs multiples

#### 1° Principe

Le plus souvent, cependant, les expériences poursuivent simultanément plusieurs objectifs. On peut notamment avoir pour but d'étudier deux ou plusieurs variables différentes relatives à une même série d'individus (rendement en racines, richesse saccharine et production de sucre de différentes variétés de betterave sucrière, par exemple). Mais on peut également se proposer d'effectuer, en plus des mesures de base (de croissance ou de rendement, par exemple), des observations complémentaires relatives au déroulement de l'expérience (précocité de la croissance ou développement de certaines maladies, par exemple).

Il importe, dans de tels cas, de bien identifier les différents objectifs considérés, en spécifiant leur ordre de priorité, de manière à accorder, au moment de la planification, toute l'attention nécessaire à l'objectif ou aux objectifs les plus importants. C'est en effet essentiellement en fonction de ce ou ces objectifs que doivent être définis divers éléments fondamentaux du protocole expérimental, dont la structure des traitements, le nombre de répétitions à réaliser, etc.

#### 2° Vulgarisation

Dans certaines situations aussi, la diversité des objectifs provient du fait qu'outre son but principal de recherche, l'expérience doit servir d'outil didactique, de vulgarisation ou de démonstration, à l'intention des praticiens (agriculteurs ou éleveurs, par exemple). Dans ce cas également, il importe de bien préciser les priorités et de ne pas se laisser distraire des objectifs principaux.

## 1.2 Définition des conditions de l'expérience

### 1.2.1 Expériences plus ou moins importantes

#### 1° Importance ou ampleur de l'expérience

D'une manière très générale, un même objectif ou au moins des objectifs fort semblables peuvent être poursuivis dans le cadre d'expériences réalisées dans des conditions très différentes, qui doivent être précisées dès le départ. Ces conditions peuvent être liées notamment à l'importance ou à l'ampleur qui est donnée aux expériences.

#### 2° Domaine agronomique

En matière agronomique, on peut faire, à ce propos, la distinction entre expériences « en station » et expériences « hors station ».

Par expérience *en station*<sup>5</sup>, on entend une expérience qui est organisée de façon très stricte, au sein d'une station de recherche, d'un laboratoire ou, d'une manière générale, de tout milieu qui peut être étroitement surveillé (chambres de culture ou serres, par exemple). Par expérience *hors station*<sup>6</sup>, on entend au contraire une expérience qui est organisée dans un cadre moins bien contrôlé et généralement plus proche de la pratique (chez des agriculteurs ou en forêt, par exemple).

La distinction entre les deux situations n'est pas toujours très nette, mais elle peut conduire à des différences importantes quant à la planification de l'expérience.

L'expérience « en station » est souvent plus artificielle et elle peut porter sur un matériel végétal ou animal plus homogène. De plus, les conditions de travail permettent dans de nombreux cas l'utilisation d'équipements ou de locaux spéciaux, conduisant à la définition d'unités expérimentales (parcelles notamment) plus petites.

Par contre, les expériences « hors station » portent le plus souvent sur un matériel plus hétérogène et sont généralement soumises à plus d'aléas. Il en résulte, entre autres choses, qu'elles sont fréquemment caractérisées par l'emploi d'unités expérimentales plus grandes et, malgré cela, par une plus grande variabilité des résultats obtenus.

#### 3° Domaine médical

De même, dans le domaine médical, des expériences peuvent être organisées exclusivement en milieu hospitalier ou au contraire sur des patients ambulants, appelés à se soumettre régulièrement à certains examens. Il peut s'ensuivre des dif-

---

<sup>5</sup> En anglais : *on-station experiment*.

<sup>6</sup> En anglais : *off-station experiment, on-farm experiment*.

férences importantes, en ce qui concerne notamment le *respect des prescriptions*<sup>7</sup> médicales et la proportion des *défections*<sup>8</sup> en cours d'expérience.

#### 4° Domaine industriel

De même aussi, dans le secteur industriel, des expériences peuvent être mises sur pied à une petite échelle, en laboratoire, ou à une plus grande échelle, semi-industrielle par exemple, dans des installations spécialement conçues à cet effet, ou encore au cours d'une production industrielle tout à fait normale. Les sources de variabilité et les risques d'incidents ne sont évidemment pas les mêmes dans tous les cas.

## 1.2.2 Stratégie ou programme expérimental

### 1° Principe

D'une manière générale encore, une expérience est rarement organisée de façon isolée, mais s'intègre au contraire le plus souvent dans une *stratégie* ou un *programme expérimental*<sup>9</sup>, constitué de plusieurs expériences simultanées ou successives. Ce principe peut être illustré dans les différents domaines que nous venons d'envisager.

### 2° Domaine agronomique

En recherche agronomique notamment, une distinction doit être faite très fréquemment entre expériences préliminaires ou exploratoires ou d'orientation, expériences essentielles ou principales, et expériences de confirmation.

Les *expériences préliminaires* ou *exploratoires*<sup>10</sup> servent à dégrossir un problème nouveau, et leur organisation est parfois très sommaire, notamment en raison du fait que le matériel expérimental dont on dispose à ce stade de la recherche est souvent peu abondant (petits lots de semences par exemple). Les *expériences principales*<sup>11</sup> constituent le nœud du travail de recherche et doivent retenir toute l'attention du chercheur, qui doit éviter, à ce niveau, toute concession abusive à la facilité ou aux contingences matérielles. Les *expériences de confirmation*<sup>12</sup>, enfin, ont pour objectif de vérifier, dans des conditions aussi proches que possible de la pratique, la validité des conclusions obtenues aux stades antérieurs.

Il est évident que la distinction introduite ici n'est pas indépendante de celle qui a été mentionnée au cours du paragraphe 1.2.1.2°, les expériences préliminaires

---

<sup>7</sup> En anglais : *compliance*.

<sup>8</sup> En anglais : *drop-out*.

<sup>9</sup> En anglais : *experimental strategy, experimental program*.

<sup>10</sup> En anglais : *preliminary experiment, exploratory experiment*.

<sup>11</sup> En anglais : *main experiment*.

<sup>12</sup> En anglais : *confirmatory experiment*.

et principales étant souvent des expériences « en station » et les expériences de confirmation étant normalement des expériences « hors station ».

À titre d'illustration, on peut citer le cas d'un programme de sélection qui comporterait successivement des expériences de triage, des expériences comparatives et des expériences « multilocales ». Comme leur nom l'indique, les expériences de triage devraient permettre d'effectuer un premier choix parmi un grand nombre de variétés (provenances, origines, etc.) peut-être très disparates. Les expériences comparatives seraient destinées à comparer, toujours en station et dans des conditions très strictes, les variétés qui auraient été retenues au premier stade. Et les expériences « multilocales » auraient pour but de vérifier hors station le comportement des quelques variétés finalement sélectionnées, et cela dans toute la région de diffusion potentielle de ces variétés et au cours de plusieurs années successives.

### 3° Domaine médical

Dans le domaine médical, les expériences cliniques, qui sont réalisées sur des patients et parfois des volontaires sains, font suite habituellement à des expériences préliminaires ou précliniques qui peuvent avoir mis en cause des animaux. Les expériences cliniques sont elles-mêmes organisées selon un processus bien défini, normalement constitué de quatre phases successives [MEINERT, 1998].

Très schématiquement, la première phase a pour but d'obtenir des informations générales relatives à la toxicité et à l'action éventuelle du nouvel élément chimique ou biologique qui est pris en considération. La deuxième phase tend à préciser l'efficacité du produit étudié, en fonction des doses administrées. La troisième phase a pour objectif principal de définir les modalités de prescription du nouveau médicament (doses, fréquences d'utilisation, etc.). Et la quatrième phase est une phase de suivi, qui a notamment pour but d'identifier les éventuels effets secondaires rares ou qui pourraient apparaître à long terme.

Il est évident que l'ampleur donnée aux expériences est en relation étroite avec les différentes phases envisagées. Les expériences de phase I peuvent porter sur quelques patients ou quelques dizaines de personnes seulement, et cela souvent dans un seul centre hospitalier. Les expériences des phases II et III peuvent impliquer plusieurs centaines de patients et éventuellement de volontaires sains, qui sont suivis dans différents hôpitaux. Et la phase IV peut consister en une étude statistique des dossiers médicaux de milliers ou dizaines de milliers de personnes, qui sont observées dans la vie courante.

### 4° Domaine industriel

Des principes semblables s'appliquent également au domaine industriel. Il y est souvent question d'identifier tout d'abord le ou les facteurs les plus influents ou actifs, dans tel ou tel processus de fabrication ou de transformation, et cela éventuellement dans des conditions de laboratoire, d'étudier ensuite de façon plus précise l'effet des facteurs les plus influents et autant que possible leurs interactions,

en laboratoire ou à une échelle semi-industrielle, et de définir enfin les conditions optimales de fabrication ou de transformation, à une échelle aussi proche que possible de la réalité industrielle<sup>13</sup>.

### 1.2.3 Conditions réglementaires

Dans le domaine médical, l'organisation des expériences ou essais cliniques est réglementée de manière très stricte. Des règles de *bonnes pratiques cliniques*<sup>14</sup> existent tant au niveau national, dans certains pays, qu'au niveau international, notamment dans le cadre d'accords entre l'Union européenne, les États-Unis d'Amérique et le Japon [Anonyme, 1999 ; BROWN *et al.*, 2008 ; ROCKHOLD, 2002].

De même, certaines contraintes réglementaires, de *bonnes pratiques d'expérimentation*<sup>15</sup>, ont été promulguées dans le domaine agronomique, en particulier en ce qui concerne les expériences relatives aux produits phytosanitaires [Anonyme, 2004 ; LEUCHOVIOUS, 1997]. Et d'autres réglementations s'appliquent également aux secteurs agro-alimentaire et vétérinaire.

---

<sup>13</sup> Le mot anglais *screening* (ou en français *criblage*) est utilisé pour désigner aussi bien la recherche du ou des facteurs les plus influents que, dans l'exemple agronomique envisagé plus haut, le premier tri d'un certain nombre de variétés ou de provenances.

<sup>14</sup> En anglais : *good clinical practices*.

<sup>15</sup> En anglais : *good experimental practices*.



## Chapitre 2

# Les facteurs et les traitements ou objets

### Sommaire

#### **2.1 Concepts de base**

- 2.1.1 La notion de facteur
- 2.1.2 La notion de traitement ou objet

#### **2.2 Les expériences à un facteur**

- 2.2.1 Le choix des modalités
- 2.2.2 Les témoins ou objets de référence

#### **2.3 Les expériences factorielles et factorielles fractionnaires**

- 2.3.1 Principes généraux
- 2.3.2 Les expériences factorielles complètes
- ⊖ 2.3.3 Les expériences factorielles fractionnaires

#### **2.4 Les autres expériences à deux ou plusieurs facteurs**

- ⊖ 2.4.1 L'étude des surfaces de réponse
- ⊖ 2.4.2 L'étude des mélanges
- ⊖ 2.4.3 Les plans optimaux
- ⊖ 2.4.4 Les expériences organisées en deux ou plusieurs phases
- ⊖ 2.4.5 Les expériences numériques

## 2.1 Concepts de base

### 2.1.1 La notion de facteur

#### 1° Facteur, facteurs qualitatifs et quantitatifs

En matière d'expérimentation, on appelle *facteur*<sup>1</sup> toute série d'éléments de même nature qui peuvent être comparés au cours d'une expérience, tels qu'une série de variétés, un ensemble de produits phytosanitaires, différentes doses d'un même engrais, différentes températures, différentes pressions, etc.

D'une manière générale, les facteurs peuvent être divisés en *facteurs qualitatifs*<sup>2</sup>, dont les différents éléments ne peuvent pas être classés a priori (variétés, produits phytosanitaires, etc.), et en *facteurs quantitatifs*<sup>3</sup>, dont les éléments se classent au contraire de façon logique a priori (différentes doses d'un même engrais, différentes températures, différentes pressions, etc.). Dans le cas des facteurs quantitatifs, chacun des facteurs s'identifie aussi à la variable sous-jacente considérée (dose, température, pression, etc.).

#### 2° Variantes, niveaux, modalités

Les différents éléments individuels qui sont associés à chacun des facteurs sont appelés *variantes*, *niveaux* ou *modalités*<sup>4</sup>. Le terme « variante » convient mieux dans le cas des facteurs qualitatifs (différentes variétés par exemple), et le terme « niveau » dans le cas des facteurs quantitatifs (différentes températures par exemple), tandis que le vocable « modalités » s'adapte bien aux deux situations.

⌈ Quand les modalités sont au nombre de trois au moins, on fait parfois la distinction entre les facteurs qualitatifs proprement dits, au sens où nous les avons définis ci-dessus, et les *facteurs qualitatifs ordonnés*<sup>5</sup>. Les modalités de ces derniers sont telles qu'elles peuvent être ordonnées, mais ne correspondent cependant pas exactement, comme pour les facteurs quantitatifs, aux valeurs numériques d'une variable sous-jacente [COX, 1958]<sup>6</sup>.

Tel est le cas si on désire comparer, par exemple, la croissance d'un certain nombre d'individus (plantes ou animaux notamment) atteints par une même maladie à des degrés différents, qui ne sont pas définis sur une base numérique stricte.

⌋ Cette distinction est comparable à celle qui peut être faite entre données qualitatives nominales et données qualitatives ordinales [STAT1, § 2.4.1].

<sup>1</sup> En anglais : *factor*.

<sup>2</sup> En anglais : *qualitative factor*.

<sup>3</sup> En anglais : *quantitative factor*.

<sup>4</sup> En anglais : *level*.

<sup>5</sup> En anglais : *ranked qualitative factor*.

<sup>6</sup> Nous rappelons que les alinéas marqués en marge des symboles ⌈ et ⌋, de même que les paragraphes dont le titre est précédé du symbole ⊖, peuvent être négligés au cours d'une première lecture.

### 3° Facteurs contrôlés et non contrôlés, facteurs constants

Les facteurs qui sont effectivement étudiés au cours d'une expérience sont aussi appelés *facteurs contrôlés* ou *maîtrisés*<sup>7</sup>. Ils s'opposent aux *facteurs non contrôlés* ou *non maîtrisés*<sup>8</sup>, sur lesquels il n'est pas ou il est difficilement possible d'agir et qui sont la source de variations résiduelles, fréquemment considérées comme aléatoires. On peut citer comme exemples possibles de facteurs non maîtrisés les conditions météorologiques, la température ambiante du local dans lequel est organisée l'expérience, le degré d'humidité de certaines matières premières, etc.

Très souvent, certains facteurs qui pourraient être facilement maîtrisés sont maintenus constants, dans le but de ne pas augmenter de façon excessive le nombre de sources de variation prises en considération simultanément. Ces facteurs sont dits *constants*<sup>9</sup>.

### 4° Facteurs essentiels et accessoires

Comme nous le verrons ultérieurement (à partir du chapitre 6), les variations résiduelles dues aux facteurs non contrôlés peuvent malgré tout être maîtrisées dans une certaine mesure par la définition de blocs, de dispositifs expérimentaux constitués de lignes et de colonnes, etc.

Dans cette optique, on parle fréquemment de *facteurs essentiels* ou *principaux* à propos des facteurs qui constituent la raison d'être de l'expérience, et de *facteurs accessoires* ou *auxiliaires* à propos de ceux qui sont introduits en vue de maîtriser les variations résiduelles (facteur blocs par exemple).

[ Les différentes catégories de facteurs auxquelles nous avons fait allusion, de même que leur caractère fixe ou aléatoire (§ 2.2.1.1°), sont discutés notamment [ par PREECE [2001].

### ⊖ 5° Terminologie

La multiplicité des domaines d'application des plans d'expériences a induit une diversité de la terminologie, à laquelle nous avons déjà fait allusion dans l'introduction générale à propos de la signification même du mot « expérience ».

En ce qui concerne le sujet abordé ici, nous ajoutons que, surtout dans le cas des facteurs quantitatifs, les facteurs contrôlés sont parfois appelés aussi *paramètres* ou *paramètres expérimentaux* ou *paramètres d'entrée*, ou encore *variables entrantes* ou *variables explicatives*, comme en régression.

En outre, on utilise également les termes *signal*<sup>10</sup> et *bruit* ou *bruit de fond*<sup>11</sup> en vue de distinguer ce qui relève d'une part des facteurs contrôlés, et d'autre part des facteurs non contrôlés.

<sup>7</sup> En anglais : *controlled factor*.

<sup>8</sup> En anglais : *uncontrolled factor*.

<sup>9</sup> En anglais : *constant factor*.

<sup>10</sup> En anglais : *signal*.

<sup>11</sup> En anglais : *noise*.

## 2.1.2 La notion de traitement ou objet

### 1° Traitement ou objet

On appelle communément traitement toute modalité d'un facteur unique, de même que toute combinaison de modalités de deux ou plusieurs facteurs. On peut citer à titre d'exemples de traitement, dans le cas d'un seul facteur, un type donné de labour ou une fumure donnée et, dans le cas de deux facteurs, l'association d'une variété donnée à un herbicide donné, la combinaison d'une température et d'une pression données, etc.

Dans la mesure où il ne s'agit pas toujours de traitement au sens strict du terme (différentes variétés d'une même céréale ou différentes races de bétail bovin, par exemple), nous préférons remplacer le mot « traitement » par le terme plus large *objet*.

### 2° Plan ou structure des objets et autres conditions expérimentales

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction générale, l'ensemble des objets ou des traitements qui doivent être expérimentés constitue le plan ou la structure des objets (*treatment design*).

Les différents objets et leur structure doivent évidemment être clairement définis dans le protocole expérimental. Mais en outre, toutes les autres conditions de l'expérience, qui en constituent les facteurs constants, doivent également être bien précisées dans le protocole (en productions végétales, par exemple les modalités de travail du sol, la fumure de base, la date, la densité et la profondeur du semis, etc., et en productions animales, les conditions d'élevage, l'alimentation de base, etc.).

### 3° Choix des objets

Dans l'ensemble, le problème du choix des objets se présente sous des formes très différentes d'une discipline à l'autre.

En matière agronomique, certaines expériences ne font intervenir qu'un seul facteur contrôlé, mais parfois avec un grand nombre de modalités. D'autres expériences, plus nombreuses, prennent en considération deux ou plusieurs facteurs, le plus souvent selon des arrangements factoriels (§ 2.3.2).

Dans le domaine médical par contre, la plupart des expériences ne concernent qu'un seul facteur et portent sur un petit nombre d'objets seulement. Il s'agit très fréquemment de comparer une ou un nombre très limité de substances nouvelles avec un témoin ou placebo (§ 2.2.2.4°), ou de comparer entre elles deux ou un très petit nombre de thérapies.

Dans le domaine industriel enfin, des situations beaucoup plus complexes, dans lesquelles intervient un plus grand nombre de facteurs, sont souvent envisagées, et font appel aux notions de surfaces de réponse (§ 2.4.1 et 2.4.2), de plans optimaux (§ 2.4.3), etc.

## 2.2 Les expériences à un facteur

### 2.2.1 Le choix des modalités

#### 1° Cas d'un facteur qualitatif

Dans le cas d'un facteur qualitatif unique, le problème du choix des différentes modalités ou variantes ne se pose généralement pas, celles-ci étant définies en même temps que le but de l'expérience (comparaison de quelques variétés données de blé par exemple).

Il peut arriver cependant, notamment dans certaines études de sélection ou de génétique, qu'un choix doive être fait au départ parmi un grand nombre de variantes possibles (comparaison d'un nombre nécessairement limité de descendances, à choisir parmi un grand nombre de descendances disponibles, par exemple). Quand on ne possède pas d'autre critère et qu'on désire obtenir des informations relatives à l'ensemble de toutes les variantes considérées initialement, ce choix est généralement réalisé par tirage au sort ou échantillonnage, en conservant toujours le plus grand nombre possible de variantes.

On notera que, dans les éventuelles analyses de la variance relatives aux résultats de telles expériences, le critère de classification qui concerne un facteur dont les modalités ont été choisies de cette manière est un critère aléatoire [STAT2, § 9.3.1].

#### 2° Cas d'un facteur quantitatif

Dans le cas d'un facteur quantitatif par contre, le problème du choix des modalités ou niveaux reste entier. Le plus souvent, les niveaux sont choisis, dans l'ensemble du domaine de variation qu'on désire étudier, selon une progression arithmétique (par exemple : 100, 200 et 300 kg d'azote par hectare) ou selon une progression géométrique au moins approximative (par exemple : 1, 2, 4 et 8 g, ou 1, 2, 5 et 10 g d'une matière active ou d'une substance de croissance donnée par plante).

D'une façon générale également, le nombre de niveaux choisis doit toujours être aussi élevé que possible, même si, en conséquence, le nombre de répétitions pour chacun des niveaux doit être considérablement réduit. En particulier, on observera que, si deux niveaux peuvent suffire pour mettre en évidence l'influence d'un facteur et, éventuellement, pour établir une relation linéaire entre ce facteur et les résultats de l'expérience, il faut disposer d'au moins trois niveaux pour pouvoir vérifier l'hypothèse de linéarité d'une telle relation et pour localiser un éventuel optimum.

## 2.2.2 Les témoins ou objets de référence

### 1° Notion de témoin

Lors de toute planification d'une expérience, on doit examiner l'opportunité d'introduire ou non, dans l'expérience, un ou plusieurs *témoins* ou *objets de référence*<sup>12</sup>. En matière agronomique, ceux-ci peuvent être, par exemple, une ou quelques variétés largement utilisées dans la région considérée, un ensemble de parcelles qui ne sont soumises à aucun des traitements étudiés (parcelles sans engrais), un ensemble de parcelles qui sont soumises à un traitement classique, considéré comme point de comparaison (parcelles traitées avec un herbicide bien connu), etc.

Il faut cependant éviter d'inclure d'office un témoin dans une expérience quand celui-ci n'est pas essentiel pour atteindre l'objectif fixé au départ, et notamment quand on sait a priori que les différences par rapport au témoin sont considérables. Dans de telles conditions, la prise en considération d'un ou plusieurs témoins peut en effet être une source importante d'hétérogénéité et, parfois aussi, d'erreurs d'interprétation des résultats.

Dans une expérience de comparaison de fumures organisée sur des sols très pauvres, par exemple, on peut s'abstenir de prévoir l'existence de parcelles sans engrais. Le cas échéant, on introduira plutôt une fumure de référence couramment utilisée dans la région considérée, pour autant qu'une telle fumure existe. Et s'il s'impose, pour des raisons de vulgarisation ou de démonstration, de disposer de parcelles non traitées, on prévoira l'existence de telles parcelles en marge ou en bordure de l'expérience proprement dite, sans y consacrer nécessairement toute la place qui revient à chacun des autres objets envisagés.

L'exemple du paragraphe 6.5 et la photo 6 [DAGNELIE, 2009] illustrent bien une situation où la présence de parcelles témoins au sein même de l'expérience n'est pas indispensable.

### 2° Nombre de témoins

Si le témoin ou l'objet de référence constitue un des éléments essentiels de l'expérience, il peut être utile de lui consacrer plus d'importance qu'à chacun des autres objets. Quand on considère uniquement comme but de l'expérience la comparaison d'une série de  $p$  objets ( $p$  nouvelles variétés par exemple) avec un objet de référence (une ancienne variété par exemple), on peut démontrer que la précision des comparaisons est maximum lorsque le nombre de répétitions  $n_0$  de l'objet de référence et le nombre de répétitions  $n$  de chacun des  $p$  autres objets sont liés par la relation :

$$n_0 = n \sqrt{p}.$$

---

<sup>12</sup> En anglais : *control, check, check treatment*.

Cette propriété conduit à adopter deux fois plus de répétitions pour l'objet de référence que pour chacun des autres objets quand ceux-ci sont au nombre de quatre ou cinq, trois fois plus de répétitions quand ils sont au nombre d'une dizaine, etc. Dans ce dernier cas, le gain de précision obtenu de cette façon peut atteindre 20 % environ.

⌈ Pour 10 objets en effet, y compris l'objet de référence, si on dispose par exemple de 60 unités expérimentales (60 parcelles ou 60 animaux), si on consacre six unités à chacun des 10 objets, et si la variance des unités expérimentales est égale à  $\sigma^2$ , la variance de la différence entre la moyenne  $\bar{x}_i$  de l'un ou l'autre objet et la moyenne  $\bar{x}_0$  de l'objet de référence est [STAT1, § 5.8.3 et 8.3.1] :

$$(1/6 + 1/6) \sigma^2 = \sigma^2/3.$$

Si par contre, dans les mêmes conditions, on consacre cinq unités expérimentales à chacun des neuf objets, à l'exclusion de l'objet de référence, et 15 unités à ce dernier, la variance de la différence de moyennes est :

$$(1/5 + 1/15) \sigma^2 = 4\sigma^2/15.$$

Cette valeur est inférieure de 20 % à  $\sigma^2/3$ .

⌋ D'autres solutions relatives à ce problème ont été envisagées par BECHHOFFER et TAMHANE [1983] et HORN [1979].

### 3° Témoins systématiques

Dans les différentes situations évoquées ci-dessus, le ou les témoins sont toujours considérés de la même façon que chacun des autres objets, notamment en ce qui concerne la répartition au hasard au sein du dispositif expérimental qui est choisi.

Il peut arriver cependant, surtout dans des champs d'expérience très hétérogènes, qu'il soit utile de répartir des parcelles témoins de façon systématique (par exemple, un témoin toutes les cinq ou six parcelles), voire même de telle sorte qu'au moins une parcelle témoin soit accolée à chaque parcelle qui n'est pas affectée au témoin (un témoin toutes les deux ou trois parcelles). Dans ce cas, il y a lieu de tenir compte du caractère systématique de la répartition des parcelles témoins au moment de l'analyse des résultats (§ 12.3.2).

### 4° Placebo et double aveugle

La question du ou des témoins, que nous avons envisagée jusqu'ici essentiellement dans le domaine agronomique, se présente d'une manière toute particulière dans le domaine médical.

En effet, déjà dans le cas le plus simple de la comparaison d'un groupe de patients recevant un médicament nouveau avec un groupe de patients témoins, ces derniers reçoivent en général un *placebo*<sup>13</sup>, c'est-à-dire une substance en principe

---

<sup>13</sup> En anglais : *placebo*.

inactive présentée sous une forme identique à celle du médicament étudié. Le but poursuivi en adoptant une telle procédure est d'éliminer au maximum toute interférence d'origine psychologique notamment.

Mais en outre, le plus souvent, l'organisation est telle que, non seulement les patients, mais aussi le personnel médical et soignant et les responsables de la collecte et du traitement des informations issues de l'expérience ignorent quels sont les patients qui reçoivent effectivement le médicament étudié et quels sont ceux qui se voient attribuer le placebo. La répartition réelle des objets n'est alors connue que des personnes qui organisent l'expérience et qui doivent effectuer l'analyse finale des résultats et en tirer les conclusions. Une telle procédure est dite en *double aveugle*<sup>14</sup>.

### 5° Éthique

L'attribution d'un placebo à certains patients, ce qui peut impliquer une certaine absence de soins, soulève évidemment de sérieux problèmes éthiques [FREEDMAN et SHAPIRO, 1994; PALMER, 2002; SENN, 2002a].

Des considérations éthiques interviennent également dans le domaine de l'agro-alimentaire et en expérimentation animale [ELSNER *et al.*, 2001; LAROCHE et ROUSSELET, 1990; VEISSIER, 1999].

## 2.3 Les expériences factorielles et fractionnaires

### 2.3.1 Principes généraux

#### 1° Nombres de facteurs et de modalités

Dans le cas des expériences qui font intervenir deux ou plusieurs facteurs, se posent non seulement le problème du choix des modalités de chacun des facteurs, y compris éventuellement un ou plusieurs témoins, mais aussi la question du choix du nombre de facteurs et du mode d'agencement des différentes modalités de chacun des facteurs avec les différentes modalités des autres facteurs.

Sur un plan théorique, on pourrait affirmer tout d'abord qu'il y a toujours intérêt à augmenter au maximum le nombre de facteurs, au même titre que le nombre de modalités de chacun des facteurs. Mais l'application de ce principe conduit très rapidement à prendre en considération un nombre considérable d'objets, alors que les moyens disponibles pour réaliser quelque expérience que se soit sont toujours limités.

Le plus souvent, le problème est en fait un problème d'équilibre entre les objectifs que l'expérimentateur souhaiterait atteindre et les moyens dont il dispose,

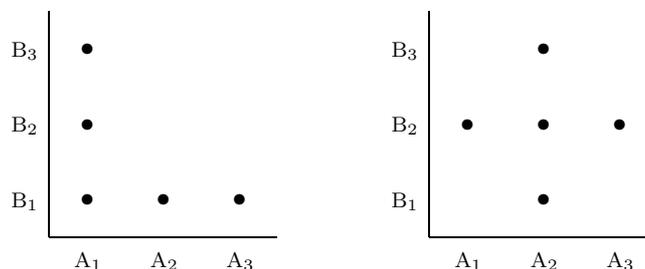
<sup>14</sup> En anglais : *double-blind experiment*.

en temps, en personnel, etc., la réflexion englobant inévitablement des aspects économiques ou financiers.

### 2° Un facteur à la fois

En ce qui concerne la manière de combiner entre elles les diverses modalités des différents facteurs, une solution très simple consiste à faire évoluer chacun des facteurs *un à la fois*<sup>15</sup>, les autres facteurs étant maintenus constants dans chaque cas.

La figure 2.3.1 présente deux possibilités relatives au cas de deux facteurs à trois modalités chacun, avec un total de cinq objets. Dans cette figure, les symboles  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  désignent les trois modalités du premier facteur, et  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  les trois modalités du deuxième facteur.



**Figure 2.3.1.** Représentation schématique de deux possibilités d'expériences à deux facteurs du type « un facteur à la fois ».

La première possibilité suppose que l'effet du premier facteur est étudié pour la première modalité ( $B_1$ ) du deuxième facteur, et que l'effet du deuxième facteur est étudié pour la première modalité ( $A_1$ ) du premier facteur. Elle s'applique indifféremment au cas des facteurs qualitatifs et quantitatifs<sup>16</sup>.

La deuxième possibilité, dite *en étoile* ou *radiale*<sup>17</sup>, concerne par contre plus particulièrement les facteurs quantitatifs, pour lesquels les modalités  $A_2$  et  $B_2$  sont effectivement intermédiaires entre  $A_1$  et  $A_3$  d'une part, et entre  $B_1$  et  $B_3$  d'autre part. Cette possibilité implique que chacun des deux facteurs est étudié au niveau intermédiaire de l'autre facteur.

Quelle que soit la procédure adoptée, l'approche « un facteur à la fois » présente l'inconvénient majeur de ne donner aucune information quant aux interactions qui peuvent éventuellement exister entre les facteurs et, à ce titre, n'est en général pas à conseiller.

<sup>15</sup> En anglais : *one-factor-at-a-time*.

<sup>16</sup> Dans le cas où deux modalités seulement sont considérées pour chacun des facteurs, supposés quantitatifs, cette structure est parfois appelée *plan de KOSHAL* (KOSHAL's design).

<sup>17</sup> En anglais : *star design, radial design*.

[ Des informations complémentaires peuvent être trouvées notamment dans un article de CZITROM [1999].

### 3° Expériences factorielles et non factorielles

Une deuxième solution a pour principe d'associer chacune des modalités d'un facteur à chacune des modalités de l'autre ou des autres facteurs. L'ensemble des objets constitue alors, dans le cas le plus simple de deux facteurs, un maillage carré ou rectangulaire complet. Les expériences organisées de cette manière sont dites *factorielles* ou, de façon plus précise, *factorielles complètes*<sup>18</sup> (§ 2.3.2).

Ces expériences ont l'avantage de conduire, par l'analyse de la variance, à des décompositions et à des interprétations simples, en termes d'effets principaux et d'interactions [STAT2, § 10.2 et 11.2]. Elles ont cependant l'inconvénient d'introduire rapidement, pour plus de deux facteurs, des nombres très élevés d'objets.

Une solution intermédiaire entre l'approche « un facteur à la fois » et les expériences factorielles complètes consiste à ne prendre en considération qu'un sous-ensemble, judicieusement choisi, de toutes les combinaisons des différentes modalités des facteurs étudiés. De telles expériences sont qualifiées de *factorielles incomplètes* ou *factorielles fractionnaires*<sup>19</sup> (§ 2.3.3).

D'autres solutions, non factorielles, peuvent être envisagées, en vue notamment d'atteindre d'autres objectifs que l'étude des effets principaux et des interactions. Tel est le cas pour les plans relatifs à l'étude des surfaces de réponse (§ 2.4.1), y compris le cas particulier des mélanges (§ 2.4.2), les plans optimaux (§ 2.4.3), les plans séquentiels (§ 2.4.4), etc.

Nous consacrerons quelques pages seulement à chacun de ces différents types d'expériences, qui pourraient justifier de bien plus longs développements.

## 2.3.2 Les expériences factorielles complètes

### 1° Exemple : facteurs et modalités

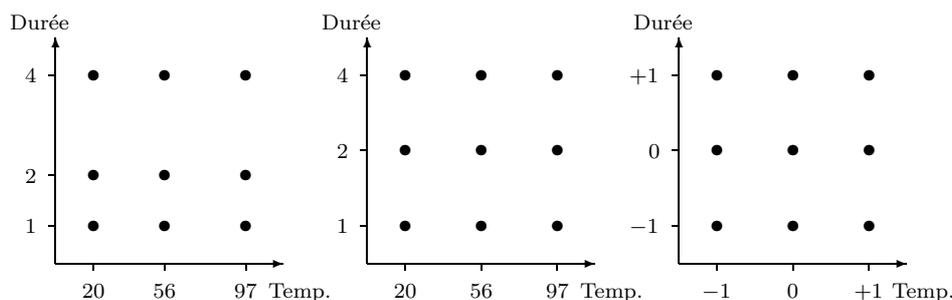
En vue de concrétiser les choses, en ce qui concerne les expériences factorielles complètes, considérons tout d'abord un exemple relativement simple. Il s'agit d'un cas que nous avons déjà envisagé antérieurement [STAT2, ex. 16.2.3 et 16.3.1], qui a trait à la pénétration de la soude dans le bois d'une essence forestière (*Autranella congolensis* (DE WILD.) A. CHEV.) et qui fait intervenir deux facteurs.

Les facteurs sont la température du bain de soude dans lequel des éprouvettes de bois sont plongées et la durée d'immersion des éprouvettes dans ce bain. Les modalités ou les niveaux de ces deux facteurs sont respectivement 20, 56 et 97 degrés centigrades, et 1 heure, 2 heures et 4 heures. Les neuf combinaisons température-durée sont toutes étudiées et constituent neuf objets.

<sup>18</sup> En anglais : *factorial design*, *complete factorial design*.

<sup>19</sup> En anglais : *incomplete factorial design*, *fractional factorial design*.

Ces neuf combinaisons peuvent être représentées dans un plan, par neuf points appelés *points expérimentaux*<sup>20</sup>, comme l'indique la partie gauche de la figure 2.3.2. Ces points définissent un maillage complet, qui est ici rectangulaire et irrégulier. Les points extrêmes, de coordonnées (20, 1), (20, 4), (97, 1) et (97, 4), délimitent le *domaine expérimental* qui est étudié.



**Figure 2.3.2.** Pénétration de la soude dans le bois d'*Autranella congolensis* : différentes représentations graphiques des points expérimentaux.

### 2° Exemple : choix et codage des modalités

Dans l'exemple considéré, le choix des différentes modalités des deux facteurs est justifié par des considérations théoriques, qui portent à croire que la profondeur de pénétration de la soude dans le bois peut être exprimée en fonction des deux variables étudiées par une relation de la forme [GERKENS, 1963] :

$$y = c x_1^{b_1} x_2^{b_2},$$

c'est-à-dire aussi :

$$\log(y) = b_0 + b_1 \log(x_1) + b_2 \log(x_2),$$

$x_1$  étant la température absolue,  $x_2$  la durée du traitement, et  $y$  la profondeur de pénétration.

Les valeurs 20, 56 et 97 d'une part, 1, 2 et 4 d'autre part ont en fait été choisies au départ de telle sorte que les points soient équidistants en termes de logarithmes. C'est ce qui apparaît dans le diagramme à échelles logarithmiques qui constitue la partie centrale de la figure 2.3.2, dont le maillage est strictement carré<sup>21</sup>.

Enfin, très souvent, dans le cas des facteurs quantitatifs à trois niveaux, les coordonnées des points expérimentaux équidistants sont conventionnellement codées en  $-1$ ,  $0$  et  $+1$ , comme le montre la partie droite de la figure 2.3.2.

<sup>20</sup> En anglais : *experimental point*.

<sup>21</sup> On notera qu'en abscisses, la différence entre les deux premiers diagrammes de la figure 2.3.2 est peu marquée, en raison du fait que la transformation logarithmique porte sur les températures absolues, c'est-à-dire sur les températures centigrades majorées de 273°.

### 3° Structure des objets

D'une façon générale, la structure de l'ensemble des objets qui interviennent dans une expérience factorielle complète peut être représentée par une expression du type :

$$p^k p'^{k'} \dots ,$$

dans laquelle  $p, p', \dots$  désignent les nombres de modalités des différents facteurs, qualitatifs ou quantitatifs, et  $k, k', \dots$  les nombres de facteurs correspondants. Dans ces conditions, la somme :

$$k + k' + \dots ,$$

est le nombre total de facteurs, et le produit :

$$p^k p'^{k'} \dots ,$$

est le nombre total d'objets.

Selon ces principes, l'exemple que nous avons présenté et qui est relatif à deux facteurs comportant chacun trois modalités, et donc neuf objets, correspond à une expérience de type  $3^2$ . De même, on parle d'une expérience factorielle complète  $2^4$  quand quatre facteurs sont tous présents avec deux modalités, le nombre total d'objets étant égal à 16, et d'une expérience  $2^2 3^2$  quand deux facteurs possèdent chacun deux modalités et, simultanément, deux autres facteurs possèdent chacun trois modalités, le nombre total d'objets étant égal à 36.

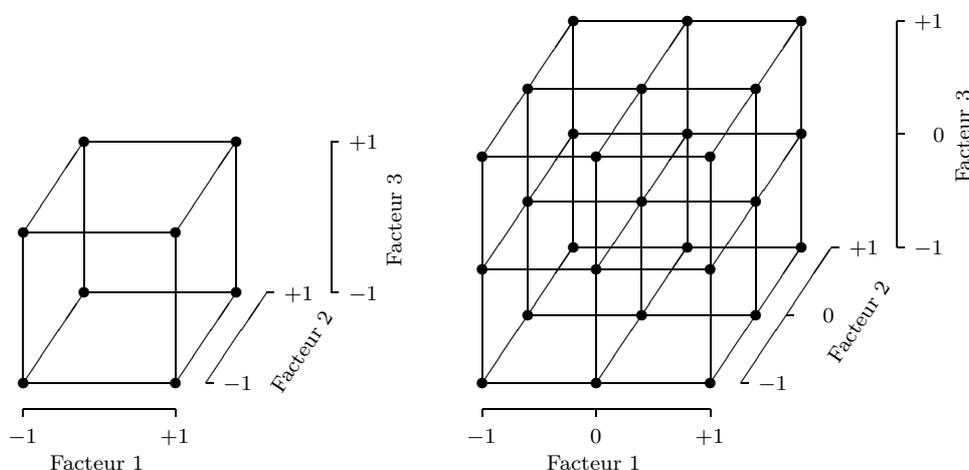
On peut noter à ce propos que, dans les expériences à plus de deux facteurs, le nombre de modalités de chacun des facteurs dépasse rarement la valeur 3, le nombre d'objets devenant sinon très rapidement considérable.

### 4° Maillage, domaine expérimental, points expérimentaux

D'une manière générale aussi, le maillage et le domaine expérimental d'une structure factorielle sont toujours rectangulaires ou carrés pour une expérience à deux facteurs, parallélépipédiques ou cubiques pour une expérience à trois facteurs, etc. La figure 2.3.3 présente, à titre d'exemples, les maillages cubiques d'expériences  $2^3$  et  $3^3$ .

Comme dans cette figure, les différentes modalités de chacun des facteurs sont très souvent codées en  $-1$  et  $+1$  dans le cas de deux modalités, quelle que soit la nature des facteurs, et en  $-1, 0$  et  $+1$  dans le cas de trois modalités équidistantes relatives à des facteurs quantitatifs.

Les trois premières colonnes de chacune des deux parties du tableau 2.3.1 mentionnent les coordonnées des différents points expérimentaux des deux schémas de la figure 2.3.3. La partie droite de ce tableau est toutefois limitée à 9 des 27 points de l'expérience  $3^3$ , les coordonnées des 18 autres points pouvant être obtenues en



**Figure 2.3.3.** Représentation graphique des 8 et des 27 objets d'expériences factorielles complètes  $2^3$  et  $3^3$ .

**Tableau 2.3.1.** Définition des objets des expériences factorielles complètes  $2^3$  et  $3^3$ , et notations correspondantes.

| Facteurs |    |    | Notations | Facteurs |    |    | Notations |
|----------|----|----|-----------|----------|----|----|-----------|
| 1        | 2  | 3  |           | 1        | 2  | 3  |           |
| -1       | -1 | -1 | 111 (1)   | -1       | -1 | -1 | 111       |
| -1       | -1 | +1 | 112 c     | -1       | -1 | 0  | 112       |
| -1       | +1 | -1 | 121 b     | -1       | -1 | +1 | 113       |
| -1       | +1 | +1 | 122 bc    | -1       | 0  | -1 | 121       |
| +1       | -1 | -1 | 211 a     | -1       | 0  | 0  | 122       |
| +1       | -1 | +1 | 212 ac    | -1       | 0  | +1 | 123       |
| +1       | +1 | -1 | 221 ab    | -1       | +1 | -1 | 131       |
| +1       | +1 | +1 | 222 abc   | -1       | +1 | 0  | 132       |
|          |    |    |           | -1       | +1 | +1 | 133       |
|          |    |    |           | ⋮        | ⋮  | ⋮  | ⋮         |

remplaçant les valeurs  $-1$  de la première colonne tout d'abord par  $0$ , puis par  $+1$ , sans modifier les deux autres colonnes.

### 5° Notations numériques

Indépendamment des valeurs  $-1$  et  $+1$  (et éventuellement  $0$ ), que nous venons de citer, différents systèmes de notations sont utilisés pour représenter individuellement les objets. Le système le plus simple est sans doute celui qui affecte les chiffres

1, 2, 3, ... aux différentes modalités de chacun des facteurs et qui juxtapose ces différents chiffres.

Selon ce principe, les neuf objets du cas  $3^2$  que nous avons envisagé en premier lieu à titre d'exemple seraient :

11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

Les premiers chiffres 1, 2 et 3 sont relatifs aux trois températures, et les deuxièmes chiffres 1, 2 et 3 aux trois durées d'immersion.

De même, le tableau 2.3.1 présente les notations qui concernent le cas  $2^3$  (111, 112, 121, ...) et, partiellement, le cas  $3^3$  (111, 112, 113, 121, ...).

### 6° Notations alphabétiques

Un deuxième système de notations, qui fait intervenir des lettres, est utilisé assez couramment pour les expériences  $2^k$ . Son emploi se justifie surtout quand les facteurs étudiés sont du type « absence ou présence » de différentes substances ou de différents traitements, ainsi que dans l'optique des expériences factorielles fractionnaires (§ 2.3.3).

Si on considère par exemple trois facteurs consistant en l'adjonction ou non de trois additifs (peut-être trois acides aminés) à une même ration alimentaire de base, et si on note la présence des différents additifs respectivement par les lettres a, b et c, la seule lettre a désignerait l'objet correspondant à la ration de base plus le premier additif, la notation ab correspondrait à la ration de base plus le premier et le deuxième additif, etc. Conventionnellement aussi, le symbole (1) serait alors utilisé pour désigner l'absence de tout additif.

Les différents symboles relatifs au cas  $2^3$  et leurs correspondances avec les notations numériques sont mentionnés dans la partie gauche du tableau 2.3.1.

En dehors de tels cas de type « absence-présence », les lettres a, b, c, ... sont généralement affectées indifféremment à l'une ou l'autre modalité des facteurs qualitatifs et au niveau supérieur des facteurs quantitatifs.

### 7° Autres notations

D'autres systèmes particuliers sont également utilisés dans certains cas. Ainsi, dans une expérience  $3^3$  de fumure azotée, phosphorique et potassique, où les niveaux de chacun des trois facteurs sont un témoin (0) et deux doses différentes d'engrais (1 et 2), les 27 objets peuvent être désignés par les expressions :

$N_0P_0K_0, N_0P_0K_1, N_0P_0K_2, N_0P_1K_0, N_0P_1K_1, N_0P_1K_2, N_0P_2K_0, N_0P_2K_1, N_0P_2K_2,$   
 $N_1P_0K_0, N_1P_0K_1, N_1P_0K_2, N_1P_1K_0, N_1P_1K_1, N_1P_1K_2, N_1P_2K_0, N_1P_2K_1, N_1P_2K_2,$   
 $N_2P_0K_0, N_2P_0K_1, N_2P_0K_2, N_2P_1K_0, N_2P_1K_1, N_2P_1K_2, N_2P_2K_0, N_2P_2K_1, N_2P_2K_2.$

### ⊖ 8° Répétition unique

Les expériences factorielles complètes peuvent être réalisées avec plusieurs répétitions ou avec *une seule répétition* de chacun des objets, à laquelle correspond aussi l'appellation *répétition simple* ou *unique*<sup>22 23</sup>. Dans ce dernier cas, les expériences factorielles ne permettent pas d'obtenir des estimations simples de la variance résiduelle, qui sont cependant nécessaires à l'exécution d'éventuels tests d'hypothèses et à la détermination de limites de confiance.

Dans le cas  $2^k$ , on tente parfois de remédier à cette situation en introduisant un point expérimental supplémentaire, situé au centre du réseau factoriel et faisant l'objet d'un petit nombre de répétitions. Pour la partie gauche de la figure 2.3.3, il pourrait s'agir d'un point  $(0, 0, 0)$  situé au centre du cube et répété trois ou quatre fois.

Il faut être conscient du fait qu'on n'affecte ainsi qu'un très petit nombre de degrés de liberté à l'estimation de la variance résiduelle, ce qui limite considérablement la puissance des tests d'hypothèses et la qualité des déterminations de limites de confiance [DAGNELIE, 2000].

### ⊖ 9° Matrice d'expérience

Les ensembles de valeurs  $-1$  et  $+1$ , ou  $-1, 0$  et  $+1$  qui apparaissent dans le tableau 2.3.1 sont souvent considérés comme constituant des matrices et sont alors appelés *matrices d'expérience*<sup>24</sup>. Ces matrices sont fréquemment désignées par le symbole  $\Xi$  (ksi majuscule).

L'ensemble suivant est un autre exemple de matrice d'expérience :

$$\Xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & +1 \\ 0 & -1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice correspond à la partie gauche de la figure 2.3.1 (cas « un facteur à la fois »), les niveaux des deux facteurs étant codés en  $-1, 0$  et  $+1$ .

### ⊖ 10° Orthogonalité

Un ensemble d'objets est dit *orthogonal* et une expérience est dite *orthogonale*<sup>25</sup> quand les sommes des produits des termes de tous les couples de colonnes de la matrice sont nulles.

<sup>22</sup> En anglais : *single replication*.

<sup>23</sup> L'utilisation du mot « répétition » pour une « répétition unique » est évidemment impropre, mais est cependant assez courante.

<sup>24</sup> En anglais : *experiment matrix*.

<sup>25</sup> En anglais : *orthogonal design*.

On peut vérifier que tel est bien le cas pour les deux exemples du tableau 2.3.1, mais que, par contre, il n'en est pas ainsi en ce qui concerne la matrice que nous venons de présenter, la somme des produits étant égale à  $-1$ . D'une manière plus générale d'ailleurs, on peut facilement montrer que les structures factorielles complètes sont toutes orthogonales.

La condition d'*orthogonalité*<sup>26</sup> d'un ensemble d'objets ou d'une expérience implique notamment que le produit  $\Xi' \Xi$  est une matrice diagonale,  $\Xi'$  étant la transposée de  $\Xi$ . De ce fait, cette condition simplifie considérablement l'analyse des résultats, dans la mesure où elle permet d'identifier sans problème les contributions des différents facteurs et éventuellement leurs différentes interactions, par analyse de la variance ou par régression multiple.

### ⊖ 2.3.3 Les expériences factorielles fractionnaires

#### 1° Principe

Comme nous l'avons signalé au paragraphe 2.3.1.3°, les expériences factorielles fractionnaires ou incomplètes sont en quelque sorte un intermédiaire entre les expériences de type « un facteur à la fois » (§ 2.3.1.2°) et les expériences factorielles complètes (§ 2.3.2). Elles ont pour principe de recourir à des sous-ensembles d'objets (ou de points expérimentaux) des expériences factorielles complètes, choisis en général de telle façon qu'il soit possible d'estimer l'effet individuel de chacun des facteurs et, éventuellement, leurs interactions d'ordre inférieur (interactions des facteurs deux à deux par exemple).

Les sous-ensembles ou les fractions qui sont étudiés sont parfois appelés également *répétitions fractionnaires* ou *incomplètes* ou *partielles*<sup>27</sup>.

Ce type d'expérience est utilisé principalement dans le domaine industriel, où de nombreux facteurs sont souvent considérés simultanément.

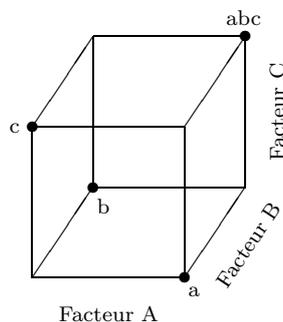
#### 2° Cas 2<sup>3</sup>

Envisageons pour commencer le cas d'une expérience à trois facteurs de type 2<sup>3</sup>, pour laquelle on ne disposerait que de quatre observations, relatives aux objets a, b, c et abc, les objets qui ne sont pas pris en considération étant (1), ab, ac et bc (selon les notations du paragraphe 2.3.2.6°). La figure 2.3.4 montre que les objets étudiés se trouvent, les uns par rapport aux autres, en diagonale sur les différentes faces du cube délimitant le domaine expérimental.

On peut démontrer qu'il n'est pas possible dans ce cas d'identifier exactement, d'une manière générale, les différents facteurs, ni leurs interactions. Le facteur A est en effet confondu avec l'interaction BC, les deux éléments ne pouvant pas être

<sup>26</sup> En anglais : *orthogonality*.

<sup>27</sup> En anglais : *fractional replication*.



**Figure 2.3.4.** Représentation graphique des objets pris en considération dans une expérience factorielle fractionnaire  $2^3$ .

dissociés, et il en est de même pour le facteur B et l'interaction AC, et pour le facteur C et l'interaction AB.

On dira que l'interaction BC est un *alias*<sup>28</sup> du facteur A, ou que A et BC sont deux alias, ou sont *aliasés*<sup>29</sup>. De même, l'interaction AC est un alias du facteur B, et l'interaction AB un alias du facteur C.

### 3° Démonstration

La démonstration de ces propriétés peut être faite en partant du modèle d'analyse de la variance à trois critères de classification [STAT2, § 11.2.3] :

$$X_{ijkl} = m_{...} + a_i + b_j + c_k + (ab)_{ij} + (ac)_{ik} + (bc)_{jk} + (abc)_{ijk} + D_{ijkl},$$

dans lequel  $X_{ijkl}$  désigne les variables aléatoires associées aux différentes valeurs observées  $x_{ijkl}$ ,  $m_{...}$  est une moyenne théorique générale,  $a_i$ ,  $b_j$  et  $c_k$  sont les effets principaux des trois facteurs,  $(ab)_{ij}$ ,  $(ac)_{ik}$  et  $(bc)_{jk}$  sont les termes d'interaction de deux facteurs,  $(abc)_{ijk}$  est l'interaction des trois facteurs, et  $D_{ijkl}$  désigne les variables aléatoires résiduelles relatives aux différentes observations.

Dans cette optique, nous considérons plus particulièrement la différence :

$$(x_a + x_{abc})/2 - (x_b + x_c)/2,$$

c'est-à-dire la différence entre la moyenne des observations relatives aux deux objets qui concernent la deuxième modalité du facteur A (objets a et abc : partie droite de la figure 2.3.4) et la moyenne des observations relatives aux deux objets qui concernent la première modalité du facteur A (objets b et c : partie gauche de la figure 2.3.4).

<sup>28</sup> En anglais : *alias*.

<sup>29</sup> En anglais : *aliased*.

Intuitivement, on peut penser que cette différence, qui s'apparente à la différence de moyennes :

$$\bar{x}_{2\dots} - \bar{x}_{1\dots},$$

au sens de l'analyse de la variance [STAT2, § 11.2.2], est une mesure de l'influence du seul facteur A. Mais en fait, il n'en est pas ainsi.

En appliquant le modèle d'analyse de la variance, on peut noter que les observations  $x_a$ ,  $x_b$ ,  $x_c$  et  $x_{abc}$  correspondent respectivement aux expressions :

$$m_{\dots} + a_2 + b_1 + c_1 + (ab)_{21} + (ac)_{21} + (bc)_{11} + (abc)_{211} + D_{211},$$

$$m_{\dots} + a_1 + b_2 + c_1 + (ab)_{12} + (ac)_{11} + (bc)_{21} + (abc)_{121} + D_{121},$$

$$m_{\dots} + a_1 + b_1 + c_2 + (ab)_{11} + (ac)_{12} + (bc)_{12} + (abc)_{112} + D_{112},$$

et 
$$m_{\dots} + a_2 + b_2 + c_2 + (ab)_{22} + (ac)_{22} + (bc)_{22} + (abc)_{222} + D_{222},$$

le quatrième indice des termes  $D_{ijkl}$  étant supprimé, puisqu'on ne dispose que d'une observation pour chacun des quatre objets.

On peut tenir compte en outre du fait que les sommes suivantes, relatives aux effets principaux et aux termes d'interaction des différents facteurs, sont toutes nulles par définition [STAT2, § 10.3.2] :

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2 = 0,$$

$$(ab)_{11} + (ab)_{12} = (ab)_{11} + (ab)_{21} = (ab)_{12} + (ab)_{22} = (ab)_{21} + (ab)_{22} = 0,$$

$$(abc)_{111} + (abc)_{112} = (abc)_{111} + (abc)_{121} = (abc)_{111} + (abc)_{211} = \dots = 0,$$

la deuxième ligne, relative à l'interaction AB, pouvant être transposée aussi aux cas des interactions AC et BC.

En négligeant enfin les termes aléatoires  $D_{ijk}$ , qui sont de moyennes nulles, on obtient le résultat :

$$(x_a + x_{abc})/2 - (x_b + x_c)/2 = 2a_2 + 2(bc)_{22}.$$

Il apparaît donc bien que l'effet principal  $a_2$  du premier facteur et l'effet d'interaction  $(bc)_{22}$  des deux autres facteurs sont indissociables.

On peut évidemment établir de la même manière des résultats équivalents pour  $b_2$  et  $(ac)_{22}$ , et pour  $c_2$  et  $(ab)_{22}$ . Les trois effets principaux  $a_2$ ,  $b_2$  et  $c_2$  ne peuvent donc être estimés valablement que si les trois interactions de deux facteurs sont nulles, ce qui correspond à l'idée d'un modèle additif [STAT2, § 11.2.4] ou, individuellement pour chacun des facteurs, si dans chaque cas, l'interaction alias du facteur envisagé est nulle. On obtient alors :

$$\hat{a}_2 = (x_a - x_b - x_c + x_{abc})/4, \quad \hat{b}_2 = (-x_a + x_b - x_c + x_{abc})/4,$$

et 
$$\hat{c}_2 = (-x_a - x_b + x_c + x_{abc})/4.$$

On notera aussi que des résultats strictement identiques peuvent être obtenus en partant des objets (1), ab, ac et ad, au lieu de a, b, c et abc.

Quant à l'interaction des trois facteurs, elle n'apparaît nulle part et nécessiterait, pour pouvoir être estimée, de disposer de l'ensemble des huit objets, c'est-à-dire de l'expérience factorielle complète.

#### 4° Cas $2^4$

Des résultats tout à fait comparables peuvent être établis pour les autres expériences de la série  $2^k$ .

Pour quatre facteurs, on peut prendre en considération soit les huit objets suivants :

$$a, b, c, d, abc, abd, acd, bcd,$$

soit l'ensemble complémentaire :

$$(1), ab, ac, ad, bc, bd, cd, abcd.$$

Dans un cas comme dans l'autre, on peut démontrer que les effets principaux des quatre facteurs se confondent avec les interactions de trois facteurs, et que les interactions de deux facteurs se confondent entre elles deux à deux. Plus concrètement, si on lie les alias par le symbole  $\leftrightarrow$ , on a :

$$A \leftrightarrow BCD, \quad B \leftrightarrow ACD, \quad C \leftrightarrow ABD, \quad D \leftrightarrow ABC,$$

et

$$AB \leftrightarrow CD, \quad AC \leftrightarrow BD, \quad AD \leftrightarrow BC.$$

Les effets principaux peuvent donc être estimés si on suppose que les interactions de trois facteurs sont nulles, et les interactions de deux facteurs (interactions simples) ne peuvent pas être estimées individuellement.

#### 5° Cas $2^5$

De la même manière, pour cinq facteurs, on peut prendre en considération les 16 objets :

$$a, b, c, d, e, abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde, abcde,$$

ou l'ensemble complémentaire :

$$(1), ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de, abcd, abce, abde, acde, bcde.$$

Dans les deux cas, les effets principaux des cinq facteurs sont confondus avec les interactions de quatre facteurs, et les dix interactions de deux facteurs sont

confondues avec les interactions de trois facteurs :

$$\begin{aligned} & A \leftrightarrow BCDE, \quad B \leftrightarrow ACDE, \quad C \leftrightarrow ABDE, \quad D \leftrightarrow ABCE, \quad E \leftrightarrow ABCD, \\ \text{et} \quad & AB \leftrightarrow CDE, \quad AC \leftrightarrow BDE, \quad AD \leftrightarrow BCE, \quad AE \leftrightarrow BCD, \quad BC \leftrightarrow ADE, \\ & BD \leftrightarrow ACE, \quad BE \leftrightarrow ACD, \quad CD \leftrightarrow ABE, \quad CE \leftrightarrow ABD, \quad DE \leftrightarrow ABC. \end{aligned}$$

On peut donc estimer les effets principaux en supposant que les interactions de quatre facteurs sont nulles, et les interactions de deux facteurs en supposant que les interactions de trois facteurs sont nulles.

On remarquera en outre que, dans les différents exemples envisagés, les objets qui constituent les différents sous-ensembles sont toujours tous définis soit par un nombre impair de lettres, soit par un nombre pair de lettres, y compris l'objet (1).

### 6° Autres cas : $2^k$ et $3^k$

Les sous-ensembles d'objets que nous avons examinés jusqu'à présent sont tous des *moitiés* ou des *demi-répétitions*<sup>30</sup> d'expériences factorielles complètes. Mais on peut aussi envisager des quarts, des huitièmes, . . . de répétitions. Les huit objets suivants constituent par exemple le quart d'une expérience factorielle complète  $2^5$  :

$$a, b, ce, de, acd, bcd, abce, abde.$$

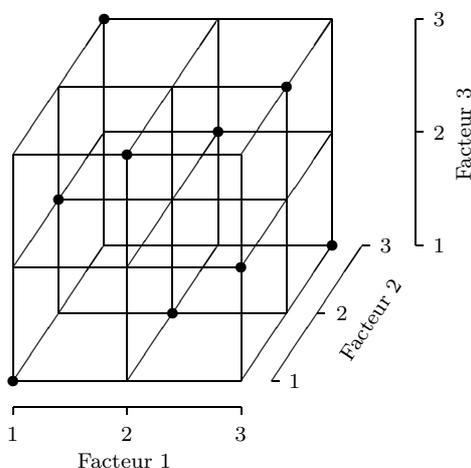
D'une façon générale, on parle d'un ensemble  $2^{k-h}$  à propos de la fraction  $1/2^h$  d'une expérience factorielle complète  $2^k$ . Les quatre exemples que nous avons considérés jusqu'à présent sont respectivement des expériences  $2^{3-1}$  (4 objets),  $2^{4-1}$  (8 objets),  $2^{5-1}$  (16 objets) et  $2^{5-2}$  (8 objets).

D'autre part, on peut appliquer les mêmes principes aux expériences factorielles de la série  $3^k$ , en considérant des tiers, des neuvièmes, . . . d'expériences complètes, et aussi aux expériences factorielles mixtes du type  $2^k 3^{k'}$  notamment. Les neuf objets suivants constituent par exemple le tiers d'une expérience factorielle  $3^3$ , c'est-à-dire une expérience  $3^{3-1}$ , les notations utilisées étant celles du paragraphe 2.3.2.5° :

$$111, 122, 133, 213, 221, 232, 312, 323, 331.$$

La figure 2.3.5 illustre cette possibilité, en montrant que trois points expérimentaux sont ainsi choisis selon des dispositions différentes dans chacun des neuf plans horizontaux et verticaux. Horizontalement, il s'agit d'une diagonale dans le plan inférieur et de deux triangles isocèles orientés différemment dans les deux autres plans. Et il en est de même verticalement, de gauche à droite avec une diagonale dans le plan latéral gauche, et d'avant en arrière avec une diagonale dans le plan arrière.

<sup>30</sup> En anglais : *half fraction*, *half replication*.



**Figure 2.3.5.** Représentation graphique des objets pris en considération dans une expérience factorielle fractionnaire  $3^{3-1}$ .

Dans les deux cas qui viennent d'être considérés (expérience  $2^{5-2}$  en huit objets et expérience  $3^{3-1}$  en neuf objets), les différents facteurs principaux peuvent être estimés quand toutes les interactions sont nulles.

### 7° Résolution

Les expériences factorielles fractionnaires peuvent être utilement caractérisées par leur niveau de *résolution*<sup>31</sup>, qui est déterminé en fonction du mode de construction adopté, dont nous parlerons au paragraphe 10.1.5, et qui permet de savoir quels sont les éléments qui peuvent être estimés. En pratique, les niveaux de résolution les plus importants sont les niveaux III, IV et V.

Les expériences de résolution III permettent d'estimer tous les effets principaux, moyennant l'hypothèse que toutes les interactions sont nulles. Tel est le cas pour l'expérience  $2^{3-1}$  que nous avons examinée en détail ci-dessus, et aussi pour les expériences  $2^{5-2}$  et  $3^{3-1}$  que nous venons d'évoquer.

Les expériences de résolution IV permettent d'estimer tous les effets principaux, moyennant l'hypothèse, moins restrictive, que toutes les interactions de trois facteurs ou plus sont nulles. Les interactions de deux facteurs ne peuvent pas être estimées individuellement, mais elles ne sont pas supposées nulles. L'expérience  $2^{4-1}$  que nous avons introduite en deuxième lieu en est un exemple.

Enfin, les expériences de résolution V permettent d'estimer tous les effets principaux et toutes les interactions de deux facteurs, moyennant l'hypothèse que toutes

<sup>31</sup> En anglais : *resolution*.

les interactions de trois facteurs ou plus sont nulles. Tel est le cas de l'expérience  $2^{5-1}$  que nous avons également présentée.

Un principe général très simple consiste à considérer que, si on désigne par I les effets principaux, par II les interactions de deux facteurs, par III les interactions de trois facteurs, etc., les expériences de résolution III confondent les effets I et II ( $\text{III} = \text{I} + \text{II}$ ), les expériences de résolution IV confondent les effets I et III d'une part et les effets II entre eux d'autre part ( $\text{IV} = \text{I} + \text{III}$  et  $\text{IV} = \text{II} + \text{II}$ ), etc.

À titre d'indication, le tableau 2.3.2 donne les nombres minimums d'objets qui doivent être pris en considération dans les expériences  $2^k$ , en vue d'obtenir des résolutions III, IV et V, pour des nombres de facteurs allant de 3 à 10, selon RAGHAVARAO [1971].

**Tableau 2.3.2.** Nombres totaux d'objets et nombres minimums d'objets à prendre en considération en vue d'obtenir des résolutions III, IV et V dans les expériences  $2^k$ , pour différents nombres de facteurs ( $k$ ).

| Nb. de facteurs | Nb. tot. d'objets | Nb. min. pour |    |     |
|-----------------|-------------------|---------------|----|-----|
|                 |                   | III           | IV | V   |
| 3               | 8                 | 4             | 8  | 8   |
| 4               | 16                | 8             | 8  | 16  |
| 5               | 32                | 8             | 16 | 16  |
| 6               | 64                | 8             | 16 | 32  |
| 7               | 128               | 8             | 16 | 64  |
| 8               | 256               | 16            | 16 | 64  |
| 9               | 512               | 16            | 32 | 128 |
| 10              | 1.024             | 16            | 32 | 128 |

### 8° Plans saturés et sursaturés, plans de PLACKETT et BURMAN

Le premier plan d'expérience factorielle fractionnaire que nous avons envisagé (fraction  $1/2$  d'une expérience  $2^3$ ) peut être qualifié de *saturé*<sup>32</sup>, en raison du fait que le nombre d'éléments qu'il permet d'estimer correspond exactement au nombre de degrés de liberté qui lui est associé. Avec quatre objets, et donc quatre observations, et aussi trois degrés de liberté, ce plan permet en effet d'estimer trois éléments, à savoir les effets principaux des trois facteurs.

D'une manière plus générale, il en est de même pour une série d'autres plans de résolution III qui permettent d'estimer les effets principaux de  $k$  facteurs à partir de  $k + 1$  objets, quand  $k + 1$  est un multiple de 4 (effets de sept facteurs estimés à partir de huit objets et donc huit observations, effets de 11 facteurs estimés à partir de 12 objets et donc 12 observations, etc.). Ces schémas d'expériences sont

<sup>32</sup> En anglais : *saturated design*.

connus sous le nom de *plans de PLACKETT et BURMAN*<sup>33</sup> [1946]. La notion de *matrice d'HADAMARD*<sup>34</sup> leur est souvent associée.

Il faut noter toutefois que ces plans présentent le double inconvénient de ne fournir aucune information, d'une part, quant aux interactions qui peuvent exister entre les facteurs, et d'autre part, quant à l'ordre de grandeur des variations résiduelles.

On peut remarquer que le plan  $2^{5-1}$  présenté ci-dessus et de résolution V est aussi saturé, puisqu'avec 16 objets et donc 15 degrés de liberté, il permet d'estimer les cinq facteurs et les dix interactions de deux facteurs.

En outre, des plans dits *sursaturés*<sup>35</sup> ont été proposés en vue d'étudier des nombres de facteurs supérieurs aux nombres d'objets (ou aux nombres d'objets diminués d'une unité). Des facteurs doivent alors être aliasés entre eux.

Ces divers plans correspondent à l'objectif de criblage ou de « *screening* » dont il a été question au paragraphe 1.2.2.4°.

### 9° Compléments

Nous donnerons ultérieurement un exemple concret d'expérience factorielle fractionnaire (§ 5.5.5), ainsi que quelques indications quant aux principes de construction des ensembles factoriels fractionnaires, en relation avec la notion de confusion d'effets (§ 10.1.5).

D'autres informations peuvent être trouvées dans certains des ouvrages qui ont été cités dans l'introduction générale [KUEHL, 2000; MONTGOMERY, 2008], dans certains livres spécialisés [COLLOMBIER, 1996; DEY et MUKERJEE, 1999; MCLEAN et ANDERSON, 1984], dans divers articles relativement généraux [CHEN *et al.*, 1993; PRVAN et STREET, 2002], et dans des articles plus particuliers tels que ceux d'EDWARDS et MEE [2011], KOUKOUVINOS *et al.* [2011], et WANG [2007]<sup>36</sup>.

Nous ajoutons encore que des sous-ensembles d'objets d'expériences factorielles sont parfois pris en considération sans qu'ils constituent des ensembles fractionnaires au sens où nous les avons définis ci-dessus et sans qu'ils possèdent les propriétés de tels ensembles. Il en est ainsi par exemple, en matière agronomique, pour les expériences de comparaison de fumures qui sont qualifiées de *soustractives*.

Ces expériences sont généralement constituées d'un témoin, d'une fumure complète et d'une série de fumures dont seul un élément est chaque fois exclu. Pour l'azote, le phosphore et le potassium, par exemple, les objets considérés sont un

<sup>33</sup> En anglais : PLACKETT-BURMAN's design.

<sup>34</sup> En anglais : HADAMARD's matrix.

<sup>35</sup> En anglais : supersaturated design.

<sup>36</sup> Sans vouloir en aucune façon présenter une bibliographie exhaustive des différents sujets abordés, nous ajoutons fréquemment, aux références générales, quelques références relatives à certains points particuliers.

témoin et les quatre fumures NP, NK, PK et NPK, ou encore, en utilisant les notations des paragraphes 2.3.2.5° et 2.3.2.6°, les objets :

$$111, 221, 212, 122, 222 \quad \text{ou} \quad (1), np, nk, pk, npk.$$

### 10° Approche TAGUCHI

Les *plans de TAGUCHI*<sup>37</sup> se situent en marge des schémas factoriels fractionnaires classiques, dont ils sont largement inspirés. Ces plans ont connu un essor important à la fin du vingtième siècle, mais ils ont aussi été l'objet de nombreuses controverses [BISGAARD, 1996; NAIR, 1992; TAGUCHI, 1987; VINING et MYERS, 1990].

Ces plans ont été conçus et appliqués essentiellement en relation avec les problèmes de contrôle ou de maîtrise de la qualité, et sont entourés de diverses considérations qui conduisent à parler souvent d'une *approche* ou d'une *méthode* de TAGUCHI, plutôt que des *plans* de TAGUCHI [ALEXIS et ALEXIS, 2000; MATHIEU et PHAN-TAN-LUU, 1997b; PILLET, 1997].

## 2.4 Les autres expériences à deux ou plusieurs facteurs

### ⊖ 2.4.1 L'étude des surfaces de réponse

#### 1° Principe

Pour  $k$  facteurs quantitatifs, susceptibles d'être considérés comme  $k$  variables explicatives  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , on appelle *surface de réponse*<sup>38</sup> la surface qui correspond à l'équation :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

mettant en relation la réponse observée à l'issue de l'expérience  $y$  (rendement par exemple) et les variables explicatives  $x_1, x_2, \dots, x_k$  (doses d'engrais par exemple).

De telles surfaces peuvent être des plans ou des hyperplans, dans le cas d'équations du premier degré, du type :

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k,$$

ou des surfaces quadratiques (paraboloïdes, etc.), dans le cas d'équations du deuxième degré, telles que, pour deux facteurs :

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1^2 + b_4 x_2^2 + b_5 x_1 x_2.$$

<sup>37</sup> En anglais : TAGUCHI's design.

<sup>38</sup> En anglais : response surface.

D'autres types d'équations, qui font intervenir par exemple les variables  $x_1, \dots, x_k$  et leurs racines carrées  $\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_k}$ , ou qui sont exprimées en termes de logarithmes, sont aussi utilisés dans certains cas.

### 2° Expériences factorielles

Les expériences factorielles complètes et fractionnaires de la série  $2^k$ , dont nous avons parlé au cours des paragraphes 2.3.2 et 2.3.3, permettent d'estimer facilement des surfaces de réponse du premier degré, par un processus de régression multiple [STAT2, § 16.2 et 16.3; DAGNELIE, 1986, chap. 4]. De même, les expériences factorielles complètes ou fractionnaires de la série  $3^k$  permettent d'estimer des surfaces de réponse du deuxième degré.

Dans le cas  $2^k$ , l'adjonction d'observations supplémentaires situées au centre du schéma factoriel, à laquelle nous avons fait allusion au paragraphe 2.3.2.8°, offre aussi la possibilité de vérifier l'éventuelle linéarité ou non-linéarité de la relation entre les facteurs et la variable observée. Le paragraphe 5.5.2 en donne un exemple.

### 3° Plans composites centrés : deux et trois facteurs

D'autres structures plus particulières ont été proposées en vue d'estimer avec un maximum de précision des surfaces de réponse quadratiques et, par leur intermédiaire, des conditions optimales de production ou de transformation par exemple.

Les *plans composites centrés*<sup>39</sup> de BOX et WILSON [1951] ont pour principe d'associer chaque fois un schéma de type « un facteur à la fois », dans sa version en étoile ou radiale (§ 2.3.1.2°), et un schéma factoriel de la série  $2^k$  (§ 2.3.2.3°). La figure 2.4.1 en donne une représentation graphique dans le cas de deux et de trois facteurs, pour des valeurs des variables  $x_1, x_2$  et  $x_3$  codées en  $-1$  et  $+1$  en ce qui concerne la partie factorielle du dispositif.

Pour deux facteurs, autour du point central  $(0, 0)$ , les coordonnées des quatre points factoriels sont :

$$(-1, -1), (-1, +1), (+1, -1), (+1, +1);$$

et les coordonnées des quatre points radiaux sont :

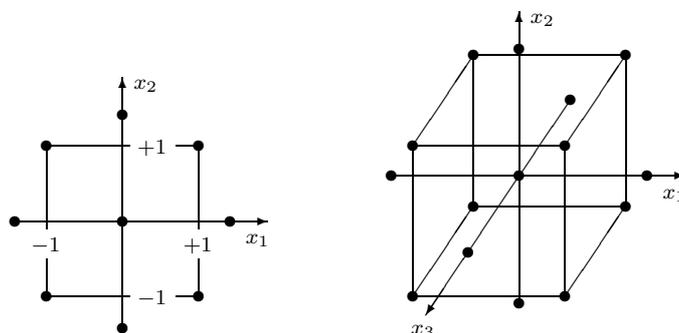
$$(-\sqrt{2}, 0), (+\sqrt{2}, 0), (0, -\sqrt{2}), (0, +\sqrt{2}).$$

Les huit points périphériques sont tous équidistants du point central et sont les sommets d'un octogone régulier de rayon  $\sqrt{2}$ .

Dans le cas de trois facteurs, autour du point central  $(0, 0, 0)$ , les coordonnées des huit points factoriels sont :

$$\begin{aligned} &(-1, -1, -1), (-1, -1, +1), (-1, +1, -1), (-1, +1, +1), \\ &(+1, -1, -1), (+1, -1, +1), (+1, +1, -1), (+1, +1, +1); \end{aligned}$$

<sup>39</sup> En anglais : *central composite design*.



**Figure 2.4.1.** Représentation graphique des points expérimentaux des plans composites centrés relatifs à deux et à trois facteurs.

et les coordonnées des six points radiaux sont :

$$\begin{aligned} &(-1,682, 0, 0), (0, -1,682, 0), (0, 0, -1,682), \\ &(+1,682, 0, 0), (0, +1,682, 0), (0, 0, +1,682). \end{aligned}$$

Les 14 points périphériques, qui ne sont pas strictement équidistants du point central, sont les sommets d'un polyèdre constitué de 24 faces triangulaires.

#### 4° Plans composites centrés : $k$ facteurs, isovariance

D'une manière générale, pour  $k$  facteurs, les plans composites centrés sont constitués d'un point central situé à l'origine, de  $2k$  points radiaux situés à une même distance  $\Delta x$  de l'origine, et de  $2^k$  points factoriels situés à une distance  $\sqrt{k}$  de l'origine, soit un total de  $1 + 2k + 2^k$  points expérimentaux.

La distance  $\Delta x$  est généralement fixée à  $\sqrt[4]{2^k}$ , ce qui donne  $\sqrt{2}$  dans le cas de deux facteurs et  $\sqrt[4]{8}$  ou 1,682 dans le cas de trois facteurs. Le choix de cette valeur a pour but d'assurer la propriété dite d'*isovariance par rotation* ou de *rotatabilité*<sup>40</sup>. Cette propriété consiste à avoir une même précision dans l'estimation de la variable dépendante  $y$ , à l'aide de l'équation de la surface de réponse, en tous les points situés à une même distance de l'origine, quelle que soit la direction.

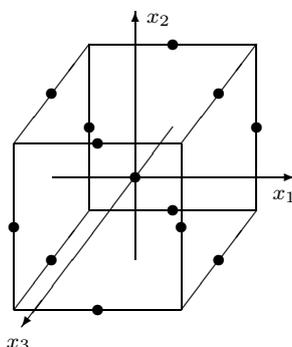
Le plus souvent, le point central  $(0, 0, \dots, 0)$  est répété un certain nombre de fois, dans le but notamment de disposer d'une estimation de la variation résiduelle, alors que les autres points expérimentaux ne sont pas l'objet de répétitions. En outre, pour des nombres importants de facteurs, on peut envisager de remplacer la partie factorielle complète des plans composites par des ensembles factoriels fractionnaires. La distance  $\Delta x$  doit éventuellement être adaptée en conséquence, en vue de maintenir la propriété d'isovariance.

<sup>40</sup> En anglais : *rotatability*.

Par comparaison avec les expériences factorielles complètes  $3^k$ , les plans composites ont l'avantage de nécessiter moins de points expérimentaux (par exemple 15 points au lieu de 27, dans le cas de trois facteurs). Mais il faut noter qu'ils présentent cependant l'inconvénient de toujours exiger cinq niveaux différents pour chacun des facteurs ( $-\Delta x$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $+1$  et  $+\Delta x$ ), au lieu de trois dans le cas des expériences factorielles ( $-1$ ,  $0$  et  $+1$ ), ce qui peut parfois constituer un sérieux handicap.

### 5° Plans de BOX et BEHNKEN

Les *plans de BOX et BEHNKEN*<sup>41</sup> [1960] permettent de remédier à l'inconvénient qui vient d'être signalé, en revenant à trois niveaux pour chacun des facteurs. La figure 2.4.2 présente le cas de trois facteurs.



**Figure 2.4.2.** Représentation graphique des points expérimentaux du plan de BOX et BEHNKEN à trois facteurs.

On constate qu'outre le point central de coordonnées  $(0, 0, 0)$ , le dispositif de BOX et BEHNKEN est constitué dans ce cas de 12 points, qui se situent au milieu des 12 arêtes du cube délimitant le domaine expérimental. On peut aussi remarquer que ces 12 points forment en fait trois ensembles factoriels  $2^2$ , relatifs aux trois couples de facteurs, chaque fois au niveau intermédiaire du facteur qui n'intervient pas dans l'ensemble factoriel  $2^2$  considéré. Il s'agit des groupes de points suivants, respectivement pour  $x_1$  et  $x_2$ , pour  $x_1$  et  $x_3$ , et pour  $x_2$  et  $x_3$  :

$$\begin{aligned} &(-1, -1, 0), \quad (-1, +1, 0), \quad (+1, -1, 0), \quad (+1, +1, 0), \\ &(-1, 0, -1), \quad (-1, 0, +1), \quad (+1, 0, -1), \quad (+1, 0, +1), \\ \text{et} \quad &(0, -1, -1), \quad (0, -1, +1), \quad (0, +1, -1), \quad (0, +1, +1). \end{aligned}$$

<sup>41</sup> En anglais : BOX-BEHNKENS's design.

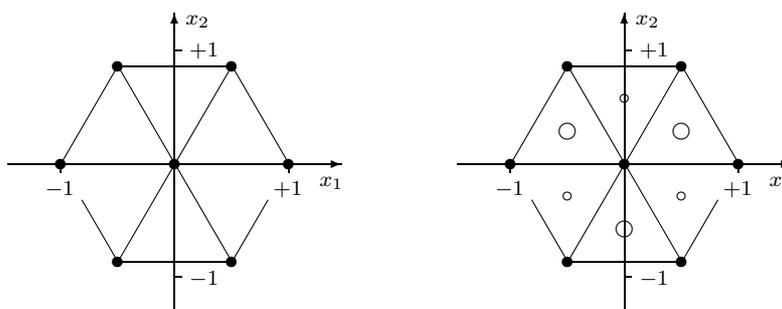
Tous les points extérieurs se trouvent ici à une même distance  $\sqrt{2}$  du point central et constituent un polyèdre à 14 faces (huit faces triangulaires et six faces carrées), parfois appelé cuboctaèdre. En outre, comme dans le cas des plans composites, le point central est en général l'objet de plusieurs répétitions.

Ce type de plan peut être généralisé à un nombre quelconque de facteurs. Pour quatre facteurs par exemple, il s'agit de 25 points expérimentaux dont les coordonnées sont toutes, en dehors du point central, constituées de deux valeurs nulles et deux valeurs égales à  $-1$  ou  $+1$  :

$$(-1, -1, 0, 0), \quad (-1, +1, 0, 0), \quad (+1, -1, 0, 0), \quad (+1, +1, 0, 0), \quad \dots$$

### 6° Plans de DOEHLERT

Les *plans de DOEHLERT* <sup>42</sup> [1970] sont basés sur un maillage triangulaire, et non plus carré ou rectangulaire. La figure 2.4.3 en donne deux illustrations, relatives aux cas de deux et de trois facteurs.



**Figure 2.4.3.** Représentation graphique des points expérimentaux des plans de DOEHLERT à deux et à trois facteurs (vue en plan).

Pour deux facteurs, il s'agit d'un point central, éventuellement répété, et des six sommets d'un hexagone régulier de rayon 1. Cette disposition implique la prise en considération de cinq niveaux pour le premier facteur et de trois niveaux seulement pour le deuxième facteur, les différents niveaux étant équidistants dans un cas comme dans l'autre.

Quant au cas de trois facteurs, nous n'en donnons qu'une vue en plan. Les sept points noirs, disposés de la même manière que pour deux facteurs, se trouvent dans le plan  $(x_1, x_2)$ , c'est-à-dire au niveau  $x_3 = 0$ . Les trois petits points blancs sont situés en dessous (ou en arrière) du plan  $(x_1, x_2)$ , à un niveau  $x_3 = -0,816$  et au centre de trois des six triangles du plan  $(x_1, x_2)$ . Enfin, les trois grands

<sup>42</sup> En anglais : DOEHLERT's design.

points blancs sont situés au-dessus (ou en avant) du plan  $(x_1, x_2)$ , à un niveau  $x_3 = +0,816$  et au centre des trois autres triangles du plan  $(x_1, x_2)$ .

La disposition de ces différents points peut être visualisée très simplement dans l'espace, en considérant que les sept points initiaux sont les centres de sept billes contiguës de diamètre unitaire, que les trois grands points blancs sont les centres de trois billes de même diamètre posées sur les sept premières, et que les trois petits points blancs sont les centres de trois billes disposées de la même façon en dessous des sept premières.

Les coordonnées des sept points expérimentaux relatifs à deux facteurs sont présentées dans la partie supérieure gauche du tableau 2.4.1, et les coordonnées des 13 points relatifs à trois facteurs constituent l'ensemble de ce tableau. Le contenu de ce tableau, comme la figure 2.4.3 et la présentation sous la forme de billes de même diamètre, montre bien que tous les points voisins se trouvent à une distance unitaire les uns des autres, pour deux comme pour trois facteurs.

**Tableau 2.4.1.** Coordonnées des points expérimentaux des plans de DOEHLERT à deux et à trois facteurs<sup>43</sup>.

| $x_1$ | $x_2$  | $x_3$  |
|-------|--------|--------|
| 0     | 0      | 0      |
| -1    | 0      | 0      |
| -0,5  | -0,866 | 0      |
| -0,5  | 0,866  | 0      |
| 0,5   | -0,866 | 0      |
| 0,5   | 0,866  | 0      |
| 1     | 0      | 0      |
| -0,5  | -0,289 | -0,816 |
| 0     | 0,577  | -0,816 |
| 0,5   | -0,289 | -0,816 |
| -0,5  | 0,289  | 0,816  |
| 0     | -0,577 | 0,816  |
| 0,5   | 0,289  | 0,816  |

Le tableau 2.4.1, de même que la présentation faite ci-dessus, montre aussi que le dispositif de DOEHLERT à trois facteurs nécessite cinq niveaux pour le premier facteur, sept niveaux pour le deuxième facteur et trois niveaux pour le troisième facteur.

En outre, un examen attentif de la figure 2.4.3 permet d'établir que les plans de BOX et BEHNKEN et de DOEHLERT à trois facteurs sont très semblables l'un à l'autre. Ils constituent dans les deux cas un polyèdre à 14 faces (huit faces triangulaires et six faces carrées) et ils ne diffèrent que par leurs orientations

<sup>43</sup> Les différentes coordonnées autres que 0,  $\pm 0,5$  et  $\pm 1$  correspondent aux valeurs suivantes :  $0,289 = \sqrt{3}/6$ ,  $0,577 = \sqrt{3}/3$  ou  $\sqrt{12}/6$ ,  $0,816 = \sqrt{2}/3$  ou  $\sqrt{24}/6$ , et  $0,866 = \sqrt{3}/2$  ou  $\sqrt{27}/6$ .

et leurs dimensions. On peut passer du plan de BOX et BEHNKEN au plan de DOEHLERT par une simple rotation, suivie d'une réduction de dimensions, les arêtes du polyèdre de BOX et BEHNKEN étant de longueur  $\sqrt{2}$  et les arêtes du polyèdre de DOEHLERT de longueur 1. On peut considérer aussi que le cuboctaèdre de BOX et BEHNKEN est en quelque sorte posé sur une de ses faces carrées, tandis que le cuboctaèdre de DOEHLERT est posé sur une de ses faces triangulaires.

### 7° Compléments

La documentation relative à l'étude des surfaces de réponse est particulièrement abondante. Elle comprend notamment divers livres spécialisés, dont ceux de BOX et DRAPER [2007], GOUPY [1999], et MYERS *et al.* [2009], et des articles généraux, dont ceux d'ANDERSON-COOK *et al.* [2009], MEAD et PIKE [1975], et MYERS [1999].

On y trouvera des informations complémentaires relatives non seulement aux plans que nous avons présentés, mais aussi à d'autres dispositifs tels que les *plans de HOKE*<sup>44</sup> [1974] et les *plans de ROQUEMORE*<sup>45</sup> [1976].

On peut mentionner en outre des références plus particulières telles que, par exemple, NGUYEN et BORKOWSKI [2008], et PARK et PARK [2010].

## ⊖ 2.4.2 L'étude des mélanges

### 1° Principe

L'étude des surfaces de réponse se présente de manière particulière dans le cas des *mélanges*<sup>46</sup> de différentes substances ou composantes, dont les quantités sont exprimées en termes de proportions, de somme constante.

Si on désigne les différentes proportions, qui constituent les variables ou les facteurs étudiés, par  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , et si on les exprime en pourcentages du total, la relation qui les lie est :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = 100.$$

On peut aussi aboutir à un total unitaire en considérant des proportions comprises entre 0 et 1.

### 2° Deux facteurs

Le cas de deux substances ou deux facteurs est présenté dans la figure 2.4.4. En fonction de la relation qui caractérise les deux variables, les points expérimentaux admissibles forment le segment de la droite d'équation :

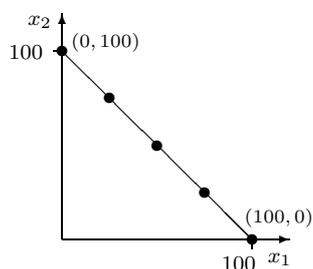
$$x_1 + x_2 = 100,$$

---

<sup>44</sup> En anglais : HOKE's design.

<sup>45</sup> En anglais : ROQUEMORE's design.

<sup>46</sup> En anglais : mixture.



**Figure 2.4.4.** Exemple de points expérimentaux dans le cas d'un mélange de deux substances.

compris entre les points de coordonnées  $(0, 100)$  et  $(100, 0)$ , c'est-à-dire pour les valeurs non négatives de  $x_1$  et  $x_2$ .

Comme le montre aussi la figure 2.4.4, on peut choisir par exemple cinq points équidistants sur le segment de droite en question. Ces points correspondent aux cinq mélanges ou objets suivants :

$$(0, 100), \quad (25, 75), \quad (50, 50), \quad (75, 25), \quad (100, 0).$$

Dans le cas particulier de deux substances, le problème est en fait unidimensionnel et conduit à l'obtention d'une courbe de réponse, et non pas d'une surface de réponse.

### 3° Trois facteurs

La figure 2.4.5 donne deux représentations graphiques différentes du cas de trois substances ou trois facteurs.

À trois dimensions, dans la partie gauche de cette figure, l'ensemble des points expérimentaux admissibles forme la partie du plan d'équation :

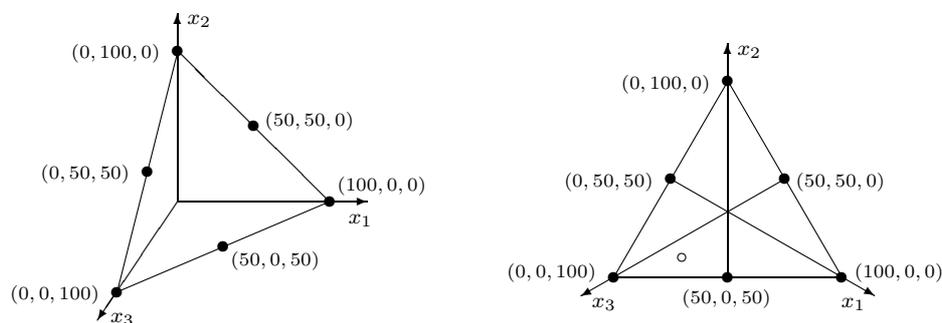
$$x_1 + x_2 + x_3 = 100,$$

qui est telle que les valeurs des trois variables sont non négatives. Il s'agit du triangle équilatéral de sommets :

$$(0, 0, 100), \quad (0, 100, 0), \quad (100, 0, 0).$$

Ce triangle peut également être représenté dans un espace à deux dimensions, comme le montre la partie droite de la même figure. Les axes de coordonnées se confondent alors avec les trois médiatrices du triangle, deux axes étant en fait suffisants pour localiser n'importe quel point.

Dans de tels diagrammes triangulaires, les coordonnées des points sont obtenues en projetant ceux-ci perpendiculairement sur les axes ou en mesurant les



**Figure 2.4.5.** Exemple de points expérimentaux dans le cas d'un mélange de trois substances (six objets).

distances qui séparent les points considérés des côtés du triangle. Ainsi, le point blanc qui apparaît dans la partie droite de la figure 2.4.5 est le point de coordonnées  $(25, 10, 65)$ . Projeté perpendiculairement sur l'axe  $x_1$ , il se situe à une distance 25 de l'origine de cet axe, la hauteur du triangle étant considérée comme égale à 100, et il s'agit bien aussi de la distance du point en question au côté gauche du triangle. Il en est de même pour l'axe  $x_2$  et le côté inférieur (la base) du triangle, avec une distance égale à 10, ainsi que pour l'axe  $x_3$  et le côté droit du triangle, avec une distance égale à 65, la somme des trois distances étant nécessairement égale à 100 en tout point.

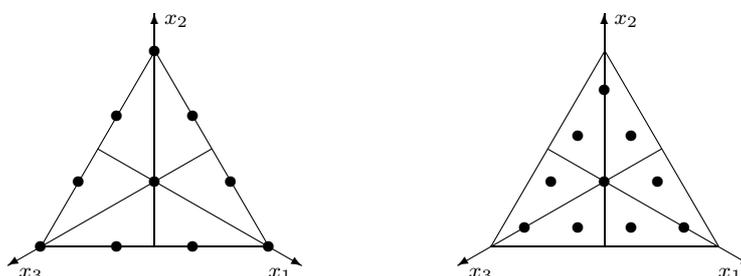
Dans les deux parties de la figure 2.4.5, nous avons envisagé le cas de six points expérimentaux (points noirs), correspondant d'une part aux sommets du triangle et d'autre part aux milieux de ses trois côtés, c'est-à-dire aux points de coordonnées :

$$\begin{aligned} &(0, 0, 100), \quad (0, 100, 0), \quad (100, 0, 0), \\ &(0, 50, 50), \quad (50, 0, 50), \quad (50, 50, 0). \end{aligned}$$

La partie gauche de la figure 2.4.6 présente un autre ensemble d'objets, toujours relatif au cas d'un mélange de trois substances. Il s'agit ici de 10 points expérimentaux, dont les coordonnées sont, de haut en bas et de gauche à droite :

$$\begin{aligned} &(0, 100, 0), \\ &(0, 67, 33), \quad (33, 67, 0), \\ &(0, 33, 67), \quad (33, 33, 33), \quad (67, 33, 0), \\ &(0, 0, 100), \quad (33, 0, 67), \quad (67, 0, 33), \quad (100, 0, 0), \end{aligned}$$

les valeurs 33 et 67 correspondant en fait à  $1/3$  et  $2/3$  de 100.



**Figure 2.4.6.** Exemples de points expérimentaux dans le cas d'un mélange de trois substances (10 objets).

#### 4° Simplexes

De tels ensembles de points expérimentaux sont parfois appelés *simplexes* ou *réseaux simplexes*<sup>47</sup>. D'une manière générale, ces ensembles sont caractérisés, d'une part, par le nombre de substances ou de composantes prises en considération, et d'autre part, par le nombre de subdivisions de la somme égale à 100, ou graphiquement, dans les cas que nous avons envisagés, par le nombre de subdivisions des côtés du triangle.

La figure 2.4.5 représente ainsi le simplexe  $\{3, 2\}$ , car il s'agit de trois substances et d'une subdivision du total 100 en deux parties, seules les valeurs 0, 50 et 100 intervenant dans les coordonnées des points expérimentaux. De même, la partie gauche de la figure 2.4.6 représente le simplexe  $\{3, 3\}$ , car toujours pour trois substances, le total 100 est divisé en trois tiers, les valeurs qui interviennent dans les coordonnées des points expérimentaux étant 0, 33, 67 et 100.

#### 5° Contraintes

On remarquera que, dans les deux exemples dont il vient d'être question, les points expérimentaux correspondent essentiellement à des substances pures (points situés aux sommets des triangles, pour lesquels deux coordonnées sont toujours nulles) ou des mélanges de deux substances seulement (points situés sur les côtés des triangles, en dehors des sommets, pour lesquels une coordonnée est toujours nulle). Seul le point  $(33, 33, 33)$  du deuxième exemple est en fait un réel mélange des trois substances considérées.

On peut remédier à cette situation en imposant des proportions minimales, pour une ou pour plusieurs substances, ces proportions minimales pouvant éventuellement être différentes d'une substance à l'autre.

La partie droite de la figure 2.4.6 correspond par exemple à une même proportion minimale de 10 % pour chacune des trois substances. Les coordonnées des

<sup>47</sup> En anglais : *simplex*, *simplex-lattice*.

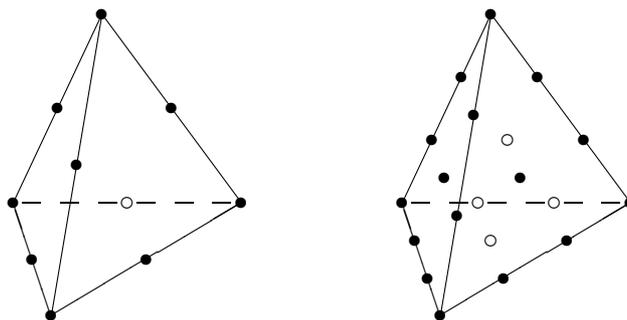
points expérimentaux sont alors, dans le même ordre que ci-dessus :

$$\begin{aligned} & (10, 80, 10), \\ & (10, 57, 33), \quad (33, 57, 10), \\ & (10, 33, 57), \quad (33, 33, 33), \quad (57, 33, 10), \\ & (10, 10, 80), \quad (33, 10, 57), \quad (57, 10, 33), \quad (80, 10, 10). \end{aligned}$$

Il peut arriver aussi que des proportions maximales doivent être imposées, ce qui peut avoir pour conséquence de supprimer le caractère triangulaire du domaine expérimental étudié. Nous envisagerons l'existence de telles contraintes au paragraphe 2.4.3.10°.

### 6° Quatre facteurs

La figure 2.4.7 présente les réseaux  $\{4, 2\}$  et  $\{4, 3\}$ , relatifs l'un et l'autre à quatre substances. Les ensembles d'objets forment ici des tétraèdres réguliers, ce qui constitue une extension des triangles équilatéraux des exemples précédents. Quatre axes pourraient être dessinés dans ces tétraèdres, chacun partant du centre d'une face et passant par le sommet opposé.



**Figure 2.4.7.** Exemples de points expérimentaux dans le cas d'un mélange de quatre substances.

Le cas  $\{4, 2\}$  comprend 10 points expérimentaux, situés aux quatre sommets et aux milieux des six arêtes du tétraèdre<sup>48</sup>. Les coordonnées des différents points sont, pour les sommets :

$$(0, 0, 0, 100), \quad (0, 0, 100, 0), \quad (0, 100, 0, 0), \quad (100, 0, 0, 0),$$

<sup>48</sup> En vue de faciliter la visualisation de la figure, nous avons représenté l'arête arrière du tétraèdre par une ligne discontinue et le point expérimental situé sur cette arête par un point blanc, ces deux éléments étant invisibles dans le cas d'un volume plein.

et pour les arêtes :

$$(0, 0, 50, 50), \quad (0, 50, 0, 50), \quad (0, 50, 50, 0), \\ (50, 0, 0, 50), \quad (50, 0, 50, 0), \quad (50, 50, 0, 0).$$

Le cas  $\{4, 3\}$  comprend 20 points expérimentaux, situés aux quatre sommets, aux tiers et aux deux tiers des six arêtes, et aux centres des quatre faces du tétraèdre<sup>49</sup>. Les coordonnées des quatre sommets sont les mêmes que ci-dessus. Les coordonnées des points des six arêtes sont toutes formées de deux 0, d'un 33 et d'un 67. Et les coordonnées des points des quatre faces sont toutes formées d'un 0 et de trois 33.

### 7° Compléments

Les notions que nous avons présentées peuvent évidemment être généralisées, et d'autres solutions ont aussi été proposées. On trouvera des informations complémentaires dans certains des ouvrages que nous avons cités dans l'introduction générale et au paragraphe 2.4.1.7°, ainsi que dans divers documents particuliers, dont ceux de CORNELL [2002], GOUPY [2000], et MATHIEU et PHAN-TAN-LUU [1997a]. On peut y ajouter des articles tels que ceux de CORNELL et GORMAN [2003], MCCONKEY *et al.* [2000], et PRESCOTT [2008].

On notera aussi que, dans le domaine agronomique, la question de la détermination d'une fumure ou d'une alimentation minérale équilibrée a été abordée comme un problème de mélange dans le cadre de la méthode des *variantes systématiques* [HOMÈS et HOMÈS-VAN SCHOOR, 1975; HOMÈS et VAN SCHOOR, 1969]. La base de cette méthode est notamment de remplacer l'étude globale de six éléments chimiques par la recherche séparée, d'une part d'un équilibre entre trois anions, d'autre part d'un équilibre entre trois cations, et enfin d'un équilibre anions-cations.

## ⊖ 2.4.3 Les plans optimaux

### 1° Principe

Comme les plans relatifs aux surfaces de réponse et en particulier aux mélanges (§ 2.4.1 et 2.4.2), les *plans optimaux*<sup>50</sup> concernent essentiellement les facteurs quantitatifs. Leur principe est de rechercher, dans un domaine expérimental donné et pour un nombre préalablement fixé d'observations, la combinaison d'objets (ou de points expérimentaux) qui permet d'obtenir la plus grande précision, en ce qui concerne soit l'estimation de la variable dépendante, soit l'estimation des paramètres du modèle sous-jacent.

<sup>49</sup> L'arête arrière est également représentée par une ligne discontinue et quatre points expérimentaux sont représentés par des points blancs, comme s'ils étaient invisibles. Il s'agit des deux points de l'arête arrière et des points de la face inférieure et de la face arrière du tétraèdre.

<sup>50</sup> En anglais : *optimal design*.

Nous introduisons ici les principaux concepts d'optimalité à partir de quelques exemples simples.

### 2° Un facteur : modèle et estimations

Si on se limite tout d'abord au cas d'un seul facteur, le modèle à prendre en considération est celui de la régression linéaire simple.

Le modèle théorique correspondant peut s'écrire [STAT2, § 14.1] :

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + D_i \quad \text{ou} \quad Y_i = m_Y + \beta(x_i - \bar{x}) + D_i,$$

$x$  étant la variable explicative, c'est-à-dire le facteur considéré,  $Y$  la variable à expliquer, c'est-à-dire celle au sujet de laquelle des observations sont réalisées,  $D$  les écarts ou les résidus aléatoires par rapport à la droite de régression,  $\alpha$  l'ordonnée à l'origine,  $\beta$  le coefficient de régression,  $\bar{x}$  et  $m_Y$  les moyennes de  $x$  et de  $Y$ , l'indice  $i$  étant relatif aux différentes observations.

Dans les conditions habituelles d'indépendance, de normalité, de nullité de la moyenne et de constance de la variance des résidus, on obtient les différents résultats suivants [STAT2, § 14.2.3]. Le coefficient de régression théorique  $\beta$  est estimé par le coefficient de régression observé  $b$  :

$$\hat{\beta} = b = \text{SPE}/\text{SCE}_x;$$

la variance de cette estimation est :

$$\sigma_{\hat{\beta}}^2 = \sigma^2/\text{SCE}_x;$$

la valeur estimée de la variable dépendante est, pour toute valeur  $x_0$  de la variable explicative :

$$\hat{y}_0 = \bar{y} + b(x_0 - \bar{x});$$

et la variance d'une telle estimation est :

$$\sigma_{\hat{y}_0}^2 = \sigma^2/n + \sigma^2(x_0 - \bar{x})^2/\text{SCE}_x,$$

SPE étant la somme des produits des écarts des  $x_i$  et  $y_i$ ,  $\text{SCE}_x$  la somme des carrés des écarts des  $x_i$ ,  $\sigma^2$  la variance résiduelle, c'est-à-dire la variance des résidus  $D_i$ ,  $\bar{y}$  la moyenne observée des  $y_i$ , et  $n$  le nombre d'observations<sup>51</sup>.

En outre, sous l'hypothèse de distribution normale des résidus, et en faisant intervenir les distributions  $t$  de STUDENT, des limites de confiance peuvent être calculées très facilement, tant pour le coefficient de régression que pour les valeurs estimées de la variable dépendante [STAT2, § 14.3.2 et 14.4.2].

<sup>51</sup> En vue d'alléger les notations, nous utilisons ici le symbole simple  $\sigma^2$ , au lieu de  $\sigma_{Y,x}^2$  [STAT2, § 14.1], pour désigner la variance résiduelle.

On peut noter aussi que la variance des valeurs estimées de la variable dépendante est parfois appelée, plus simplement, *variance de prédiction*<sup>52</sup>.

### 3° Un facteur et deux observations

Dans ces conditions, le principe des plans optimaux est de rechercher la combinaison de valeurs  $x_i$  de la variable explicative qui assure le minimum de  $\sigma_{\beta}^2$  et/ou le minimum de  $\sigma_{\hat{y}_0}^2$ , pour l'ensemble du domaine expérimental et pour un nombre donné d'observations.

Comme précédemment, nous considérons que le domaine expérimental s'étend de  $-1$  à  $+1$  et, en vue de comparer aisément différentes situations, nous supposons aussi que la variance  $\sigma^2$  est égale à 1.

Si deux observations seulement doivent être réalisées, il semble logique de choisir des valeurs  $x_i$  égales à  $-1$  et  $+1$ . La somme des carrés des écarts  $SCE_x$  est alors égale à 2, la variance du coefficient de régression est égale à 0,5, et la variance des valeurs estimées de la variable dépendante est donnée par la relation :

$$\sigma_{\hat{y}_0}^2 = 1/2 + x_0^2/2.$$

Pour tout autre couple de valeurs  $x_i$ , la somme des carrés des écarts est moins élevée et les deux variances considérées sont plus élevées (sauf, en ce qui concerne le point  $x_0 = 0$ , pour lequel la variance de la valeur estimée de  $y$  est toujours égale à 0,5). La combinaison  $(-1, +1)$  conduit donc aux variances les plus petites et peut en conséquence être considérée comme optimale.

### 4° Un facteur et trois observations

Pour trois observations, on peut être tenté a priori de prendre en considération les points expérimentaux  $x_i = -1, 0$  et  $+1$ . La somme des carrés des écarts est toujours égale à 2, la variance du coefficient de régression est égale à 0,5, et la variance des valeurs estimées de la variable dépendante est :

$$\sigma_{\hat{y}_0}^2 = 1/3 + x_0^2/2.$$

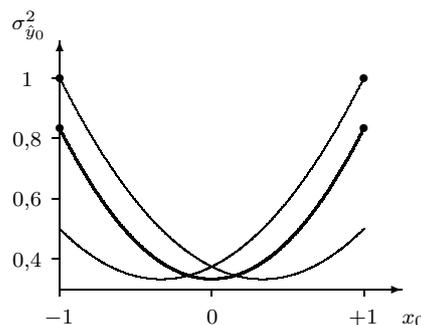
Il faut cependant remarquer que cette solution ne conduit pas au maximum de la somme des carrés des écarts. Ce maximum est en effet atteint quand les  $x_i$  sont égaux à  $-1, -1$  et  $+1$  (ce qui correspond à deux répétitions de la valeur  $-1$  et une répétition de la valeur  $+1$ ), ou quand les  $x_i$  sont égaux à  $-1, +1$  et  $+1$  (une répétition de la valeur  $-1$  et deux répétitions de la valeur  $+1$ ). Ce maximum est égal à  $8/3$  et la variance du coefficient de régression est en conséquence égale à 0,375, au lieu de 0,5. La valeur 0,375 est la plus petite possible pour trois observations, de telle sorte que les solutions  $(-1, -1, +1)$  et  $(-1, +1, +1)$  sont toutes deux optimales en vue d'estimer le coefficient de régression.

<sup>52</sup> En anglais : *prediction variance*.

En outre, pour ces deux séries de valeurs  $x_i$ , la variance des valeurs estimées de  $y$  est :

$$\sigma_{\hat{y}_0}^2 = 1/3 + 3(x_0 + 1/3)^2/8 \quad \text{ou} \quad 1/3 + 3(x_0 - 1/3)^2/8.$$

La figure 2.4.8 montre l'évolution de cette variance pour les trois combinaisons de valeurs  $x_i$  que nous avons envisagées.



**Figure 2.4.8.** Évolution de la variance des valeurs estimées de la variable dépendante dans le cas de trois observations : solution  $(-1, 0, +1)$  en gros trait et solutions  $(-1, -1, +1)$  et  $(-1, +1, +1)$  en traits fins.

En présence de telles courbes, on compare les différents résultats sur base des valeurs maximums observées dans l'ensemble du domaine expérimental. Ces maximums correspondent aux points noirs de la figure 2.4.8, soit  $5/6$  ou  $0,833$  pour la solution  $(-1, 0, +1)$ , et  $1$  pour les solutions  $(-1, -1, +1)$  et  $(-1, +1, +1)$ . La première solution envisagée s'avère donc être la meilleure des trois en ce qui concerne l'estimation de la variable dépendante et on peut montrer qu'aucune autre solution ne lui est préférable. Il s'agit de la solution optimale pour cet aspect du problème.

On constate ainsi que les deux critères envisagés (minimum de la variance du coefficient de régression et minimum de la variance des valeurs estimées de  $y$ ) ne conduisent pas toujours à la même solution optimale.

### 5° Un facteur et quatre observations

Pour quatre observations, la solution intuitive qui consisterait en quatre valeurs équidistantes  $-1, -1/3, +1/3$  et  $+1$  conduit aux résultats suivants :

$$SCE_x = 20/9 \text{ ou } 2,222, \quad \sigma_{\hat{\beta}}^2 = 0,45 \quad \text{et} \quad \max(\sigma_{\hat{y}_0}^2) = 0,7.$$

Mais la solution  $x_i = -1, -1, +1$  et  $+1$ , c'est-à-dire deux observations de  $y$  en  $x = -1$  et deux observations de  $y$  en  $x = +1$ , donne :

$$SCE_x = 4, \quad \sigma_{\hat{\beta}}^2 = 0,25 \quad \text{et} \quad \max(\sigma_{\hat{y}_0}^2) = 0,5.$$

On peut montrer en outre que cette deuxième solution est la meilleure de toutes, tant en ce qui concerne l'estimation du coefficient de régression que l'estimation de la variable dépendante. Il faut toutefois noter que, si cette solution est optimale à ce double titre, elle présente cependant l'inconvénient majeur de ne permettre en aucune façon de vérifier la linéarité de la régression.

On peut noter enfin que, dans tous les cas, pour un nombre donné d'observations, la comparaison des différentes solutions peut se faire en considérant uniquement les valeurs  $1/\text{SCE}_x$  en ce qui concerne les coefficients de régression et  $(x_0 - \bar{x})^2/\text{SCE}_x$  en ce qui concerne les valeurs estimées de la variable dépendante.

### 6° Deux ou plusieurs facteurs

Pour deux ou plusieurs facteurs, la régression simple cède la place à la régression multiple et il y a intérêt à utiliser des notations matricielles.

En négligeant les indices  $i$  relatifs aux variables  $x$  et  $Y$  et aux résidus  $D$ , le modèle théorique est alors [STAT2, § 16.1 et 16.3.2] :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + D \quad \text{ou} \quad Y = \beta_0 + \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + D,$$

ou encore :

$$Y = m_Y + \beta_1 (x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \beta_k (x_k - \bar{x}_k) + D \quad \text{ou} \quad Y = m_Y + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\boldsymbol{\beta} + D,$$

les différents symboles ayant la même signification que précédemment, à ceci près qu'on se trouve en présence de  $k$  variables explicatives  $x_1, \dots, x_k$ , constituant le vecteur-ligne  $\mathbf{x}$ , de  $k$  moyennes  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ , constituant le vecteur-ligne  $\bar{\mathbf{x}}$ , et de  $k$  coefficients de régression  $\beta_1, \dots, \beta_k$ , constituant le vecteur-colonne  $\boldsymbol{\beta}$ , le terme indépendant étant désigné ici par  $\beta_0$ , au lieu de  $\alpha$ .

Dans des conditions semblables à celles qui ont été rappelées ci-dessus, on obtient les résultats suivants [STAT2, § 16.3.2] :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{b} = \mathbf{A}_{xx}^{-1} \mathbf{a}_{xy} \quad \text{et} \quad \sigma_{\hat{\beta}_j}^2 = \sigma^2 a^{jj},$$

$$\hat{y}_0 = \bar{y} + (\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}})\mathbf{b} \quad \text{et} \quad \sigma_{\hat{y}_0}^2 = \sigma^2/n + \sigma^2 (\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{A}_{xx}^{-1} (\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}),$$

$\mathbf{A}_{xx}$  étant la matrice des sommes des carrés et des produits des écarts des variables  $x_1, \dots, x_k$ ,  $\mathbf{a}_{xy}$  le vecteur-colonne des sommes des produits des écarts de ces variables avec la variable  $y$ , et  $a^{jj}$  le  $j^{\text{ème}}$  élément diagonal de la matrice inverse  $\mathbf{A}_{xx}^{-1}$ .

À l'aide des distributions  $t$  de STUDENT, on peut aussi déterminer des intervalles de confiance pour chacun des coefficients de régression considéré individuellement, de même que pour les valeurs estimées de la variable dépendante [DAGNELIE, 1986, § 4.4.2 et 4.4.4]. Mais en se référant aux distributions  $F$  de FISHER-SNEDECOR, il est également possible de définir des régions de confiance, globalement pour l'ensemble des coefficients de régression. Ces régions de confiance

sont de forme elliptique dans le cas de deux coefficients de régression et de forme ellipsoïdale ou hyperellipsoïdale pour plus de deux coefficients de régression.

### 7° Critères d'optimalité

Les différentes notations et relations que nous venons de présenter permettent de définir plusieurs critères d'optimalité.

En ce qui concerne l'estimation des coefficients de régression, la somme des termes diagonaux  $a^{jj}$ , c'est-à-dire aussi la trace de la matrice inverse  $\mathbf{A}_{xx}^{-1}$ , se substitue au seul terme  $1/\text{SCE}_x$ , le meilleur ensemble d'objets étant celui qui assure le minimum de cette somme. On parle dans ce cas de plans *A-optimaux*<sup>53</sup> et de *A-optimalité*<sup>54</sup>.

En ce qui concerne par contre l'estimation des valeurs de la variable dépendante, l'expression  $(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{A}_{xx}^{-1} (\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}})$  généralise la quantité  $(x_0 - \bar{x})^2/\text{SCE}_x$  introduite ci-dessus pour une seule variable. La solution considérée comme optimale dans cette optique est caractérisée par le plus petit maximum de cette expression, dans tout le domaine des valeurs admissibles de  $\mathbf{x}$ . Les ensembles d'objets qui correspondent à de telles solutions sont dits *G-optimaux*<sup>55</sup> et le critère envisagé est appelé critère de *G-optimalité*<sup>56</sup>.

Un troisième critère, qui est très fréquemment utilisé, consiste à assurer le maximum du déterminant  $|\mathbf{A}_{xx}|$  de la matrice des sommes des carrés et des produits des écarts ou, ce qui est strictement équivalent, le minimum du déterminant  $|\mathbf{A}_{xx}^{-1}|$  de l'inverse de cette matrice. Ce critère caractérise la *D-optimalité*<sup>57</sup> et les plans définis de cette manière sont dits *D-optimaux*<sup>58</sup>. On peut montrer que le maximum de  $|\mathbf{A}_{xx}|$ , ou le minimum de  $|\mathbf{A}_{xx}^{-1}|$ , correspond au minimum du volume de la région de confiance relative à l'ensemble des coefficients de régression.

D'autres critères encore ont été introduits, tels que, par exemple, le minimum de la plus grande valeur propre de la matrice inverse  $\mathbf{A}_{xx}^{-1}$ . Ce critère définit la *E-optimalité*<sup>59</sup> et les plans *E-optimaux*<sup>60</sup>. Il correspond à la recherche de la longueur minimum du plus grand axe des ellipses, ellipsoïdes ou hyperellipsoïdes de confiance<sup>61</sup>.

<sup>53</sup> En anglais : *A-optimal design*.

<sup>54</sup> En anglais : *A-optimality*.

<sup>55</sup> En anglais : *G-optimal design*.

<sup>56</sup> En anglais : *G-optimality*.

<sup>57</sup> En anglais : *D-optimality*.

<sup>58</sup> En anglais : *D-optimal design*.

<sup>59</sup> En anglais : *E-optimality*.

<sup>60</sup> En anglais : *E-optimal design*.

<sup>61</sup> Dans les dénominations des critères d'optimalité, la lettre A est liée à la notion d'*average optimality* (optimalité « moyenne », en ce qui concerne l'estimation des différents coefficients de régression), la lettre D à l'emploi de déterminants, la lettre E à l'étude des valeurs propres (*eigenvalues*), et la lettre G à la notion de *general variance* (variance maximum « générale », pour l'ensemble des valeurs admissibles des variables explicatives).

Ces différents critères ne sont pas équivalents d'une manière générale, mais des relations d'équivalence existent cependant entre certains d'entre eux, dans des conditions bien définies.

La recherche de combinaisons optimales d'objets, qui répondent à un ou plusieurs de ces critères, peut être réalisée de manière analytique dans certains cas simples. Cette recherche nécessite par contre l'utilisation de logiciels spéciaux dans des situations plus complexes. Le plus souvent, les solutions obtenues ne sont alors qu'approchées<sup>62</sup>.

De plus, dans certains cas, on donne la préférence à des solutions dites *suboptimales*<sup>63</sup>, qui sont proches des solutions optimales. Il peut en être ainsi notamment en vue de réduire le nombre de niveaux du ou des facteurs qui sont considérés. Le degré d'optimalité peut alors être exprimé en valeur relative, par comparaison avec le plan qui serait réellement optimal.

### 8° Matrices du modèle, d'information et de dispersion

La présentation que nous avons adoptée n'est pas la plus classique, ni la plus directe, mais elle permet de partir des notions de base de la régression linéaire simple.

La présentation classique des critères d'optimalité fait appel au concept de *matrice du modèle*<sup>64</sup>, qui étend celui de matrice d'expérience, défini au paragraphe 2.3.2.9°. D'une manière générale, la matrice du modèle  $\mathbf{X}$  est constituée d'autant de lignes qu'il y a d'observations et d'autant de colonnes qu'il y a de coefficients de régression ou de paramètres à estimer dans le modèle.

Ainsi, dans le cas d'une expérience factorielle  $2^3$  qui ne ferait intervenir qu'une seule répétition et dans l'optique d'une analyse par régression quadratique, la matrice de l'expérience serait une matrice de dimensions  $9 \times 2$  (neuf observations et deux facteurs). La matrice du modèle serait par contre de dimensions  $9 \times 5$  ou  $9 \times 6$ , les cinq colonnes correspondant aux cinq termes de l'équation de régression ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_1^2$ ,  $x_2^2$  et  $x_1 x_2$ ), une colonne supplémentaire pouvant être introduite en vue de tenir compte également du terme indépendant.

À partir de la matrice du modèle, on peut déterminer le produit matriciel  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$  et, éventuellement, son inverse  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ . Ces éléments sont appelés respectivement *matrice d'information*<sup>65</sup> et *matrice de dispersion*<sup>66</sup>. En matière de plans optimaux, ces éléments jouent des rôles tout à fait comparables à ceux de  $\mathbf{A}_{xx}$  et  $\mathbf{A}_{xx}^{-1}$  dans la présentation que nous avons adoptée au départ.

---

<sup>62</sup> Nous rappelons que nous avons donné quelques indications relatives aux logiciels dans l'introduction générale.

<sup>63</sup> En anglais : *suboptimal design*.

<sup>64</sup> En anglais : *model matrix*.

<sup>65</sup> En anglais : *information matrix*.

<sup>66</sup> En anglais : *dispersion matrix*.

On trouvera des informations complémentaires à ce sujet notamment dans les livres spécialisés d'ATKINSON *et al.* [2007], PUKELSHEIM [1993] et SILVEY [1980], et dans des articles tels que ceux de GAUCHI [2005] et RADY *et al.* [2009].

### 9° Exemple et différents problèmes particuliers

Nous pouvons illustrer l'utilisation des principaux critères que nous avons introduits en considérant le cas relativement simple de la recherche d'une parabole, à partir de quatre observations. Cette recherche peut en effet être considérée comme un problème de régression linéaire à deux variables, la première variable explicative étant la variable étudiée au départ et la deuxième variable explicative étant le carré de cette variable :

$$x_1 = x \quad \text{et} \quad x_2 = x^2.$$

Comme ci-dessus dans le cas d'une droite, nous supposons tout d'abord que les points expérimentaux sont équidistants dans le domaine  $[-1, +1]$ , ce qui revient à adopter les valeurs  $-1, -1/3, +1/3$  et  $+1$  pour la première variable, et les valeurs  $+1, +1/9, +1/9$  et  $+1$  pour la deuxième variable.

La matrice des sommes des carrés et des produits des écarts est alors :

$$\mathbf{A}_{xx} = \begin{bmatrix} 2,222222 & 0 \\ 0 & 0,790123 \end{bmatrix},$$

et on en déduit :

$$|\mathbf{A}_{xx}| = 1,7558, \quad |\mathbf{A}_{xx}^{-1}| = 0,5695, \quad \text{trace}(\mathbf{A}_{xx}^{-1}) = 1,7156,$$

et 
$$\max[(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{A}_{xx}^{-1} (\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}})] = 0,7,$$

le maximum correspondant aux valeurs extrêmes  $-1$  et  $+1$ .

Cette solution n'est cependant pas optimale. En remplaçant les deux abscisses intermédiaires  $-1/3$  et  $+1/3$  par  $0$ , on obtient en effet :

$$|\mathbf{A}_{xx}| = 2, \quad |\mathbf{A}_{xx}^{-1}| = 0,5, \quad \text{trace}(\mathbf{A}_{xx}^{-1}) = 1,5,$$

et 
$$\max[(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{A}_{xx}^{-1} (\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}})] = 0,75,$$

le maximum correspondant toujours aux deux valeurs extrêmes.

On peut montrer que la valeur  $2$  est le maximum possible en ce qui concerne le critère  $|\mathbf{A}_{xx}|$  et, corrélativement, que la valeur  $0,5$  est le minimum possible pour  $|\mathbf{A}_{xx}^{-1}|$ . De même, la valeur  $1,5$  est le maximum possible pour la trace de la matrice inverse. La solution  $-1, 0, 0, +1$  est donc à la fois D-optimale et A-optimale.

Aucune des deux solutions que nous avons examinées jusqu'à présent n'est par contre G-optimale, car les valeurs  $0,7$  et  $0,75$  ne sont pas les plus petites

possible pour le critère  $\max[(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{A}_{xx}^{-1} (\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}})]$ . Par résolution analytique ou par approximations successives, on peut établir que le minimum de ce critère est atteint pour la solution  $-1, -0,4859, +0,4859, +1$ , qui est donc G-optimale. Le minimum de ce critère est égal à 0,6545 et correspond à la fois, pour  $x$ , aux deux valeurs extrêmes  $-1$  et  $+1$  et à la valeur 0.

On en conclut notamment que, dans le cas envisagé, pour estimer les coefficients de régression avec un maximum de précision, il est préférable d'utiliser les abscisses  $-1, 0, 0$  et  $+1$  (A-optimalité), tandis que pour estimer les valeurs de la variable dépendante avec un maximum de précision, dans l'ensemble du domaine de variation considéré, la préférence doit être donnée aux abscisses  $-1, -0,4859, +0,4859$  et  $+1$ , ou approximativement  $-1, -0,5, +0,5$  et  $+1$  (G-optimalité).

Des exemples plus complets sont présentés notamment par IBRAHIMY [1994] et MONOD *et al.* [2002]. Et différents problèmes particuliers, tels que la recherche de doses optimales pour des mélanges, et l'utilisation de la fonction logistique et du modèle de MICHAELIS et MENTEN [STAT2, § 15.2.3.2° et ex. 15.2.2], sont abordés par LI et MAJUMDAR [2008], MATTHEWS et ALLCOCK [2004], et PRESCOTT et DRAPER [2008].

### 10° Mélanges sous contraintes

La recherche de plans optimaux intervient très fréquemment dans l'étude de mélanges soumis à des contraintes autres que de simples conditions de minimum.

Nous avons vu au paragraphe 2.4.2.5°, et en particulier dans la partie droite de la figure 2.4.6, que des conditions de minimum peuvent se présenter dans les études de mélanges sans modifier le caractère triangulaire du domaine expérimental. Mais il n'en est pas de même pour les conditions de maximum, ni pour les contraintes qui seraient relatives simultanément à deux ou plusieurs éléments du mélange (total de deux ou plusieurs éléments inférieur ou supérieur à une certaine limite).

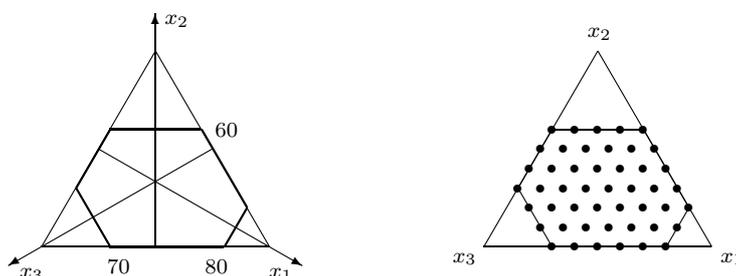
Nous pouvons illustrer cette affirmation en considérant le cas d'un mélange de trois substances, dans lequel il serait exclu a priori, pour des raisons de toxicité ou d'équilibre entre les différents constituants par exemple, que la proportion de la première substance dépasse 80 %, que la proportion de la deuxième substance dépasse 60 %, et que la proportion de la troisième substance dépasse 70 %, les contraintes étant donc :

$$x_1 \leq 80, \quad x_2 \leq 60 \quad \text{et} \quad x_3 \leq 70.$$

Comme le montre la partie gauche de la figure 2.4.9, le domaine de variation défini de cette manière est un hexagone irrégulier, et non plus un triangle.

Dans un tel cas, la recherche d'une combinaison optimale de points expérimentaux peut se faire à l'aide de divers algorithmes, comme ceux de FEDOROV [1972] et MITCHELL [1974], dont le principe peut être esquissé comme suit.

On définit tout d'abord le nombre  $n$  de points expérimentaux dont on souhaite disposer, ainsi qu'un nombre plus élevé  $N$  de points possibles ou « candidats ».



**Figure 2.4.9.** Exemple de problème de mélange sous contraintes.

Ces derniers pourraient être ici l'ensemble ou une partie des points du domaine considéré, dont les coordonnées sont constituées de 0, de 10 et de multiples de 10 (ou de 0, de 5 et de multiples de 5). De tels points sont représentés dans la partie droite de la figure 2.4.9 et ont comme coordonnées, de haut en bas et de gauche à droite :

$$\begin{aligned}
 &(0, 60, 40), \quad (10, 60, 30), \quad (20, 60, 20), \quad \dots, \quad (40, 60, 0), \\
 &(0, 50, 50), \quad (10, 50, 40), \quad (20, 50, 30), \quad \dots, \quad (50, 50, 0), \\
 &(0, 40, 60), \quad (10, 40, 50), \quad (20, 40, 40), \quad \dots, \quad (60, 40, 0), \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

L'algorithme choisit ensuite au hasard  $n$  de ces  $N$  points candidats, il calcule pour ceux-ci le critère d'optimalité qui a été adopté, il remplace au hasard un des  $n$  points qui ont été choisis par un des  $N - n$  points qui n'ont pas été choisis, il recalcule le critère d'optimalité, et il continue de la sorte jusqu'au moment où un minimum (ou un maximum, selon le critère adopté) est atteint. Éventuellement, on peut recommencer l'ensemble des calculs un certain nombre de fois, afin d'éviter de s'arrêter à un minimum (ou un maximum) local inadéquat.

On se souviendra, comme nous l'avons déjà signalé, que cette procédure est en général approchée, car elle ne conduit pas nécessairement à l'optimum absolu.

### 11° Expériences factorielles sous contraintes

Des problèmes semblables peuvent se présenter également dans d'autres situations que les études de mélanges, et notamment dans le cas des expériences factorielles (§ 2.3.2).

Certaines combinaisons extrêmes des différentes modalités des facteurs considérés doivent en effet être parfois évitées, toujours pour des raisons de toxicité par exemple. Un ensemble factoriel, qui doit normalement se présenter sous la forme d'un carré, d'un rectangle, d'un cube ou d'un parallélépipède peut alors être réduit à un polygone ou un polyèdre irrégulier, au même titre qu'un triangle peut

être réduit à un hexagone irrégulier, dans le cas des mélanges. Des procédures semblables à celle qui vient d'être esquissée doivent alors être adoptées.

## ⊖ 2.4.4 Les expériences organisées en deux ou plusieurs phases

### 1° Principe

Dans l'introduction générale, nous avons signalé, à propos de la signification même du mot « expérience », que les différents éléments comparés, c'est-à-dire les objets ou les points expérimentaux, peuvent être étudiés soit simultanément (en particulier dans le domaine agronomique), soit à la suite les uns des autres (principalement dans le domaine industriel). Mais, quelle que soit la solution adoptée, nous avons toujours supposé jusqu'à présent que le choix des objets était réalisé globalement, en une fois, avant d'entreprendre l'expérience proprement dite.

On peut envisager également d'adapter, de modifier ou de compléter le choix des objets en cours d'expérience, à une ou plusieurs reprises, en fonction des résultats déjà obtenus. On peut ainsi concevoir des expériences qui sont planifiées *en deux ou plusieurs phases* ou *étapes*<sup>67</sup>, et qui sont parfois dites aussi *adaptatives* ou *séquentielles*<sup>68</sup>.

Tel est le cas notamment si, pour un seul facteur, on envisage dans un premier temps un très petit nombre de modalités, en considérant ensuite, en une ou plusieurs fois, différentes modalités supplémentaires, intermédiaires ou non (doses progressivement de plus en plus élevées, par exemple).

Le recours à de telles procédures ne peut se justifier cependant que quand les différentes phases successives de l'expérience peuvent être réalisées dans des conditions parfaitement identiques, à moins qu'il ne soit possible de tenir compte, au cours de l'analyse des résultats, des différences de conditions de réalisation qui existeraient éventuellement entre les diverses phases.

### 2° Expériences factorielles

Dans le cas des expériences factorielles complètes ou fractionnaires (§ 2.3.2 et 2.3.3), on peut ainsi compléter une expérience initiale relativement limitée, en fonction des premiers résultats obtenus.

On peut par exemple ajouter une troisième modalité à certains facteurs qui n'en comportaient initialement que deux, en vue de passer d'un modèle de régression linéaire à un modèle de régression quadratique. On peut aussi ajouter un ou plusieurs facteurs supplémentaires à une expérience déjà réalisée, ou encore s'efforcer d'étudier l'importance des interactions ou de certaines d'entre elles, après avoir considéré uniquement les effets principaux des facteurs.

---

<sup>67</sup> En anglais : *two-step experiment, multi-step experiment.*

<sup>68</sup> En anglais : *adaptive experiment, sequential experiment.*

Il faut toutefois noter qu'il est hautement souhaitable de toujours envisager les différentes possibilités d'extensions ultérieures dès le départ, au moment de la planification de la première phase de l'expérience.

### 3° Surfaces de réponse et plans optimaux

De même, dans le cas de l'étude des surfaces de réponse (§ 2.4.1), on peut traiter les plans composites centrés en deux temps, en effectuant tout d'abord la partie factorielle de l'expérience, et en complétant ensuite l'étude par la partie radiale, pour l'ensemble ou uniquement pour une partie des facteurs pris en considération au cours de l'expérience initiale. Différentes autres possibilités ont été suggérées, notamment par MOZZO [1990].

De même aussi, les plans de BOX et BEHNKEN et de DOEHLERT (§ 2.4.1) peuvent être appliqués en deux ou plusieurs fois. Le tableau 2.4.1 montre par exemple que, dans le cas des plans de DOEHLERT, il est possible de réaliser tout d'abord une expérience relative à deux facteurs, comportant sept objets (partie supérieure gauche du tableau), et d'introduire ensuite un troisième facteur, en considérant six objets supplémentaires (partie inférieure du tableau).

Ce tableau souligne également la nécessité de prévoir au départ, le cas échéant, les éventuelles extensions ultérieures possibles. Le passage de deux à trois facteurs ne peut en effet intervenir que si on a pris la précaution d'organiser l'expérience à deux facteurs au niveau intermédiaire du troisième facteur (valeurs 0 présentes dans la partie supérieure droite du tableau).

Enfin, les algorithmes utilisés en ce qui concerne les plans optimaux (§ 2.4.3) permettent d'ajouter progressivement des points expérimentaux supplémentaires à de tels plans, en vue par exemple d'améliorer la qualité des estimations obtenues.

### 4° Autres possibilités

Toujours moyennant les mêmes restrictions quant à la stabilité des conditions expérimentales, certaines procédures particulières permettent de réaliser des expériences de manière strictement séquentielle, les différents points expérimentaux étant déterminés de proche en proche en fonction des résultats obtenus chaque fois pour les points antérieurs.

La méthode EVOP (*EVolutionary OPeration*) a par exemple pour principe, dans le cas de deux facteurs, de partir de trois points expérimentaux constituant un triangle équilatéral, semblable à une partie d'un plan de DOEHLERT (figure 2.4.3), d'en déduire la direction dans laquelle se trouve vraisemblablement le maximum (ou le minimum) recherché, d'ajouter un quatrième point expérimental dans cette direction, de déterminer à nouveau la direction dans laquelle se trouve vraisemblablement l'objectif recherché, d'ajouter un cinquième point, etc., jusqu'au moment où le maximum (ou le minimum) est atteint [EVANS, 1979 ; LOWE, 1974].

Des processus semblables peuvent aussi être appliqués en partant d'expériences factorielles ou autres, et en recherchant ensuite progressivement le maximum (ou

le minimum) de la variable dépendante, notamment en fonction de la direction de  *pente maximum*  ou de  *plus grande pente* <sup>69</sup> donnée par la régression [FAN et HUANG, 2011 ; FREY et WANG, 2006].

On notera enfin que le caractère séquentiel d'une expérience peut être lié, non pas au choix des objets, mais au nombre d'observations. On peut en effet envisager d'organiser une expérience de manière séquentielle, en considérant dans un premier temps un certain nombre d'unités expérimentales, et en augmentant ensuite éventuellement le nombre d'unités, en fonction des résultats déjà obtenus, et cela toujours pour les mêmes objets, et à une seule ou à plusieurs reprises.

Tel est le cas en particulier dans le domaine médical, où on parle notamment d'*expériences séquentielles par groupes*<sup>70</sup> [VANDEMEULEBROECKE, 2008].

## ⊖ 2.4.5 Les expériences numériques

### 1° Principe

Certaines expériences, notamment quand elles sont très difficiles, voire impossibles à organiser de manière réelle, peuvent être simulées sur ordinateur. Un modèle mathématique est alors conçu en vue de représenter le phénomène qu'on souhaite étudier, puis traduit en un programme de calcul. Et ce programme permet ensuite d'observer et de quantifier l'effet des différents facteurs considérés sur une ou plusieurs variables résultantes.

De telles expériences sont qualifiées d'*expériences numériques* ou *par ordinateur*<sup>71</sup>. Elles concernent en premier lieu les phénomènes physiques et chimiques (hydrologie et cinétique chimique, par exemple), mais elles peuvent intervenir également en biologie, en médecine, etc.

### 2° Quelques caractéristiques

Une première caractéristique de ce type d'expériences est le fait que les résultats obtenus ne sont pas entachés de fluctuations aléatoires, sauf bien sûr si de telles fluctuations sont volontairement introduites dans le modèle sous-jacent.

Une deuxième propriété de ce type d'expériences est liée au fait qu'en l'absence de fluctuations des conditions expérimentales au cours du temps, les simulations peuvent être réalisées dans n'importe quel ordre et, en principe, avec un nombre de répétitions quasi illimité.

Toutefois, vu le nombre de facteurs pris en considération, qui est parfois très élevé, et en raison de la complexité des modèles adoptés, les temps de calcul peuvent être très importants, et constituent souvent le principal facteur limitant. Il

---

<sup>69</sup> En anglais : *steepest ascent*.

<sup>70</sup> En anglais : *group sequential design*.

<sup>71</sup> En anglais : *numerical experiment, computer experiment*.

importe donc d'effectuer malgré tout dans ce domaine une planification rigoureuse des expériences.

Les différentes possibilités que nous avons présentées antérieurement (expériences factorielles, expériences factorielles fractionnaires, etc.) restent d'application ici, mais d'autres schémas ont également été introduits. On peut citer en particulier les hypercubes latins, dont il est brièvement question au paragraphe 8.4.2°, et les *plans uniformes*<sup>72</sup> et de *remplissage*<sup>73</sup> du domaine expérimental.

Des informations complémentaires peuvent être trouvées notamment dans les livres de FANG *et al.* [2006] et SANTNER *et al.* [2003], et les articles de BORKOWSKI et PIEPEL [2009], BURTON *et al.* [2006], FANG *et al.* [2000], et JOURDAN [2005].

---

<sup>72</sup> En anglais : *uniform design*.

<sup>73</sup> En anglais : *space-filling design*.

# Chapitre 3

## Les unités expérimentales

### Sommaire

- 3.1 La notion d'unité expérimentale**
- 3.2 Les dimensions des unités expérimentales**
  - 3.2.1 Principes généraux
  - 3.2.2 Les bordures et les périodes tampons
- 3.3 La forme des unités expérimentales**
- 3.4 Le nombre de répétitions**
- 3.5 La variabilité du matériel expérimental**
  - 3.5.1 Principes généraux
  - ⊖ 3.5.2 L'étude de la variabilité par le modèle de SMITH
  - ⊖ 3.5.3 L'étude de la variabilité par l'analyse spatiale
- 3.6 Exemple : expérience d'uniformité**
  - 3.6.1 Présentation et données
  - ⊖ 3.6.2 Interprétation des résultats : modèle de SMITH
  - ⊖ 3.6.3 Interprétation des résultats : analyse spatiale

## 3.1 La notion d'unité expérimentale

### 1° Principe

L'*unité expérimentale*<sup>1</sup> est l'élément de base de l'expérience, qui est considéré individuellement durant tout le processus expérimental. Chacune des unités est notamment soumise au départ à un objet ou un traitement particulier et conduit à une ou plusieurs observations en fin d'expérience, quand ce n'est pas déjà au début ou au cours de l'expérience.

L'unité expérimentale peut se présenter sous des formes extrêmement différentes d'une discipline à l'autre et, au sein d'une même discipline, d'un type d'expérience à l'autre. La diversité des situations implique que le choix des unités expérimentales, et corrélativement de leurs nombres, doit toujours être réalisé avec le plus grand soin.

### 2° Domaine agronomique

Dans le domaine agronomique, et plus particulièrement en matière de productions végétales, l'unité de base est souvent une *parcelle*<sup>2</sup>, c'est-à-dire une certaine étendue de terrain (en champ, en verger, en forêt, etc.) comportant un certain nombre de plantes. Le nombre de plantes en question est parfois précisé (parcelles de quatre arbres plantés à un écartement donné, par exemple) et parfois indéterminé (parcelles de blé d'une étendue donnée, par exemple).

Mais il peut s'agir aussi d'une seule plante (un arbre par exemple), d'une partie de plante (une branche ou un rameau, une feuille ou un morceau de feuille, un fruit ou un morceau de fruit, etc.), ou d'un groupe d'organes particuliers (un lot de graines par exemple)<sup>3</sup>.

Dans le domaine agronomique toujours, mais en productions animales, l'unité de base de l'expérience peut être un groupe d'animaux, un animal isolé ou une partie d'animal (un membre par exemple). On considère en particulier qu'un groupe d'animaux constitue une seule unité expérimentale quand tous les individus du groupe sont soumis à un même traitement, sont élevés ensemble, et sont l'objet d'observations globales (poids ou production de l'ensemble du lot d'animaux par exemple).

D'autre part, l'unité expérimentale peut aussi être un animal ou un groupe d'animaux observé durant une certaine période seulement. Quand, notamment, chacun des animaux mis en expérience, et considéré individuellement, reçoit consécutivement différentes alimentations, pour chacune desquelles une ou plusieurs observations sont réalisées, chacune des combinaisons animal-alimentation peut être considérée comme constituant une unité expérimentale particulière.

---

<sup>1</sup> En anglais : *experimental unit*.

<sup>2</sup> En anglais : *plot*.

<sup>3</sup> Dans certains ouvrages d'expérimentation, le mot « parcelle » est utilisé dans un sens très large, qui englobe indistinctement les différentes situations que nous venons d'évoquer.

### 3° Domaine médical

Dans le domaine médical, l'unité de base de l'expérience est le plus souvent un patient, ou éventuellement un volontaire sain, auquel un traitement est appliqué et au sujet duquel des observations sont faites en général avant, pendant et après l'application du traitement, tout au long du processus expérimental.

D'autres possibilités peuvent cependant être envisagées. Lors de l'étude de traitements anti-allergiques par exemple, l'unité expérimentale peut être une certaine surface de peau, chaque surface élémentaire se voyant affecter un traitement ou objet particulier et conduisant à au moins une observation. Un même patient peut ainsi être « porteur » de plusieurs unités expérimentales, auxquelles correspondent différents objets.

Un même patient peut également se voir appliquer successivement plusieurs traitements, chacune des combinaisons patient-traitement pouvant alors être considérée comme une unité expérimentale.

### 4° Domaine industriel et laboratoire

Dans le domaine industriel et en laboratoire, l'unité expérimentale peut être tout ensemble ou tout élément ou groupe d'éléments qui est traité individuellement durant toute l'expérience. Il peut s'agir par exemple d'une boîte de conserve ou d'un groupe de boîtes de conserve, d'une éprouvette prélevée dans une bille de bois ou dans un panneau de fibres, d'un « échantillon » au sens chimique du terme, c'est-à-dire d'une certaine quantité d'une matière ou d'une substance quelconque, et aussi d'une automobile ou de certains éléments d'une automobile (pneus ou boîte de vitesse, par exemple), d'une certaine surface de mur ou de revêtement routier (dans la comparaison de différents enduits ou de différentes peintures), etc.

La diversité des situations et des possibilités est donc particulièrement importante dans ce secteur.

## 3.2 Les dimensions des unités expérimentales

### 3.2.1 Principes généraux

#### 1° Principes théoriques

Dans le cas des parcelles, des lots d'animaux, etc., se pose la question des *dimensions*<sup>4</sup> des unités expérimentales, en termes d'étendue, de nombre d'animaux, etc.

Au point de vue purement théorique, on peut démontrer qu'il y a généralement intérêt à définir, dans un terrain d'une dimension donnée, ou d'une façon plus

---

<sup>4</sup> En anglais : *size*.

générale, pour un matériel expérimental d'une ampleur donnée, des unités expérimentales de dimensions aussi petites que possible.

Pour justifier ce principe, nous considérons à titre d'exemple le cas de lots d'animaux dont on pourrait supposer que les différents individus sont indépendants les uns des autres. Pour  $p$  lots de  $n$  animaux, en désignant par  $\sigma_A^2$  la variance entre lots et par  $\sigma^2$  la variance entre animaux dans les lots, on peut démontrer que la variance de la moyenne générale  $\bar{X}$  de tout ensemble de  $pn$  observations est [STAT2, § 9.3.4] :

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma_A^2/p + \sigma^2/(pn).$$

Pour un nombre donné d'animaux  $pn$  et pour autant que la variance  $\sigma_A^2$  ne soit pas nulle, la variance de la moyenne est donc minimale quand l'effectif  $n$  est égal à 1, c'est-à-dire quand chaque lot ne comporte qu'un seul animal.

Il est évident cependant que la constitution de lots plus nombreux, formés chacun d'un animal ou d'un très petit nombre d'animaux et devant être traités chacun individuellement, provoque généralement des dépenses ou des pertes de temps supplémentaires, qui peuvent éventuellement être chiffrées. On peut donc essayer de minimiser, non plus la variance de la moyenne, mais bien le coût total de l'opération [STAT2, § 9.4.4]. En général, cette seconde approche du problème ne modifie toutefois pas fondamentalement le principe énoncé ci-dessus.

De même, ce principe n'est pas modifié de façon sensible par le fait que les individus qui constituent une même unité expérimentale ne sont pas indépendants les uns des autres, comme peuvent l'être par exemple les différents animaux d'un même lot ou les différents arbres d'une même parcelle de verger ou de forêt.

## 2° Contingences pratiques

Par contre, diverses contingences pratiques s'opposent généralement de façon très nette à l'utilisation d'unités expérimentales de petites dimensions.

Il se peut par exemple que, dans une expérience relative à des animaux, on ne dispose pas d'un nombre suffisant de cages, de stalles ou de loges pour élever individuellement chacun des animaux ou pour constituer un grand nombre de lots d'effectif très réduit.

De même, dans une expérience en champ, en verger ou en forêt, la dimension des parcelles doit être suffisamment grande pour qu'on obtienne des résultats représentatifs (rendements par parcelle suffisamment élevés pour pouvoir être observés sans erreurs excessives, prélèvements d'échantillons suffisamment importants pour permettre la réalisation d'analyses foliaires, etc.). De plus, dans de nombreux cas, les parcelles doivent pouvoir être traitées à l'aide d'engins mécaniques (travail du sol, pulvérisation, etc.), qui nécessitent des étendues assez grandes, liées notamment au type de matériel utilisé.

### 3° Ordres de grandeur

En réalité, la dimension des unités expérimentales résulte le plus souvent d'un compromis entre les principes théoriques et les contingences pratiques. Bien qu'il n'existe aucune règle absolue en la matière, nous donnons quelques ordres de grandeur relatifs aux principaux types de productions végétales.

En horticulture (cultures maraîchères et cultures fruitières telles que le melon, le fraisier, etc.), sans utilisation de moyens mécaniques à l'intérieur des parcelles, on adopte souvent des dimensions de l'ordre du mètre carré ou de quelques mètres carrés, de manière à disposer d'au moins 4 à 10 plantes par parcelle.

En arboriculture fruitière, on serait tenté d'adopter la même norme de quatre plantes au moins par parcelle. Mais, avec des écartements de quelques mètres, on arrive rapidement à des parcelles de l'ordre de l'are et, de ce fait, à des expériences de très grande étendue. Aussi, doit-on fréquemment réduire le nombre d'arbres par parcelle, voire même utiliser des « parcelles » constituées d'un seul arbre et dites « mono-arbres ».

En grandes cultures et en cultures herbagères, on adopte souvent des dimensions qui sont de l'ordre de l'are ou de la dizaine d'ares, en relation notamment avec les moyens mécaniques utilisés.

En sylviculture enfin, les dimensions des parcelles sont extrêmement variables, en fonction de l'âge des peuplements considérés et de la durée des expériences. Les pépinières et les jeunes plantations s'apparentent respectivement à l'horticulture et à l'arboriculture fruitière, tandis que certaines expériences relatives à des peuplements forestiers âgés peuvent nécessiter des parcelles de 25 à 50 ares, voire même un hectare ou plus.

À ce propos, on se rappellera que les conditions mêmes dans lesquelles l'expérience est organisée constituent un élément important de la décision à prendre en ce qui concerne la dimension des parcelles (§ 1.2). La présence éventuelle de bordures, auxquelles est consacré le paragraphe suivant, est un autre élément de base de cette décision.

L'ensemble des photographies qui sont associées à ce texte et leurs légendes illustrent de différentes manières ce que peuvent être les « parcelles » des expériences agronomiques, en champ, en verger et en forêt, et leurs dimensions [DAGNELIE, 2009].

[ Le modèle de SMITH et l'analyse spatiale, dont il est question respectivement aux paragraphes 3.5.2 et 3.5.3, peuvent contribuer à la détermination de la dimension et aussi de la forme optimales des parcelles [BHATTI, 2005 ; FAGROUD et [ VAN MEIRVENNE, 2002].

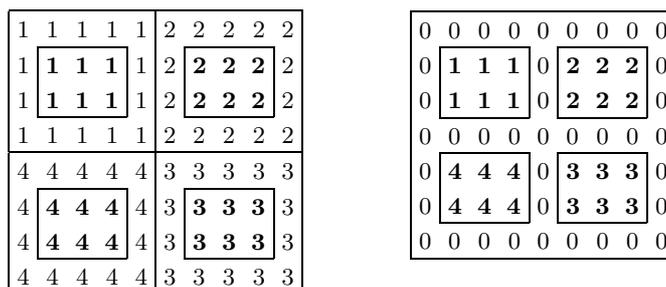
### 3.2.2 Les bordures et les périodes tampons

#### 1° Notion de bordure

Dans la plupart des expériences relatives aux productions végétales, des interférences plus ou moins importantes peuvent exister entre parcelles voisines, soit parce que les traitements appliqués aux différentes parcelles (épandages d'engrais, pulvérisations, etc.) ne s'arrêtent pas exactement aux limites des parcelles, soit parce que le système racinaire des plantes franchit tout naturellement ces limites, soit encore parce que se produisent des phénomènes particuliers de compétition ou de contagion entre plantes de parcelles contiguës.

Pour éviter que ces interférences n'influencent les résultats, on peut limiter l'observation à la partie centrale de chacune des parcelles, en considérant le pourtour comme constituant une simple *bordure*<sup>5</sup>.

La figure 3.2.1 indique ce que peuvent être la partie observée ou utile de quatre parcelles et leurs bordures, par exemple pour quatre variétés d'une même espèce végétale, les différentes variétés étant désignées par les chiffres 1, 2, 3 et 4.



**Figure 3.2.1.** Exemples de parcelles entourées de bordures de deux types différents.

Dans le premier cas, les chiffres qui apparaissent en caractères gras indiquent les plantes ou les arbres qui devront être mesurés, tandis que les chiffres ordinaires représentent les bordures, constituées des mêmes variétés mais ne devant pas être l'objet d'observations. Dans le deuxième cas, les mêmes chiffres gras indiquent toujours les plantes ou les arbres qui seront mesurés, et les « 0 » forment des lignes simples de bordures constituées d'une variété témoin. On notera que, dans ce deuxième cas, les individus « témoins » ne sont pas considérés, au sens du paragraphe 2.2.2, comme un objet supplémentaire qui sera observé et analysé au même titre que les autres objets.

<sup>5</sup> En anglais : *border, guard row*.

### 2° Dimensions des bordures

Les dimensions des bordures doivent toujours être fixées en tenant compte à la fois du matériel disponible et de l'importance des interférences qui peuvent exister entre les parcelles voisines.

Dans certains cas (arbres tout à fait isolés, dans un verger par exemple), il ne se justifie pas de prévoir quelque bordure que ce soit. Dans d'autres situations, par contre, il s'impose d'établir des bordures correspondant à une ou plusieurs lignes de plantation.

Mais il faut noter que toute bordure, aussi réduite soit elle, occupe rapidement une proportion importante du terrain disponible. Dans les deux exemples de la figure 3.2.1, cette proportion est respectivement de 70 et de 62 %, la surface utile des parcelles ne représentant que 30 et 38 % de la surface totale.

Aussi a-t-on souvent tendance, en pratique, à réduire et même à supprimer les bordures, alors que, cependant, des interférences entre objets voisins doivent de toute évidence être attendues. Tel est le cas notamment pour certaines expériences horticoles et forestières constituées de « parcelles » mono-arbres, essentiellement en raison du fait qu'on désire comparer par exemple un grand nombre (plusieurs dizaines) de variétés ou de provenances, et qu'il ne serait pas possible de prévoir, dans ces conditions, plusieurs répétitions de parcelles comportant chacune à la fois plusieurs arbres à mesurer et une bordure.

Nous reviendrons sur les problèmes d'interférences entre parcelles voisines au paragraphe 12.3.1.

### 3° Sentiers, chemins, etc.

Indépendamment des bordures dont chaque parcelle peut être pourvue individuellement, il est souvent nécessaire dans les expériences en champ, au sens large, de prévoir l'existence de sentiers ou de chemins d'accès et, parfois, d'une bordure générale isolant du milieu extérieur l'ensemble du terrain d'expérience. Ces différents éléments tendent à diminuer encore la proportion de la surface disponible qui est utilisée pour effectuer les observations.

Les photographies 2, 3, 4, 7 et 8 et leurs légendes [DAGNELIE, 2009] donnent diverses illustrations de ce que peuvent être les bordures, sentiers, etc. Les légendes de ces photographies fournissent en outre quelques indications complémentaires au sujet de la manière de délimiter, en pratique, les parcelles.

### 4° Productions animales

La notion de bordure peut être transposée au cas des expériences relatives aux animaux, si on considère comme analogues aux bordures les *périodes de transition* ou *tampons*<sup>6</sup>, d'adaptation à de nouvelles alimentations ou, d'une façon générale, à de nouveaux traitements.

---

<sup>6</sup> En anglais : *buffer interval*.

Pour un animal qui devrait être soumis par exemple à trois alimentations (1, 2 et 3), au cours de trois périodes consécutives de deux semaines, comportant chacune un temps d'adaptation de neuf jours et une période d'observation de cinq jours, on pourrait adopter le schéma suivant :

|                   |           |                   |           |                   |           |
|-------------------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|
| 2 2 2 2 2 2 2 2 2 | 2 2 2 2 2 | 1 1 1 1 1 1 1 1 1 | 1 1 1 1 1 | 3 3 3 3 3 3 3 3 3 | 3 3 3 3 3 |
|-------------------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|

dans lequel les chiffres ordinaires désignent les journées d'adaptation et les chiffres gras les journées d'observation.

On notera que, dans ce cas, l'unité expérimentale est en fait la période de deux semaines. Sa longueur peut être discutée dans les mêmes termes que les dimensions d'une parcelle d'expérience en champ.

### 5° Domaine médical

Des problèmes semblables se présentent aussi dans le domaine médical. Non seulement, il faut très souvent prévoir des périodes suffisantes d'adaptation et d'observation avant le début de tout traitement, mais en cas d'application successive de plusieurs traitements aux mêmes patients, il faut organiser en outre des périodes de transition, dites de *wash out*.

### 6° Domaine industriel et laboratoire

Enfin, les mêmes principes s'imposent dans le domaine industriel et en laboratoire, et cela d'autant plus que les différents objets sont souvent étudiés de façon consécutive, dans une même installation (un même four, un même incubateur, etc.). Il importe donc de prévoir des temps d'adaptation suffisants entre les différentes manipulations.

De plus, des problèmes de dimensions des unités expérimentales et de « bordures » ou de zones tampons peuvent également se présenter dans des installations telles que des frigos, des étuves, des séchoirs, etc.

## 3.3 La forme des unités expérimentales

### 1° Principes

Dans le cas des expériences en champ, au sens large, en même temps que la dimension des parcelles, il faut en définir la *forme*<sup>7</sup>.

Quand le terrain ou le matériel disponible est relativement homogène, il y a généralement intérêt à adopter une forme aussi carrée que possible. C'est en effet dans ce cas que les interférences entre parcelles voisines sont les plus réduites, et que l'importance relative des bordures éventuelles est la plus faible.

<sup>7</sup> En anglais : *shape*.

Si par contre, le terrain ou le matériel disponible présente une hétérogénéité marquée dans une direction donnée, il peut être plus intéressant d'adopter des parcelles rectangulaires, allongées parallèlement à la direction générale de cette hétérogénéité. L'appellation *gradient de fertilité*<sup>8</sup> est souvent appliquée à une telle hétérogénéité, même si les différences dites « de fertilité » résultent en fait de circonstances telles que, par exemple, des conditions variables de drainage ou d'alimentation en eau le long d'un terrain en pente, ou un gradient d'éclairement ou de température dans une serre ou une chambre de culture.

De même, quand le terrain présente ou risque de présenter une forte hétérogénéité « en taches », ce qui se produit fréquemment dans les régions de mise en culture récente (présence de souches ou de restes de souches, de termitières ou de restes de termitières, etc.), on adopte de préférence des parcelles de forme allongée, qui permettent de mieux recouper les zones de fertilités différentes.

Au chapitre 6, la figure 6.1.1 illustre le cas de parcelles rectangulaires, allongées parallèlement à un gradient de fertilité et la figure 6.5.1 présente un cas de parcelles approximativement carrées. D'autres exemples sont donnés par les photographies 1, 3, 7, 10, 15 et 16 et leurs légendes [DAGNELIE, 2009].

## 2° Contingences pratiques

Mais à ces principes généraux, s'opposent souvent, ici également, des contingences pratiques liées notamment à la mécanisation.

Dans de nombreux cas, la largeur des parcelles ou la largeur de leur partie utile est essentiellement fonction de la largeur de travail des outils de préparation du sol, de semis, de pulvérisation ou de récolte. Il en résulte fréquemment qu'en grandes cultures par exemple, les parcelles d'expériences sont très allongées.

On remarquera que cet allongement ne fait qu'augmenter encore l'importance relative des bordures éventuelles.

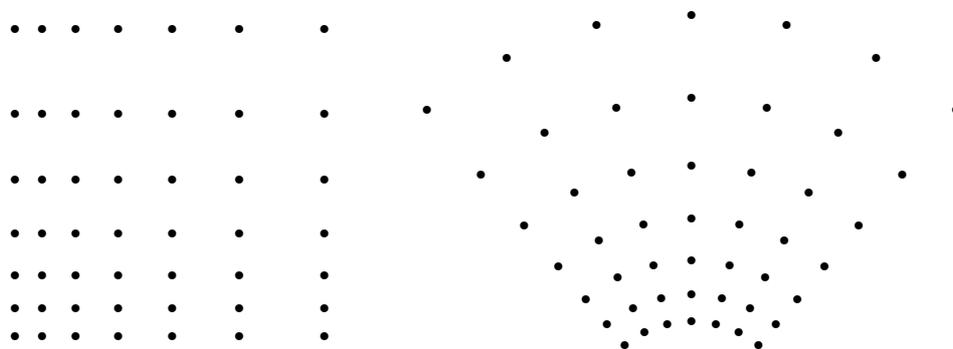
## ⊖ 3° Distances de plantation

Dans les expériences destinées à comparer différents *écartements* ou différentes *distances de plantation*<sup>9</sup>, le recours à des unités expérimentales comportant toutes le même nombre d'individus conduit inévitablement à l'adoption de parcelles de dimensions variables, qu'il est bien difficile d'agencer sur le terrain.

On remplace parfois de tels ensembles de parcelles par des unités qui réunissent, de façon progressive, les différents écartements étudiés. Il peut s'agir notamment de lignes de plantation inégalement espacées, dans une ou dans deux directions, ou de segments d'anneaux circulaires, au sein de chacun desquels les plantations sont faites aux intersections de rayons et de circonférences concentriques de plus en plus éloignées les unes des autres. La figure 3.3.1 donne deux exemples de telles dispositions.

<sup>8</sup> En anglais : *fertility gradient*, *fertility trend*.

<sup>9</sup> En anglais : *spacing*.



**Figure 3.3.1.** Exemples de « parcelles » destinées à la comparaison de différentes distances de plantation.

Dans les deux cas, en supposant que les croquis aient été dessinés à l'échelle de  $1/50$ , on trouve, outre une bordure constituée de 24 plantes, cinq lignes (droites ou courbes) de cinq plantes, qui peuvent être considérées comme étant distantes les unes des autres d'environ 20, 25, 32, 40 et 50 centimètres. Dans le premier cas, on obtient, à la fois, des systèmes de plantation carrés et rectangulaires (distances de plantation égales ou inégales, dans les deux directions), tandis que, dans le deuxième cas, les plantations peuvent être considérées comme « approximativement carrées » en chaque point (distances de plantation approximativement égales, en chaque point, dans toutes les directions).

Ces types particuliers d'unités expérimentales, qui ne sont évidemment pas faciles à installer sur le terrain, permettent de couvrir en une fois une gamme d'écartements dont les extrêmes sont ici dans le rapport de 1 à 2,5, et dont toutes les valeurs constituent une progression géométrique de raison :

$$\sqrt[4]{2,5} = 1,257.$$

Des informations complémentaires à ce sujet peuvent être trouvées notamment dans les articles de LIN et MORSE [1975] et NELDER [1962], et dans le livre de PEARCE [1976a]. Des dispositifs semblables ont également été utilisés en matière de fumures [CLEAVER *et al.*, 1970], et la question des données manquantes est abordée par BAR-HEN [2002].

## 3.4 Le nombre de répétitions

### 1° Principes

La définition des unités expérimentales, de leurs dimensions, etc. soulève inévitablement la question de la détermination du nombre d'unités expérimentales et du nombre de répétitions des différents objets.

Sur un plan théorique, le *nombre de répétitions* ou *répliques*<sup>10</sup> peut toujours être fixé de façon précise en fonction des objectifs poursuivis. Le plus souvent cependant, le nombre total d'unités expérimentales est strictement limité, selon les moyens disponibles (terrain disponible, nombre d'animaux disponibles, temps ou moyens financiers disponibles, etc.), et le nombre de répétitions qu'il est possible de réaliser en découle inévitablement. Il est important d'avoir alors, malgré tout, une idée de la précision qu'on peut espérer obtenir, en fonction des moyens mis en œuvre.

Nous ne présentons ici que quelques formules simples, qui ne fournissent en fait que des solutions approchées. Nous considérons toujours un niveau de probabilité ou un risque de première espèce  $\alpha$  égal à 0,05 (ou 5 %) et un risque de deuxième espèce  $\beta$  égal à 0,5 ou 0,1 (50 % ou 10 %) [STAT1, § 9.4.1, 10.3.1 et 10.4.1]. Différents logiciels généraux ou spécialisés permettent de traiter le problème de façon plus rigoureuse, éventuellement pour d'autres niveaux de probabilité ou risques d'erreurs.

[ La littérature relative aux nombres d'observations à réaliser est particulièrement abondante. Elle comprend notamment des ouvrages entièrement consacrés à ce sujet, dont ceux de KRAEMER et THIEMANN [1987], MACE [1964], et ODEH et FOX [1991], et des articles généraux, tels que ceux de LEE et ZELEN [2000], LENTH [2001], et PARKER et BERMAN [2003].

Dans l'optique des expériences adaptatives ou séquentielles, dont il a été question au paragraphe 2.4.4, la détermination des nombres d'observations peut aussi être réalisée ou précisée en cours d'expérience, ce qui soulève des questions particulières quant au choix des niveaux de signification et quant à la réalisation des tests d'hypothèses [CHANG *et al.*, 2006; DUNNIGAN et KING, 2010; FRIEDE et KIESER, 2006].

Enfin, le problème considéré ici ne se pose évidemment pas de la même manière dans le cas des expériences réalisées en une répétition unique ou une répétition partielle ou fractionnaire (§ 2.3.2.8° et 2.3.3.1°).

## 2° Estimation d'une moyenne

Comme point de départ, on peut rappeler que, dans le cas de l'estimation d'une moyenne, la détermination du nombre  $n$  d'observations peut se faire à l'aide de la relation approchée :

$$n \simeq 4 cv^2/d_r^2.$$

Dans cette relation,  $cv$  est le coefficient de variation de la variable considérée, et  $d_r$  l'erreur relative maximum ou la marge d'erreur relative qui est admise au niveau de probabilité 0,05,  $cv$  et  $d_r$  étant généralement exprimés en pourcentages de la moyenne [STAT2, § 8.2.3].

---

<sup>10</sup> En anglais : *replication*, *replicate*.

### 3° Comparaison de deux moyennes

En ce qui concerne la comparaison de deux moyennes, le problème peut être envisagé en termes de puissance, c'est-à-dire en fonction de la probabilité de mettre en évidence une différence donnée de moyennes [STAT1, § 10.4.1 et 10.4.2].

Les formules suivantes peuvent servir à déterminer de façon approchée les nombres d'observations qui correspondent à des puissances égales à 0,5 et 0,9, dans le cas d'échantillons indépendants, pour un niveau de signification égal à 0,05, et pour un coefficient de variation  $cv$  et une différence de moyennes  $\delta_r$ , également exprimés en valeurs relatives [STAT2, § 8.4.4] :

$$n \simeq 8 cv^2/\delta_r^2 \quad \text{et} \quad n \simeq 21 cv^2/\delta_r^2.$$

On remarquera donc qu'en matière de comparaison comme en matière d'estimation de moyennes, aucune décision ne peut être prise valablement en l'absence d'informations suffisantes relatives d'une part à la variabilité du matériel expérimental, et d'autre part aux risques d'erreurs qui sont considérés comme acceptables.

### 4° Comparaison de plusieurs moyennes

Pour plus de deux objets, le problème de la détermination du nombre de répétitions est plus délicat encore, car il fait intervenir en outre la répartition présumée des valeurs des différentes moyennes [STAT2, § 9.4.2 et 9.4.3].

On peut cependant admettre que la solution de ce problème est, d'une façon générale, du type :

$$n = k cv^2/\delta_r^2,$$

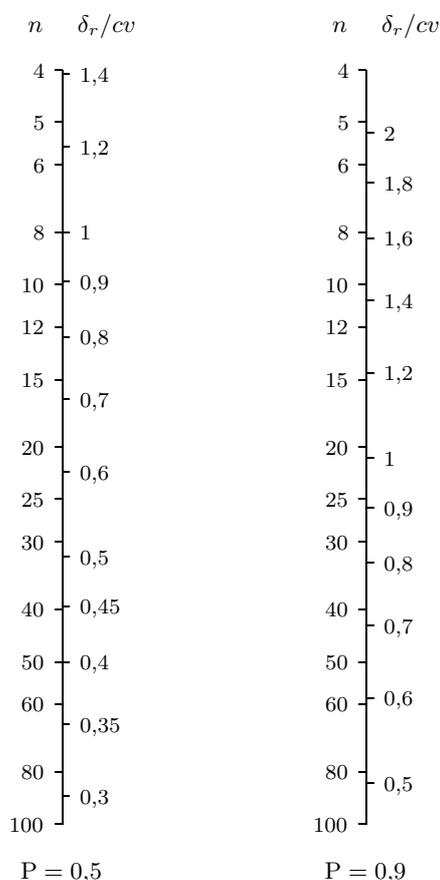
où  $cv$  et  $\delta_r$  sont, toujours en valeurs relatives, le coefficient de variation et la différence existant entre les moyennes extrêmes, et où  $k$  est un paramètre qui dépend des différents éléments considérés ci-dessus (risques d'erreur, répartition des moyennes, etc.).

Pour les besoins de la pratique, des indications assez précises peuvent être obtenues en admettant que, très souvent, la valeur de ce paramètre est de l'ordre de 10 pour une probabilité de mise en évidence des différences de moyennes égale à 0,5, et de l'ordre de 25 à 30 pour une probabilité égale à 0,9.

### 5° Précision à attendre

Le problème inverse, relatif à la détermination de la précision qu'on est en droit d'attendre, en fonction des moyens dont on dispose, peut être résolu en explicitant les formules précédentes par rapport à  $d_r$  ou  $\delta_r$ .

La figure 3.4.1 permet aussi de résoudre graphiquement ce problème dans le cas de deux moyennes et, d'une manière approchée au moins, pour plus de deux



**Figure 3.4.1.** Relation entre l'effectif  $n$  de chacun des échantillons et le rapport  $\delta_r/cv$ , dans le cas de la comparaison de deux ou, approximativement, de plus de deux moyennes, pour des probabilités de mise en évidence des différences égales à 0,5 et 0,9.

moyennes. Cette figure indique en effet, selon des échelles logarithmiques, les relations qui existent entre les effectifs  $n$  et les rapports  $\delta_r/cv$  dans les deux cas considérés ci-dessus :

$$n \simeq 8 cv^2/\delta_r^2 \quad \text{et} \quad n \simeq 21 cv^2/\delta_r^2,$$

$cv$  étant toujours le coefficient de variation et  $\delta_r$  l'amplitude des moyennes (différence entre les moyennes extrêmes), exprimés en valeurs relatives.

Si par exemple, on ne dispose que de 10 unités expérimentales pour chacun des objets considérés, le quotient  $\delta_r/cv$  est de l'ordre de 0,9 pour une probabilité égale

à 0,5, et 1,4 pour une probabilité égale à 0,9. C'est dire que, pour un coefficient de variation de 10 % par exemple, on ne peut espérer mettre en évidence que des différences de moyennes de l'ordre de 9 % avec une probabilité égale à 0,5, et 14 % avec une probabilité égale à 0,9.

Il n'est pas rare que, traité de cette façon, l'examen du problème que pose la détermination du nombre de répétitions conduise en fait à abandonner certains projets d'expériences, en raison de l'insuffisance du matériel ou du temps disponibles. Quand a priori, il n'y a guère d'espoir d'aboutir au moindre résultat satisfaisant, mieux vaut parfois, en effet, ne pas gaspiller les moyens limités dont on dispose.

À cet égard, on peut noter que le problème de la détermination du nombre de répétitions est en général traité de façon très stricte dans le domaine médical, les objectifs étant fixés de manière précise en termes d'erreurs de première et de deuxième espèce. Ce problème est par contre très souvent relativement négligé dans le domaine agronomique, de nombreuses expériences étant organisées en adoptant simplement les nombres « traditionnels » de quatre, cinq ou six répétitions. Enfin, le problème est largement passé sous silence dans le domaine industriel, où le nombre d'objets à étudier prend en général le pas sur le nombre de répétitions à réaliser.

### 6° Différents dispositifs expérimentaux

La question de la détermination du nombre de répétitions peut être abordée comme nous l'avons envisagé ci-dessus quel que soit le dispositif expérimental utilisé, le coefficient de variation  $cv$  étant toujours celui qui concerne la source de variation qui sert de base de comparaison, et l'effectif  $n$  étant toujours le nombre de termes qui interviennent dans les moyennes qu'on désire comparer.

Dans une expérience en blocs aléatoires complets par exemple (§ 6.1), pour un seul facteur,  $cv$  est le coefficient de variation relatif à l'interaction objets-blocs et  $n$  est le nombre de blocs. De même, dans le cas d'une expérience en blocs aléatoires complets avec parcelles divisées (§ 7.1.1.1°), comportant  $p$  modalités du facteur associé aux grandes parcelles,  $q$  modalités du facteur associé aux petites parcelles, et  $r$  blocs,  $cv$  est le coefficient de variation relatif à la « variation résiduelle 1 » en ce qui concerne le facteur associé aux grandes parcelles, et le coefficient de variation relatif à la « variation résiduelle 2 » en ce qui concerne le facteur associé aux petites parcelles (§ 7.2.1.1°), tandis que l'effectif  $n$  est en fait égal à  $qr$  pour le premier facteur et à  $pr$  pour le deuxième facteur.

### 7° Proportions ou pourcentages

Le problème de la détermination du nombre de répétitions ou d'observations peut se poser aussi pour d'autres paramètres que la moyenne, et notamment dans le cas des proportions ou des pourcentages [STAT2, § 5.2.3 et 5.4.6]. La question peut être traitée à l'aide d'abaques semblables à ceux de la figure 3.4.1 ou à l'aide de formules et de logiciels particuliers.

## 3.5 La variabilité du matériel expérimental

### 3.5.1 Principes généraux

#### 1° Connaissance de la variabilité

Les paragraphes précédents ont mis en évidence la nécessité de connaître de façon suffisamment précise la variabilité du matériel expérimental à étudier, pour pouvoir organiser valablement une expérience.

Dans certains cas, la connaissance de cette variabilité peut résulter d'expériences antérieures ou d'une étude bibliographique. On notera à ce sujet que des études particulières, malheureusement fort anciennes, ont été consacrées à la présentation d'ordres de grandeur de la variabilité d'expériences en champ [GARNER et WEIL, 1939; MA et HARRINGTON, 1948; NJOS et NISSEN, 1956; TERMAN, 1957]. Quelques indications relatives aux plantes de grandes cultures sont aussi données au paragraphe 11.1.3.2°.

Dans d'autres cas, cette connaissance peut exiger l'organisation préalable d'une *expérience pilote*<sup>11</sup>. On entend par là une expérience préliminaire mise sur pied de façon relativement sommaire, basée sur l'utilisation d'un nombre réduit d'unités expérimentales et faisant intervenir éventuellement un petit nombre d'objets.

#### 2° Expériences d'uniformité

Dans d'autres cas encore, l'étude de la variabilité du matériel expérimental peut se faire par la réalisation d'*expériences d'uniformité* ou *essais à blanc*<sup>12</sup>, c'est-à-dire d'expériences préalables organisées sur le lieu même de l'expérience principale qui doit être mise sur pied ultérieurement, dans les conditions normales de cette expérience, mais sans que n'intervienne aucune différence entre objets. Les observations sont alors faites sur les unités mêmes de l'expérience principale, si celles-ci ont déjà pu être définies, ou sinon sur des unités de très petites dimensions.

On peut assimiler aux expériences d'uniformité les mesures ou les observations qui sont parfois effectuées dans le cadre d'expériences normales, avant toute application de traitements ou d'objets différenciés, quels qu'ils soient. Tel est le cas de l'exemple présenté au paragraphe 3.6.

La réalisation d'expériences d'uniformité peut évidemment être longue et coûteuse, en particulier dans le domaine agronomique, puisqu'elle nécessite le plus souvent une ou même quelques saisons de culture. Elle peut cependant se justifier pleinement en vue de l'organisation d'expériences de longue durée (expériences de rotation en grandes cultures, expériences forestières, etc.).

La littérature statistique contient d'ailleurs également des listes d'expériences d'uniformité qui, comme les références citées ci-dessus, donnent des ordres de gran-

---

<sup>11</sup> En anglais : *pilot experiment*.

<sup>12</sup> En anglais : *uniformity experiment*.

deur de la variabilité de différents types de matériel expérimental [CLAUSTRIAUX et ROUSSEAUX, 1974; COCHRAN, 1937; PEARCE, 1976a; SMITH, 1938].

### ⊖ 3.5.2 L'étude de la variabilité par le modèle de SMITH

#### 1° Présentation du modèle

L'interprétation des résultats des expériences d'uniformité peut se faire en utilisant le *modèle de SMITH*<sup>13</sup> [1938], qui met en relation la dimension des unités expérimentales et leur variabilité.

Si on désigne par  $\sigma_1^2$  la variance relative aux parcelles unitaires sur lesquelles sont effectuées les observations initiales, par  $\sigma_2^2$  la variance des moyennes des observations relatives à des couples de parcelles voisines (soit des parcelles deux fois plus grandes), et d'une manière générale par  $\sigma_n^2$  la variance des moyennes des observations relatives à des ensembles de  $n$  parcelles contiguës (parcelles  $n$  fois plus grandes), le modèle de SMITH suppose que  $\sigma_n^2$  évolue de la façon suivante en fonction du nombre  $n$  de parcelles considérées simultanément :

$$\sigma_n^2 = \sigma_1^2 / n^\beta.$$

Le paramètre  $\beta$  est généralement compris entre 0 et 1, et mesure en fait le degré de dépendance qui existe entre les parcelles voisines. La valeur 1 correspond à la situation classique d'un échantillon aléatoire et simple :

$$\sigma_n^2 = \sigma_1^2 / n \quad \text{ou} \quad \sigma_X^2 = \sigma^2 / n,$$

pour lequel il n'existe aucune dépendance entre individus observés [STAT1, § 8.3.1]. La valeur 0 correspondrait au contraire au cas où l'augmentation de l'étendue des parcelles n'en modifierait pas la variabilité :

$$\sigma_n^2 = \sigma_1^2,$$

c'est-à-dire à la situation tout à fait théorique où le coefficient de corrélation entre parcelles voisines serait strictement égal à 1.

#### 2° Estimation du modèle

Par une double transformation logarithmique, on constate que le paramètre  $\beta$  se confond, au signe près, avec le coefficient de régression du logarithme des variances en fonction du logarithme du nombre d'unités expérimentales considérées simultanément :

$$\log \sigma_n^2 = \log \sigma_1^2 - \beta \log n.$$

<sup>13</sup> En anglais : SMITH's model, SMITH's variance law.

En pratique, une difficulté se présente toutefois dans l'estimation de ce coefficient de régression, en raison du fait que les variances  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots$  sont habituellement estimées à partir d'effectifs inégaux. En conséquence, il y a lieu de procéder ici à un calcul de régression pondérée [STAT1, § 4.7.6], les nombres de degrés de liberté des différentes variances étant considérés comme coefficients de pondération. Des formules de calcul particulières relatives à ce problème sont données par SMITH [1938], et aussi par CLAUSTRIAUX et ROUSSEAU [1974], FEDERER [1955], et HATHEWAY et WILLIAMS [1958].

### 3° Surface optimale

En outre, SMITH propose de déterminer la surface optimale des parcelles d'expérience en fonction des valeurs estimées du paramètre  $\beta$ .

Dans ce but, désignons par  $\hat{\beta}$  ces valeurs estimées, par  $c_1$  les frais fixes relatifs à toute parcelle d'expérience d'une certaine dimension (observations, analyses de laboratoires, etc.), et par  $c_2$  les dépenses relatives à toute parcelle unitaire minimale (coût du terrain, opérations culturales, etc.), c'est-à-dire aussi les dépenses qui interviendront de façon proportionnelle à l'étendue des parcelles d'expérience. La dimension optimale des parcelles, exprimée en nombre de parcelles unitaires, serait alors telle que :

$$n = \hat{\beta} c_1 / [(1 - \hat{\beta}) c_2].$$

Cette relation appelle cependant différents commentaires. D'une part, il faut faire remarquer qu'il n'est pas toujours facile d'estimer, même en valeur relative, les coûts  $c_1$  et  $c_2$ . D'autre part, il est possible de montrer que, dans la plupart des cas, on peut s'éloigner assez sensiblement de l'optimum théorique sans encourir de perte de précision importante, la perte de précision étant très limitée quand on se situe entre la moitié et le double de la surface optimale théorique [FEDERER, 1955; SMITH, 1938].

### 4° Compléments

Certaines situations tout à fait particulières peuvent également être envisagées. Tel est le cas notamment pour les expériences relatives aux cultures en terrasses [FIELDING et SHERCHAN, 1999; POULTNEY *et al.*, 1997].

En outre, il est bon de savoir que des analyses semblables à celles qui sont présentées ici peuvent être réalisées à partir des résultats d'expériences normales, faisant intervenir divers traitements ou objets, et non pas à partir des résultats d'expériences à blanc, en utilisant les résidus de l'analyse de la variance (§ 12.6.2°).

## ⊖ 3.5.3 L'étude de la variabilité par l'analyse spatiale

### 1° Corrélations et différences entre parcelles

D'autres approches, basées notamment sur le calcul des coefficients de corrélation ou des différences entre parcelles, ont aussi été proposées.

Le calcul des coefficients de corrélation entre parcelles peut être réalisé pour des séries (lignes ou colonnes) de parcelles contiguës, pour des séries de parcelles séparées par une seule série de parcelles intermédiaires, pour des séries de parcelles séparées par deux séries de parcelles intermédiaires, etc. La représentation graphique des différentes valeurs obtenues, en fonction des distances qui séparent les parcelles considérées, donne naissance à des *corrélogrammes*<sup>14 15</sup>.

D'une manière fort semblable, on peut calculer la moyenne des carrés des différences entre parcelles, pour des parcelles contiguës, pour des parcelles séparées par une seule série de parcelles intermédiaires, pour des parcelles séparées par deux séries de parcelles intermédiaires, etc. La représentation graphique des résultats obtenus, en fonction des distances qui séparent les parcelles, donne naissance à des diagrammes appelés *variogrammes*<sup>16</sup>.

Ce calcul peut éventuellement être remplacé par le calcul de la moitié des carrés des différences entre parcelles, les diagrammes obtenus étant alors qualifiés parfois de *semi-variogrammes*<sup>17</sup>.

D'une façon comme de l'autre, les valeurs calculées et les diagrammes correspondants peuvent donner des indications fort semblables à celles qui sont fournies par le modèle de SMITH.

Le qualificatif *spatial* est souvent associé aux analyses qui sont réalisées de la sorte (*analyse spatiale*<sup>18</sup>, *corrélation spatiale*<sup>19</sup>, *variation spatiale*<sup>20</sup>, etc.).

## 2° Champ aléatoire, géostatistique

L'étude des coefficients de corrélation et des différences entre parcelles peut conduire à la notion de *champ aléatoire*<sup>21</sup>, qui généralise la notion de processus aléatoire ou processus stochastique, relative aux modèles autorégressifs des séries chronologiques [STAT2, § 15.6.3]. Cette étude peut aussi faire intervenir les méthodes de la *géostatistique*<sup>22</sup> [CRESSIE, 1993; GOOVAERTS, 1997; SCHABENBERGER et GOTWAY, 2005].

On peut trouver des informations particulières relatives au cas des expériences en champ dans les travaux de BREWER et MEAD [1986], KRISTENSEN et ERSBØLL [1992], et MODJESKA et RAWLINGS [1983].

---

<sup>14</sup> En anglais : *correlogram*.

<sup>15</sup> Ces diagrammes sont semblables à ceux qui interviennent dans l'étude des séries chronologiques, pour les coefficients d'autocorrélation [STAT2, § 2.4.2].

<sup>16</sup> En anglais : *variogram*.

<sup>17</sup> En anglais : *semi-variogram*.

<sup>18</sup> En anglais : *spatial analysis*.

<sup>19</sup> En anglais : *spatial correlation*.

<sup>20</sup> En anglais : *spatial variation*.

<sup>21</sup> En anglais : *random field*.

<sup>22</sup> En anglais : *geostatistics*.

## 3.6 Exemple : expérience d'uniformité

### 3.6.1 Présentation et données

#### 1° Présentation

En vue d'illustrer les questions d'expériences d'uniformité, nous considérons le cas d'une plantation de thé relativement hétérogène, dans laquelle des chercheurs de l'Institut des Sciences agronomiques du Burundi envisageaient de comparer différentes fumures. Au moment où les observations dont il est question ici ont été réalisées, cette plantation était âgée d'une douzaine d'années et venait d'être remise à niveau<sup>23</sup>.

Outre une bordure générale, la plantation comportait 960 théiers, plantés à des écartements de 1,2 m sur 60 cm, l'étendue totale prise en considération étant donc de 28,8 m sur 24 m (soit 6,912 ares). À titre expérimental, les récoltes relatives aux *tippings* ont été réalisées pour des groupes de quatre plantes, en constituant des parcelles unitaires de 2,4 m sur 1,2 m, comme l'indique la figure 3.6.1.

#### 2° Données

Le tableau 3.6.1 contient les rendements obtenus pour chaque parcelle unitaire et pour l'ensemble des deux *tippings*, en tonnes par hectare.

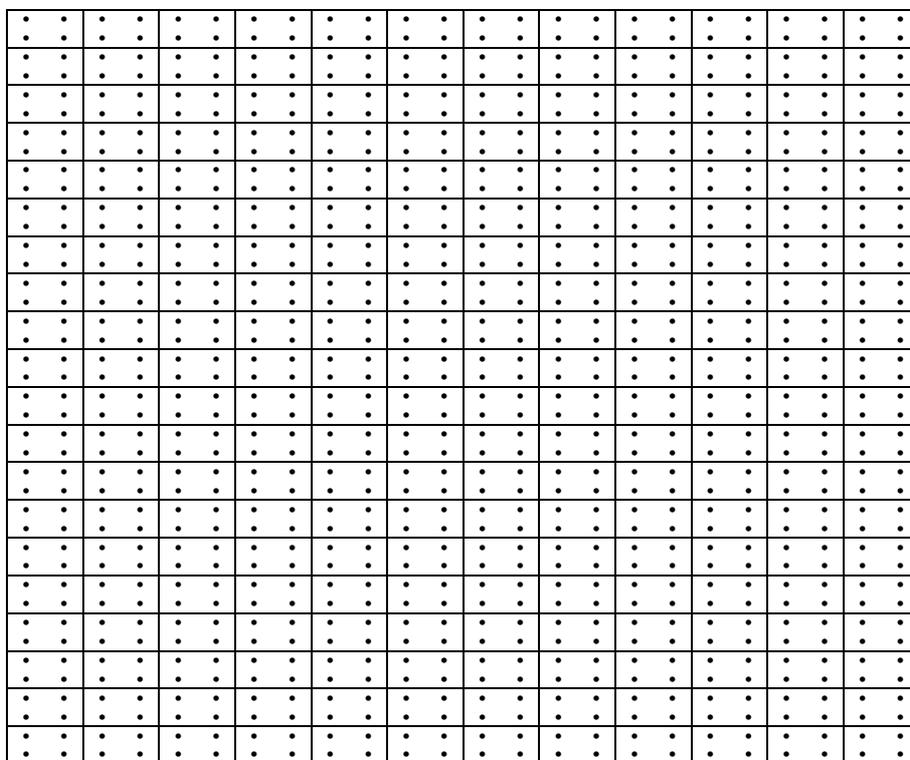
La figure 3.6.2 fournit une représentation graphique de ces observations sous forme de « *boxplot* »<sup>24</sup>. Elle met en évidence une certaine dissymétrie de la distribution des rendements, caractérisée notamment par la présence de quelques valeurs très élevées.

De plus, le calcul montre que le rendement moyen général est égal à 3,64 t/ha, avec une variance estimée égale à 3,49 (t/ha)<sup>2</sup>, un écart-type égal à 1,87 t/ha et un coefficient de variation égal à 51,4 %.

Un examen attentif du tableau 3.6.1 montre aussi que les rendements varient, en première approximation, dans un rapport de 1 à 3 ou 4 de gauche à droite et

<sup>23</sup> Le théier est une plante qui peut atteindre naturellement une dizaine de mètres de hauteur et qui est habituellement taillée de manière à constituer, entre 60 cm et 1 m de hauteur, une « table de cueillette » horizontale. Indépendamment de la cueillette proprement dite, qui porte sur les jeunes feuilles et se fait de façon régulière, la « table » doit être reconstituée périodiquement par une opération de taille ou de mise à niveau. Cette opération est normalement suivie, avant la reprise des cueillettes de production, par une ou deux cueillettes d'égalisation appelées *tippings*.

<sup>24</sup> Les « *boxplots* » que nous présentons ont été réalisés à l'aide du logiciel Minitab. Les deux « boîtes » centrales sont délimitées par la médiane  $\tilde{x}$  et les quartiles  $q_1$  et  $q_3$  [STAT1, § 3.6.4.]; les lignes qui prolongent les « boîtes » s'étendent jusqu'aux valeurs observées extrêmes comprises entre les limites  $q_1 - 1,5(q_3 - q_1)$  et  $q_3 + 1,5(q_3 - q_1)$ ; et les points isolés représentent les valeurs qui dépassent ces limites, d'un côté ou de l'autre. Sous l'hypothèse d'une distribution normale [STAT1, § 6.6.2], les limites considérées correspondent aux valeurs  $\bar{x} \pm 2,70 s$ ,  $\bar{x}$  étant la moyenne observée et  $s$  l'écart-type observé : seules 0,7 % des observations devraient alors se situer en dehors de ces limites.



**Figure 3.6.1.** Expérience d'uniformité sur théier : représentation schématique de la plantation (40 lignes  $\times$  24 colonnes) et des parcelles unitaires de quatre plantes.

dans un rapport de 1 à 1,5 ou 2 de haut en bas. Le tableau 3.6.2 et la figure 3.6.3 confirment cette double constatation.

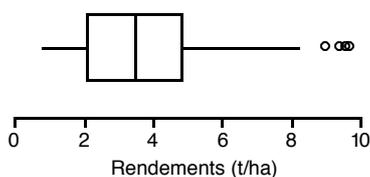
### ⊖ 3.6.2 Interprétation des résultats : modèle de SMITH

#### 1° Premiers regroupements

L'étude des résultats selon les principes développés par SMITH consiste à réunir, sur papier, les parcelles unitaires par groupes de 2, 3, 4, ..., et cela horizontalement ou verticalement, voire même dans les deux directions, et à recalculer dans chaque cas les rendements moyens par parcelle unitaire et leurs variances. Horizontalement par exemple, on obtient, pour des groupes de deux parcelles unitaires

**Tableau 3.6.1.** Expérience d'uniformité sur théier : rendements totaux des deux *tippings*, pour 240 parcelles unitaires de quatre théiers, en tonnes par hectare.

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 2,12 | 1,56 | 1,06 | 2,31 | 0,89 | 2,84 | 3,13 | 3,29 | 1,28 | 2,56 | 3,89 | 4,52 |
| 1,67 | 1,46 | 0,88 | 1,63 | 3,95 | 3,02 | 2,57 | 2,89 | 3,27 | 4,38 | 3,66 | 4,68 |
| 1,04 | 2,40 | 1,18 | 2,60 | 3,75 | 3,69 | 5,10 | 4,49 | 3,18 | 5,00 | 5,45 | 3,84 |
| 1,32 | 1,66 | 1,27 | 2,43 | 2,61 | 2,78 | 3,30 | 3,75 | 3,86 | 4,84 | 6,00 | 4,10 |
| 1,22 | 1,72 | 2,17 | 3,33 | 4,51 | 5,14 | 2,86 | 4,88 | 4,38 | 5,04 | 4,36 | 4,40 |
| 1,18 | 2,19 | 1,55 | 1,16 | 1,46 | 2,66 | 4,25 | 3,91 | 4,23 | 2,53 | 5,98 | 4,47 |
| 1,60 | 1,86 | 2,01 | 2,67 | 2,32 | 2,18 | 4,89 | 3,62 | 4,49 | 5,41 | 4,46 | 6,63 |
| 1,61 | 1,54 | 1,52 | 0,80 | 2,10 | 4,20 | 2,32 | 4,74 | 7,33 | 7,64 | 5,80 | 7,11 |
| 1,15 | 1,29 | 1,11 | 2,12 | 2,34 | 2,92 | 4,88 | 3,98 | 4,21 | 3,78 | 3,70 | 7,97 |
| 1,02 | 1,66 | 1,45 | 1,57 | 2,40 | 2,92 | 5,08 | 3,43 | 8,93 | 5,23 | 7,41 | 9,36 |
| 1,42 | 1,46 | 1,13 | 2,29 | 4,18 | 3,23 | 2,53 | 4,95 | 4,40 | 4,91 | 7,24 | 5,88 |
| 1,28 | 1,32 | 1,29 | 2,53 | 2,29 | 5,24 | 4,41 | 4,53 | 4,39 | 5,60 | 5,34 | 4,40 |
| 2,52 | 1,28 | 1,78 | 1,13 | 3,19 | 3,78 | 5,73 | 5,00 | 5,95 | 5,97 | 5,80 | 9,53 |
| 1,61 | 1,46 | 2,12 | 3,90 | 3,75 | 2,66 | 4,17 | 4,60 | 6,27 | 4,42 | 4,57 | 8,19 |
| 0,99 | 2,09 | 2,02 | 2,74 | 1,32 | 3,65 | 4,13 | 3,61 | 4,98 | 5,17 | 6,45 | 7,05 |
| 1,49 | 1,82 | 1,48 | 1,15 | 4,31 | 4,29 | 5,78 | 4,53 | 5,51 | 5,07 | 4,50 | 5,94 |
| 2,47 | 2,52 | 2,19 | 3,11 | 3,39 | 3,70 | 2,64 | 6,31 | 4,36 | 6,18 | 5,30 | 8,19 |
| 1,53 | 3,16 | 2,34 | 3,42 | 1,88 | 4,45 | 4,85 | 2,94 | 5,45 | 4,57 | 6,09 | 9,66 |
| 2,60 | 1,94 | 1,81 | 3,33 | 4,69 | 3,19 | 4,62 | 2,09 | 5,59 | 4,77 | 5,28 | 7,60 |
| 3,58 | 3,08 | 2,26 | 3,16 | 2,41 | 3,73 | 5,21 | 3,29 | 3,26 | 7,08 | 4,72 | 5,66 |



**Figure 3.6.2.** Expérience d'uniformité sur théier : présentation des rendements par parcelle sous forme de « *boxplot* ».

(huit théiers), les rendements moyens suivants :

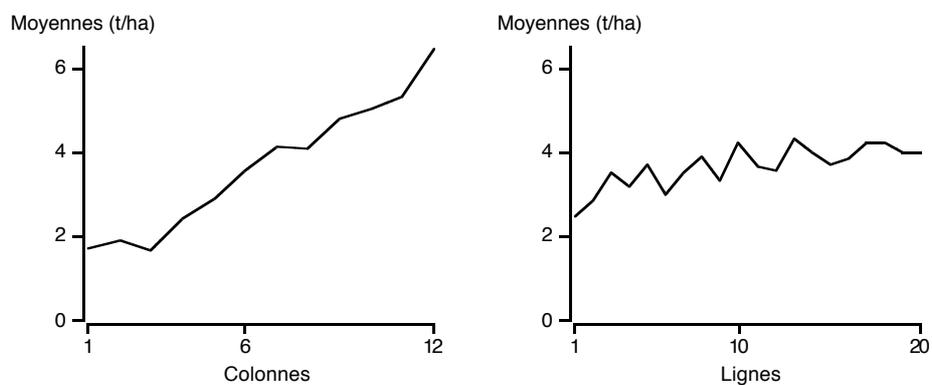
|      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
| 1,84 | 1,68 | 1,86 | 3,21 | 1,92 | 4,20 |
| 1,56 | 1,26 | 3,48 | 2,73 | 3,82 | 4,17 |
| ⋮    |      |      |      |      |      |

et pour des groupes de trois parcelles unitaires (12 théiers) :

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| 1,58 | 2,01 | 2,57 | 3,66 |
| 1,34 | 2,87 | 2,91 | 4,24 |
| ⋮    |      |      |      |

**Tableau 3.6.2.** Expérience d'uniformité sur théier : rendements moyens par colonne et par ligne (t/ha).

| N <sup>os</sup> des col.<br>ou lignes | Moyennes par |       |
|---------------------------------------|--------------|-------|
|                                       | colonne      | ligne |
| 1                                     | 1,67         | 2,45  |
| 2                                     | 1,87         | 2,84  |
| 3                                     | 1,63         | 3,48  |
| 4                                     | 2,37         | 3,16  |
| 5                                     | 2,89         | 3,67  |
| 6                                     | 3,51         | 2,96  |
| 7                                     | 4,12         | 3,51  |
| 8                                     | 4,04         | 3,89  |
| 9                                     | 4,77         | 3,29  |
| 10                                    | 5,01         | 4,21  |
| 11                                    | 5,30         | 3,64  |
| 12                                    | 6,46         | 3,55  |
| 13                                    | –            | 4,30  |
| 14                                    | –            | 3,98  |
| 15                                    | –            | 3,68  |
| 16                                    | –            | 3,82  |
| 17                                    | –            | 4,20  |
| 18                                    | –            | 4,20  |
| 19                                    | –            | 3,96  |
| 20                                    | –            | 3,95  |
| Moy. générale                         | 3,64         |       |



**Figure 3.6.3.** Expérience d'uniformité sur théier : évolution des rendements moyens par colonne et par ligne.

Les variances et les écarts-types correspondant à ces regroupements sont respectivement :

$$2,94 \text{ (t/ha)}^2 \quad \text{et} \quad 1,71 \text{ t/ha,}$$

ainsi que :

$$2,67 \text{ (t/ha)}^2 \quad \text{et} \quad 1,63 \text{ t/ha.}$$

## 2° Autres regroupements

D'une façon plus générale, le tableau 3.6.3 donne, pour une série de regroupements horizontaux et verticaux, les nombres de parcelles unitaires qui interviennent dans chaque parcelle obtenue par regroupement, les dimensions de ces parcelles, les nombres de théiers par parcelle, les nombres de parcelles, et les variances et écarts-types des rendements moyens par parcelle. Dans une direction comme dans l'autre, la réduction progressive de la variance et de l'écart-type en fonction de l'accroissement de l'étendue des parcelles se marque nettement, sans que cette réduction ne soit cependant considérable dans le cas présent.

**Tableau 3.6.3.** Expérience d'uniformité sur théier : résultats de différents regroupements des parcelles unitaires, par comparaison avec les valeurs correspondantes relatives aux parcelles unitaires elles-mêmes (ligne « 1 »).

| Nombres de parcelles unitaires | Dimensions des parcelles (m) | Nombres de théiers par parcelle | Nombres de parcelles | Variances (t/ha) <sup>2</sup> | Écarts-types (t/ha) |
|--------------------------------|------------------------------|---------------------------------|----------------------|-------------------------------|---------------------|
| 1                              | 2,4 × 1,2                    | 4                               | 240                  | 3,49                          | 1,87                |
| 2                              | 4,8 × 1,2                    | 8                               | 120                  | 2,94                          | 1,71                |
| 3                              | 7,2 × 1,2                    | 12                              | 80                   | 2,67                          | 1,63                |
| 4                              | 9,6 × 1,2                    | 16                              | 60                   | 2,64                          | 1,62                |
| 6                              | 14,4 × 1,2                   | 24                              | 40                   | 2,20                          | 1,48                |
| 12                             | 28,8 × 1,2                   | 48                              | 20                   | 0,25                          | 0,50                |
| 2                              | 2,4 × 2,4                    | 8                               | 120                  | 3,00                          | 1,73                |
| 4                              | 2,4 × 4,8                    | 16                              | 60                   | 2,70                          | 1,64                |
| 5                              | 2,4 × 6,0                    | 20                              | 48                   | 2,68                          | 1,64                |
| 10                             | 2,4 × 12,0                   | 40                              | 24                   | 2,50                          | 1,58                |
| 20                             | 2,4 × 24,0                   | 80                              | 12                   | 2,50                          | 1,58                |

En outre, on peut noter que cette diminution est plus importante pour les parcelles allongées horizontalement et qu'elle est même brutale pour les lignes complètes (parcelles de 28,8 m sur 1,2 m). Ces constatations sont liées aux fortes fluctuations observées de gauche à droite, et la brusque réduction de variance ne doit pas être considérée comme exceptionnelle [PEARCE, 1976b].

D'autres regroupements pourraient également être réalisés simultanément dans les deux directions (parcelles de 4,8 m sur 2,4 m, 7,2 m sur 2,4 m, etc.).

### 3° Ajustement du modèle

L'ajustement du modèle de SMITH (§ 3.5.2), mettant en relation par régression pondérée les logarithmes des nombres de parcelles unitaires (ou, ce qui est équivalent, les logarithmes des superficies des parcelles) et les logarithmes des variances (première et cinquième colonne du tableau 3.6.3), conduit aux estimations suivantes :

$$\widehat{\beta}_h = 0,506 \quad \text{et} \quad \widehat{\beta}_v = 0,150,$$

respectivement pour les parcelles allongées horizontalement et verticalement. Ces valeurs confirment la plus grande variabilité observée dans une direction par rapport à l'autre.

On doit toutefois interpréter avec prudence la première valeur, en raison de la non-linéarité de la relation entre les deux caractéristiques prises en considération, qui résulte de la chute brutale de variance pour les parcelles de 28,8 m sur 1,2 m. En éliminant ce dernier type de parcelles, on obtient d'ailleurs un résultat sensiblement différent :

$$\widehat{\beta}_h = 0,236.$$

Cette faible valeur, comme celle obtenue pour les regroupements verticaux, donne une indication chiffrée de l'importance des fluctuations observées dans les deux directions, à l'intérieur du terrain d'expérience qui est considéré ici.

### 4° Surface des parcelles

D'autre part, ces faibles valeurs conduisent également à la conclusion qu'il y a vraisemblablement intérêt, en dehors de toute contingence pratique, à utiliser dans ce cas de très petites parcelles d'expérience. Des regroupements ne pourraient en effet se justifier, au point de vue théorique, que si la quantité :

$$\widehat{\beta} c_1 / [(1 - \widehat{\beta}) c_2]$$

atteignait ou dépassait la valeur 2. Pour un coefficient  $\widehat{\beta}$  égal à 0,236, une telle situation ne pourrait se présenter que si le rapport  $c_1/c_2$  (frais fixes, par parcelle d'expérience, sur frais variables, par parcelle unitaire) était de l'ordre de 6 au moins.

En raison de la présence de deux valeurs différentes du coefficient  $\beta$ , on pourrait envisager aussi de tenir compte simultanément des deux valeurs en utilisant un modèle de SMITH à deux dimensions :

$$\sigma_{n_h n_v}^2 = \sigma_1^2 / (n_h^{\beta_h} n_v^{\beta_v}),$$

dans lequel  $\sigma_{n_h n_v}^2$  désignerait la variance de grandes parcelles qui seraient constituées horizontalement de  $n_h$  parcelles unitaires et verticalement de  $n_v$  parcelles unitaires ( $n_h$  colonnes contiguës de  $n_v$  parcelles unitaires ou  $n_v$  lignes contiguës de  $n_h$  parcelles unitaires).

### ⊖ 3.6.3 Interprétation des résultats : analyse spatiale

#### 1° Corrélations et différences entre parcelles

Les observations présentées dans le tableau 3.6.1 peuvent aussi être traitées selon les principes d'analyse spatiale que nous avons esquissés au paragraphe 3.5.3. Dans cette optique, le tableau 3.6.4 donne les valeurs des coefficients de corrélation et des demi-moyennes des carrés des différences entre les parcelles qui occupent des lignes ou des colonnes plus ou moins éloignées les unes des autres.

**Tableau 3.6.4.** Expérience d'uniformité sur théier : coefficients de corrélation et demi-moyennes des carrés des différences entre parcelles, en fonction des distances qui les séparent <sup>25</sup>.

| Distances | Corrélations entre |        | Différences entre |        |
|-----------|--------------------|--------|-------------------|--------|
|           | colonnes           | lignes | colonnes          | lignes |
| 1         | 0,681              | 0,705  | 1,07              | 1,05   |
| 2         | 0,663              | 0,692  | 1,32              | 1,12   |
| 3         | 0,618              | 0,755  | 1,81              | 0,90   |
| 4         | 0,484              | 0,711  | 2,67              | 1,09   |
| 5         | 0,471              | 0,719  | 3,40              | 1,09   |
| 6         | 0,306              | 0,682  | 4,71              | 1,27   |
| 7         | 0,209              | 0,643  | 5,95              | 1,46   |
| 8         | 0,158              | 0,696  | 7,48              | 1,23   |
| 9         | 0,250              | 0,673  | 8,62              | 1,36   |
| 10        | 0,021              | 0,627  | 9,93              | 1,44   |
| 11        | 0,179              | 0,644  | 13,24             | 1,36   |
| 12        | –                  | 0,620  | –                 | 1,49   |
| 13        | –                  | 0,613  | –                 | 1,40   |
| 14        | –                  | 0,604  | –                 | 1,45   |
| 15        | –                  | 0,534  | –                 | 1,62   |
| 16        | –                  | 0,564  | –                 | 1,73   |
| 17        | –                  | 0,640  | –                 | 1,55   |
| 18        | –                  | 0,528  | –                 | 1,77   |
| 19        | –                  | 0,654  | –                 | 1,68   |

À la première ligne de ce tableau, la valeur 0,681 est le coefficient de corrélation entre les rendements des parcelles qui sont contiguës horizontalement (corrélation entre 2,12 et 1,56, 1,67 et 1,46, ..., 1,56 et 1,06, 1,46 et 0,88, ..., 1,06 et 2,31, 0,88 et 1,63, ..., si on se réfère au tableau 3.6.1). La valeur 1,07 est la moitié de la moyenne des carrés des différences de rendement entre les mêmes parcelles. Et les valeurs 0,705 et 1,05 sont obtenues de la même façon pour les parcelles contiguës

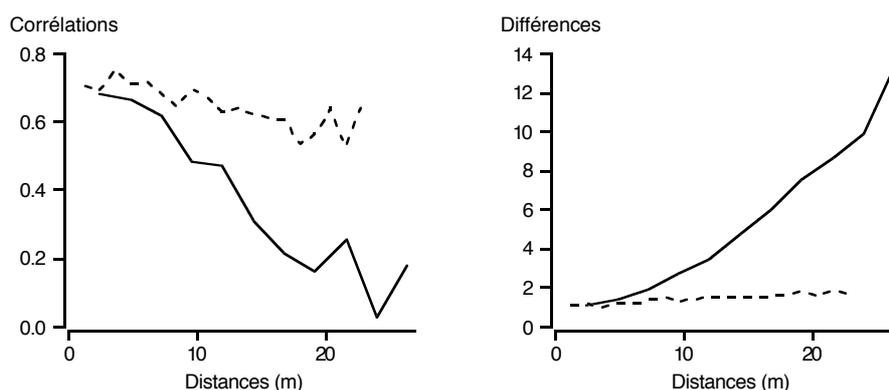
<sup>25</sup> Les distances sont exprimées en termes de longueur et de largeur des parcelles, et non pas en mètres (une distance « 1 » correspond au cas de parcelles contiguës, une distance « 2 » au cas de parcelles séparées par une seule colonne ou une seule ligne de parcelles intermédiaires, etc.).

verticalement (corrélation et différences entre 2,12 et 1,67, 1,56 et 1,46, ..., 1,67 et 1,04, 1,46 et 2,40, ..., 1,04 et 1,32, 2,40 et 1,66, ...).

À la deuxième ligne du tableau 3.6.4, les valeurs concernent les parcelles qui sont séparées chaque fois par une seule parcelle intermédiaire (2,12 et 1,06, 1,67 et 0,88, ..., 1,56 et 2,31, 1,46 et 1,63, ..., d'une part, 2,12 et 1,04, 1,56 et 2,40, ..., 1,67 et 1,32, 1,46 et 1,66, ..., d'autre part). Et il en est de même pour les lignes suivantes, avec des distances de plus en plus grandes entre parcelles. Les dernières valeurs 0,179 et 0,654 sont les coefficients de corrélation entre, respectivement, les rendements des parcelles des deux colonnes extrêmes et les rendements des parcelles des deux lignes extrêmes du tableau 3.6.1, tandis que les valeurs 13,24 et 1,68 sont les demi-moyennes des carrés des différences entre les rendements de ces mêmes parcelles.

## 2° Corrélogrammes et semi-variogrammes

La figure 3.6.4 présente le contenu du tableau 3.6.4 sous forme graphique. Il s'agit d'une part de deux corrélogrammes et d'autre part de deux semi-variogrammes.



**Figure 3.6.4.** Expérience d'uniformité sur théier : évolution des coefficients de corrélation et des demi-moyennes des carrés des différences entre parcelles, en fonction des distances qui les séparent horizontalement (lignes continues) et verticalement (lignes discontinues)<sup>26</sup>.

En ce qui concerne les corrélations entre colonnes, les valeurs obtenues diminuent rapidement et de manière sensiblement linéaire<sup>27</sup>. Au contraire, les corré-

<sup>26</sup> Les distances sont exprimées ici en mètres et sont mesurées de centre de parcelle à centre de parcelle, soit par exemple 2,4 m horizontalement et 1,2 m verticalement dans le cas de parcelles contiguës.

<sup>27</sup> On notera qu'il n'y a pas lieu d'accorder une attention particulière aux irrégularités que présente l'extrémité droite du graphique, les points qui y figurent étant relatifs à des coefficients de corrélation obtenus à partir de petits nombres d'observations.

lations entre lignes évoluent peu, essentiellement en raison du parallélisme entre les lignes, qui est induit par les fortes différences entre colonnes (tableau 3.6.2 et figure 3.6.3).

Quant aux demi-moyennes des carrés des différences entre colonnes d'une part et entre lignes d'autre part, le tableau 3.6.4 et la figure 3.6.4 confirment ce qui a été observé antérieurement, à savoir les fortes différences entre les colonnes et les différences nettement moindres entre les lignes (tableau 3.6.2 et figure 3.6.3).

### 3° Étude géostatistique

Les demi-moyennes des carrés des différences entre les colonnes et entre les lignes, qui constituent les semi-variogrammes de la partie droite de la figure 3.6.4, sont normalement le point de départ d'une éventuelle étude géostatistique. Toutefois, une telle étude suppose que les observations prises en considération ne présentent aucune tendance générale croissante ou décroissante, dans l'une ou l'autre direction, ce qui n'est manifestement pas le cas pour l'exemple étudié.

Les tendances observées doivent en conséquence être éliminées par régression, en exprimant les rendements en fonction des coordonnées des parcelles, et l'étude géostatistique peut alors être envisagée pour les résidus de la régression.

Dans le cas présent, la régression linéaire suivante s'avère satisfaisante :

$$y = 0,409 + 0,179 x_h + 0,0536 x_v ,$$

$y$  représentant les rendements (en t/ha), et  $x_h$  et  $x_v$  les coordonnées horizontales et verticales des centres des parcelles (en m), ces coordonnées étant mesurées à partir du coin supérieur gauche du dispositif. La variance résiduelle relative à cette équation de régression est égale à  $1,14$  (t/ha)<sup>2</sup>, alors que la variance initiale était égale à  $3,49$  (t/ha)<sup>2</sup>.

Le calcul des demi-moyennes des carrés des différences à partir des résidus de la régression ne fournit cependant guère d'informations complémentaires. Les variogrammes obtenus à partir des résidus se situent en effet au niveau de la variance résiduelle et ne présentent aucune tendance marquée supplémentaire. Il faut en conclure qu'il n'y a aucune irrégularité importante ou structure spatiale particulière en dehors des tendances générales linéaires<sup>28</sup>.

---

<sup>28</sup> Nous remercions cordialement Patrick BOGAERT (Université catholique de Louvain, à Louvain-la-Neuve, Belgique) pour l'aide qu'il nous a apportée dans le traitement numérique de cet exemple.



# Chapitre 4

## Les observations

### Sommaire

4.1 Différents types d'observations

4.2 La nature et l'enregistrement des observations

## 4.1 Différents types d'observations

### 1° Observations principales

Les observations qui sont faites au terme de l'expérience et qui sont directement liées à son ou à ses objectifs sont généralement considérées comme étant les *observations principales*<sup>1</sup>. Ces observations peuvent être relatives à une ou à plusieurs variables ou caractéristiques.

Il peut s'agir, dans le domaine agronomique notamment, de rendements, de croissances en poids ou en hauteur, de teneurs en l'un ou l'autre élément, etc. Plus spécifiquement par exemple, dans le cas d'expériences relatives à la betterave sucrière, les principales variables habituellement considérées sont le rendement en racines (quantité de betteraves produite à l'hectare), la teneur en sucre ou richesse saccharine des betteraves, et le rendement en sucre (quantité de sucre produite à l'hectare), cette dernière variable résultant de la multiplication des deux premières.

[ Au même titre que les facteurs pris en considération dans une expérience peuvent être qualifiés de paramètres d'entrée, variables explicatives, etc. (§ 2.1.1.5°), les variables observées au terme de l'expérience sont parfois appelées *paramètres de sortie* ou *observés, variables dépendantes* ou *expliquées, variables cibles, réponses*, etc.<sup>2</sup> ]

### 2° Observations initiales

Des *observations préliminaires* ou *initiales*<sup>3</sup> peuvent aussi être réalisées avant ou au début de l'expérience. Ces observations sont essentiellement destinées à pouvoir disposer d'un certain nombre d'informations relatives aux différentes unités expérimentales avant tout traitement.

De telles observations sont particulièrement importantes dans le domaine médical (caractérisation des différents patients avant l'expérience) et en expérimentation animale (poids initial des animaux par exemple). Dans le domaine médical, ces observations définissent ce qui est souvent appelé la *ligne de base*<sup>4</sup> de l'expérience.

### 3° Observations et analyses intermédiaires

Dans certains cas, des *observations intermédiaires* ou *intérimaires*<sup>5</sup> sont également réalisées à un ou à plusieurs moments différents, durant l'expérience. Il peut s'agir de variables ou de caractéristiques différentes de celles qui doivent être observées au terme de l'expérience (germination, croissance et différents stades du développement des plantes par exemple, dans les expériences de productions

<sup>1</sup> En anglais : *main observation, primary observation*.

<sup>2</sup> En anglais : *dependent variable, output, response, etc.*

<sup>3</sup> En anglais : *preliminary observation, initial observation*.

<sup>4</sup> En anglais : *baseline*.

<sup>5</sup> En anglais : *intermediate observation, interim observation*.

végétales), ou d'observations qui portent au contraire sur les mêmes variables qu'au terme de l'expérience.

Ce dernier aspect est spécialement important dans le domaine médical, en relation notamment avec les problèmes éthiques sous-jacents. Des analyses statistiques comparables aux analyses finales, et dites *analyses intermédiaires* ou *intérimaires*<sup>6</sup>, sont en effet fréquemment réalisées à partir d'observations récoltées en cours d'expérience. Ces analyses peuvent alors conduire soit à une interruption de l'expérience, soit à une réévaluation de son ampleur, par une nouvelle détermination de sa durée ou du nombre de patients à prendre en considération, par exemple.

Il est évident que les conditions de réalisation de telles analyses et les éventuelles *règles d'arrêt*<sup>7</sup> des expériences doivent être clairement définies dès le départ. En particulier, des questions d'adaptation des niveaux de signification des tests d'hypothèses doivent être envisagées, en vue de tenir compte notamment de la réalisation de tests multiples [STAT1, § 10.3.5].

#### 4° Autres observations

Toutes les observations dont nous avons parlé jusqu'ici concernent les unités expérimentales elles-mêmes. Il faut y ajouter des observations relatives aux conditions dans lesquelles l'expérience se déroule.

Ces *observations de contrôle*<sup>8</sup> doivent porter à la fois sur les facteurs qui sont étudiés et sur les facteurs constants de l'expérience (§ 2.1.1.3°). On peut citer comme exemples, en ce qui concerne les facteurs qui sont étudiés, la température et la pression du fermenteur dans lequel l'expérience serait réalisée (culture de levures notamment), et en ce qui concerne les facteurs constants, la température et l'humidité, supposées constantes, du local dans lequel seraient effectués des essais de résistance de différents matériaux (bois ou matériaux à base de bois, etc.).

Indépendamment de ces observations de contrôle, qui sont normalement prévues dès la planification de l'expérience, il est essentiel de prendre note également, de façon précise, de tous les incidents ou accidents qui peuvent se produire en cours d'expérience (inondation de certaines parcelles ou dégâts de gibier dans un champ d'expérience, par exemple). Les constatations faites en ce qui concerne de tels incidents ou accidents peuvent en effet servir à expliquer, le cas échéant, certaines anomalies qui pourraient être constatées en fin d'expérience.

D'une manière générale, tout écart par rapport au protocole expérimental initial doit être soigneusement noté.

---

<sup>6</sup> En anglais : *intermediate analysis, interim analysis*.

<sup>7</sup> En anglais : *stopping rule*.

<sup>8</sup> En anglais : *check observation*.

### 5° Utilisation des observations complémentaires

Les diverses observations complémentaires (observations initiales et intermédiaires, observations relatives à d'éventuelles anomalies, etc.) peuvent souvent être utilisées comme variables auxiliaires ou covariables dans des analyses de la covariance réalisées au cours ou au terme de l'expérience (§ 12.4.2). Elles sont susceptibles d'améliorer ainsi sensiblement la précision des résultats fournis par l'expérience.

## 4.2 La nature et l'enregistrement des observations

### 1° Nature des observations

Il est bon d'avoir toujours en tête les distinctions qui doivent être faites entre les observations ou les données de différentes natures [STAT1, § 2.4.1]. Il s'agit tout d'abord de la distinction entre *données quantitatives*<sup>9</sup> et *données qualitatives*<sup>10</sup>.

Les données quantitatives peuvent être subdivisées elles-mêmes en *mesures* ou *mesurations*<sup>11</sup> d'une part, de type continu, et *dénombrements* ou *comptages*<sup>12</sup> d'autre part, de type discontinu.

Quant aux données qualitatives, une distinction doit être faite entre données *binaires*<sup>13</sup> (présence ou absence d'un certain symptôme par exemple), données *ordinales*<sup>14</sup>, constituées de différents niveaux logiquement ordonnés d'un même caractère (différents degrés d'attaque d'un même parasite par exemple), et données *nominales*<sup>15</sup>, constituées de différents états d'un même caractère non susceptibles d'être logiquement ordonnés (différentes couleurs non ordonnées par exemple).

Il faut y ajouter le cas particulier des *rangs*<sup>16</sup>, qui résultent d'un simple classement d'un certain nombre d'individus, sans aucune attribution à chacun d'eux d'une note ou de toute autre appréciation.

### 2° Enregistrement des observations

Les diverses observations peuvent être enregistrées de façon visuelle et au moins partiellement manuelle, ou de manière automatique. Il peut s'agir plus particulièrement soit d'un enregistrement entièrement manuel, sur des documents de type « papier » (*formulaires* ou *fiches de terrain*<sup>17</sup>, et *cahiers* ou *livres de champ* ou

---

<sup>9</sup> En anglais : *quantitative data*.

<sup>10</sup> En anglais : *qualitative data*.

<sup>11</sup> En anglais : *measurement*.

<sup>12</sup> En anglais : *enumeration, counting*.

<sup>13</sup> En anglais : *binary data*.

<sup>14</sup> En anglais : *ordinal data*.

<sup>15</sup> En anglais : *nominal data*.

<sup>16</sup> En anglais : *rank*.

<sup>17</sup> En anglais : *form*.

*de laboratoire*<sup>18</sup>), soit d'un enregistrement manuel réalisé immédiatement sur un support informatique (ordinateur ou autre matériel équivalent), soit encore d'un enregistrement tout à fait automatique (balance ou spectromètre par exemple, connecté à un ordinateur) [STAT1, § 2.4.2].

Quelles que soient les modalités adoptées, les observations doivent toujours être collectées avec le plus grand soin, selon des procédures bien définies. Il peut être opportun notamment de concevoir dès la planification de l'expérience des *cadres* ou des *fenêtres*<sup>19</sup> de saisie des données.

En particulier, il y a lieu bien sûr de préciser de manière non équivoque les unités de mesure et les dates ou les stades de développement (de certaines maladies ou des plantes, par exemple), auxquels les observations doivent être réalisées. Il faut être attentif également au réglage et à l'étalonnage des appareils de mesure, aux modalités d'utilisation de ces appareils, etc.

### 3° Échelles d'observation

La définition des observations doit être considérée avec une attention toute spéciale lors de l'utilisation d'*échelles*<sup>20</sup>, qui peuvent correspondre au cas des données qualitatives ordinales.

En ce qui concerne l'*analyse* ou les *épreuves sensorielles*<sup>21</sup> notamment, diverses possibilités peuvent être envisagées et doivent faire l'objet d'un choix judicieux, adapté aux buts et aux conditions de l'expérience [DELVAUX, 1992; DEPLEDT, 2009; SVENSSON, 2000; URDAPILLETA *et al.*, 2001].

On peut tout d'abord demander aux évaluateurs ou juges de classer simplement un certain nombre de produits selon un ou plusieurs critères différents, les résultats étant alors des rangs. On peut aussi leur demander de cocher l'une ou l'autre de différentes mentions qui leur sont proposées, telles qu'en matière de goût, « très désagréable », « désagréable », « moyen », « agréable » et « très agréable », comme le montre la première partie de la figure 4.2.1. Dans certaines limites, les résultats obtenus de cette manière peuvent ensuite être éventuellement codés par exemple de 1 à 5.

Une autre solution, qu'illustre la deuxième partie de la figure 4.2.1, peut être de demander d'indiquer une réponse sous la forme d'un trait à porter sur une échelle graduée, le plus souvent de 1 à 7 ou de 1 à 9, qui comporte un certain nombre de mentions pouvant servir de repères. Toutes les valeurs allant de 1 à 9 dans l'exemple considéré, même non entières et alors exprimées sous forme décimale, peuvent se présenter et doivent être acceptées dans ce cas.

La dernière possibilité que nous évoquons est celle qui consiste à demander d'indiquer un trait sur une échelle non graduée et portant seulement, à ses extré-

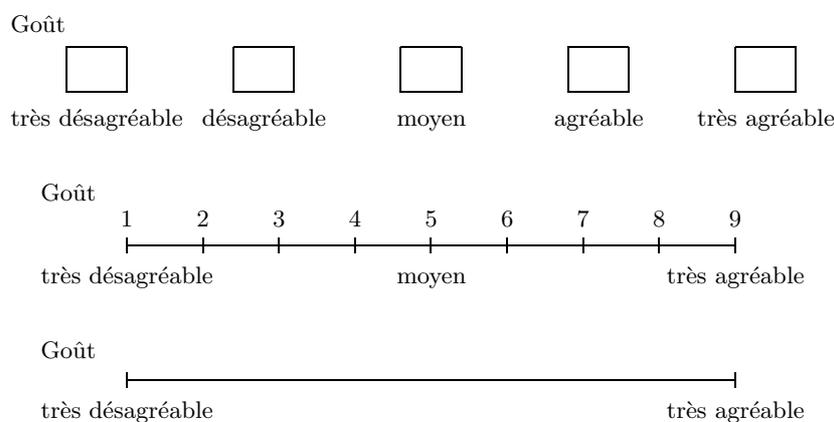
---

<sup>18</sup> En anglais : *field book*, *lab book*.

<sup>19</sup> En anglais : *frame*.

<sup>20</sup> En anglais : *scale*.

<sup>21</sup> En anglais : *sensory analysis*, *sensory evaluation*.



**Figure 4.2.1.** Exemples d'échelles pouvant être utilisées en analyse sensorielle.

mités, des indications telles que « très désagréable » d'une part et « très agréable » d'autre part (troisième partie de la figure 4.2.1). L'échelle en question peut se voir attribuer ultérieurement des valeurs numériques, allant par exemple de 0 à 1 ou à 10, ou aussi de 1 à 7 ou de 1 à 9, et les résultats sont alors exprimés sous la forme de nombres décimaux se situant entre ces valeurs extrêmes.

#### 4° Échantillonnage

Dans certains cas, les observations ne portent pas sur la totalité de chacune des unités expérimentales, mais bien sur certains sous-ensembles. On peut citer par exemple l'analyse physique ou chimique d'échantillons de terre prélevés dans les différentes parcelles d'un champ d'expérience, l'observation de quelques feuilles ou quelques fruits d'une plante ou d'un groupe de plantes de chacune des parcelles, l'analyse de prélèvements sanguins ou urinaires, etc.

Le processus d'*échantillonnage*<sup>22</sup> qui intervient dans un tel cas doit être clairement défini dans le protocole expérimental, et ce processus doit évidemment être scrupuleusement respecté au cours de l'expérience [STAT1, § 2.2].

#### 5° Contrôle, traitement et sauvegarde des observations

L'enregistrement des données doit toujours être complété par un contrôle strict de celles-ci, ce contrôle pouvant être lui aussi soit visuel, soit réalisé selon des procédures automatiques. Les contrôles qui sont ainsi effectués doivent éventuellement permettre, selon des règles précises, d'apporter certaines corrections aux données collectées.

Quant au traitement ultérieur des observations ou des données, nous rappelons simplement quelques précautions qu'il est indispensable de prendre : procéder

<sup>22</sup> En anglais : *sampling*.

toujours à un examen critique des données prises en considération, vérifier soigneusement toutes les transcriptions éventuelles (y compris tout encodage manuel sur ordinateur ou support informatique, etc.), être particulièrement circonspect quant à la validité de tout enregistrement ou traitement automatique des données, n'utiliser que des méthodes d'analyse bien connues, vérifier systématiquement les conditions d'application de ces méthodes, etc. [STAT1, § 2.4.2 ; STAT2, concl.].

Enfin, il importe de prévoir également dès le départ la sauvegarde ou l'archivage des données, en vue de pouvoir effectuer, si cela s'avère nécessaire, des contrôles ou des analyses complémentaires, et aussi dans l'optique d'une possible utilisation lors de la planification d'expériences ultérieures.



# Chapitre 5

## Les expériences complètement aléatoires

### Sommaire

#### 5.1 Principes

#### 5.2 Analyse des résultats

#### 5.3 Discussion

#### 5.4 Exemple 1 : expérience complètement aléatoire à deux facteurs

##### 5.4.1 Présentation et données

##### 5.4.2 Analyse des résultats

##### 5.4.3 Importance de la randomisation

#### 5.5 Exemple 2 : expérience complètement aléatoire à quatre facteurs

##### ⊖ 5.5.1 Présentation et données

##### ⊖ 5.5.2 Interprétation des résultats : analyse de la variance

##### ⊖ 5.5.3 Interprétation des résultats : demi-diagramme de probabilité

##### ⊖ 5.5.4 Interprétation des résultats : régression multiple

##### ⊖ 5.5.5 Étude de deux expériences factorielles fractionnaires

## 5.1 Principes

### 1° Notion d'expérience complètement aléatoire

Une première manière de se prémunir contre d'éventuelles fluctuations des facteurs non contrôlés, dans l'espace et/ou dans le temps, est de procéder à une affectation complètement aléatoire des différents objets aux différentes unités expérimentales. Cette opération de répartition « au hasard » est appelée *randomisation* ou, plus rarement, *casualisation*<sup>1</sup>.

Les dispositifs expérimentaux conçus de cette manière sont dits *aléatoires* ou *complètement aléatoires*, ou encore *randomisés* ou *complètement randomisés*<sup>2</sup>. La figure 5.1.1 en présente deux exemples.

|   |    |   |    |   |    |   |    |
|---|----|---|----|---|----|---|----|
| 4 | 1  | 5 | 2  | 4 | 3  | 4 | 4  |
| 3 | 5  | 2 | 6  | 2 | 7  | 4 | 8  |
| 1 | 9  | 5 | 10 | 5 | 11 | 3 | 12 |
| 1 | 13 | 2 | 14 | 2 | 15 | 3 | 16 |
| 3 | 17 | 1 | 18 | 5 | 19 | 1 | 20 |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 22 | 23 | 23 | 11 | 13 | 22 | 21 | 33 | 13 | 32 | 12 | 31 | 33 | 11 | 12 | 21 | 32 | 31 |

**Figure 5.1.1.** Exemples d'expériences complètement aléatoires.

La première partie de cette figure illustre ce que peut être une expérience en champ qui comporterait cinq objets, numérotés de 1 à 5, et quatre répétitions de chacun des objets. Les numéros des objets sont indiqués au centre des parcelles, de forme rectangulaire, et les numéros des parcelles dans leur coin inférieur droit. L'objet 1 est ainsi affecté aux parcelles 9, 13, 18 et 20, etc.

La deuxième partie de la figure 5.1.1 correspond au cas d'une expérience factorielle  $3^2$  (§ 2.3.2), comportant donc neuf objets, avec deux répétitions. On suppose ici que les 18 essais individuels (9 objets  $\times$  2 répétitions) doivent être effectués successivement, par exemple dans un même four ou un même fermenteur. Les premiers numéros sont les numéros d'ordre des essais, et les seconds numéros les numéros des objets, exprimés comme au paragraphe 2.3.2.5°. L'objet 11 (modalité 1 de chacun des deux facteurs) figure en position 4 et 14, etc.

<sup>1</sup> En anglais : *randomization*.

<sup>2</sup> En anglais : *randomized design, completely randomized design*.

### 2° Répartition « au hasard »

La répartition aléatoire ou « au hasard » des objets peut être réalisée à l'aide de tables de *nombre aléatoires*<sup>3</sup> [STAT1, § 8.2.2] ou de *permutations aléatoires*<sup>4</sup>, telles qu'il en existe dans de nombreux livres de statistique et dans certains recueils de tables [FISHER et YATES, 1982; PEARSON et HARTLEY, 1966-1972]. De brèves tables de permutations aléatoires des nombres de 1 à 10, de 1 à 20 et de 1 à 50 sont aussi données en annexe (tables 1.1 à 1.3).

Dans les deux cas envisagés ci-dessus, nous avons procédé à la répartition au hasard en nous servant de la table des permutations aléatoires des nombres de 1 à 20 (table 1.2).

Dans le premier cas (partie supérieure de la figure 5.1.1), nous avons utilisé le deuxième « bloc » de 20 nombres de la partie gauche de cette table, et nous avons affecté l'objet 1 aux parcelles dont les numéros correspondent aux quatre premiers nombres de la table (parcelles 13, 20, 18 et 9), l'objet 2 aux parcelles dont les numéros correspondent aux quatre nombres suivants (parcelles 6, 15, 7 et 14), etc.

Quant au deuxième cas (partie inférieure de la figure 5.1.1), nous avons agi de la même manière, en utilisant le cinquième « bloc » de la partie droite de la même table et en négligeant les valeurs 19 et 20, qui sont superflues. C'est ainsi que l'objet 11 a été associé aux numéros d'ordre 14 et 4, l'objet 12 aux numéros d'ordre 15 et 11, etc.

La randomisation peut également être réalisée en utilisant des *nombre pseudo-aléatoires*<sup>5</sup> [STAT1, § 8.2.3], générés par certaines calculatrices ou par ordinateur, à l'aide de logiciels semblables à ceux auxquels nous avons fait allusion dans l'introduction générale.

### 3° Domaine médical

Le premier exemple présenté ci-dessus est de type agronomique, tandis que le deuxième concerne plutôt une expérience à réaliser en laboratoire ou de type industriel.

Des expériences organisées de cette manière sont aussi envisagées dans le domaine médical. Elles sont alors tantôt qualifiées, comme ci-dessus, d'expériences aléatoires ou complètement aléatoires, et tantôt appelées expériences *en groupes parallèles*<sup>6</sup>.

Indépendamment des questions éthiques (§ 2.2.2.5°), la réalisation de ces expériences peut soulever des problèmes particuliers quand les personnes considérées sont des patients qui ne sont pas tous « disponibles » en une fois, mais qui, au

---

<sup>3</sup> En anglais : *random number*.

<sup>4</sup> En anglais : *random permutation*.

<sup>5</sup> En anglais : *pseudo-random number*.

<sup>6</sup> En anglais : *parallel group design*.

contraire, entrent progressivement dans le processus expérimental, par exemple au fur et à mesure de leur admission en milieu hospitalier. La randomisation doit alors être réalisée elle-même progressivement, tout en conservant le caractère aveugle de la répartition des différents traitements (§ 2.2.2.4°).

[ En outre, on peut noter qu'en matière agronomique, aucune distinction n'est généralement faite entre le cas où les unités expérimentales sont constituées d'individus isolés (un seul animal ou un seul arbre par unité expérimentale, par exemple) et le cas où les unités expérimentales sont constituées de plusieurs individus (unités expérimentales correspondant à des lots d'animaux ou à des groupes d'arbres, par exemple).

Par contre, une distinction intervient dans le domaine médical. Les expériences au cours desquelles les objets sont affectés de manière complètement aléatoire à des groupes de personnes ou de patients, et non pas à des personnes considérées individuellement, sont en effet fréquemment envisagées séparément, sous le nom de *group randomized design* ou *cluster randomized design* [KLAR et DONNER, 2001 ; MOERBEEK, 2005 ; MURRAY, 2001].

## 5.2 Analyse des résultats

### 1° Analyse de la variance

La méthode d'analyse des résultats qui est associée le plus couramment au dispositif expérimental complètement aléatoire est l'*analyse de la variance*<sup>7</sup> : analyse de la variance à un critère de classification pour un seul facteur et parfois pour les expériences non factorielles à deux ou plusieurs facteurs [STAT2, § 9.2 et 9.3], analyse de la variance à deux critères de classification pour les expériences factorielles à deux facteurs [STAT2, § 10.2 et 10.3], etc.

Dans toute la mesure du possible, l'analyse de la variance doit toujours être précédée des contrôles habituels, en matière de normalité des distributions [STAT2, § 3.2, 3.3 et 3.4], d'identification d'éventuelles observations aberrantes [STAT2, § 3.5], et d'égalité des variances [STAT2, § 7.5]. Elle peut aussi être précédée de transformations de variables [STAT2, § 4.2, 4.3 et 4.4], et elle peut être complétée par des calculs de régression et par la réalisation de comparaisons particulières ou de comparaisons multiples de moyennes [STAT2, § 12.2, 12.3 et 12.4]<sup>8</sup>.

### 2° Autres méthodes

L'analyse de la variance peut être remplacée par certaines méthodes non paramétriques, dont le test de KRUSKAL et WALLIS [STAT2, § 9.3.6], notamment dans

<sup>7</sup> En anglais : *analysis of variance*, ANOVA.

<sup>8</sup> Nous ne présenterons de façon détaillée les résultats des différents contrôles qui ont été réalisés que pour le premier exemple considéré (§ 5.4), ce qui ne signifie nullement que de tels contrôles n'ont pas été effectués aussi pour les autres exemples.

le cas de données ordinales ou codées sous forme de rangs, et par les méthodes d'analyse des tableaux de contingence, dont le test  $\chi^2$  d'indépendance et le modèle log-linéaire [STAT2, § 6.2 et 6.3], dans le cas de données qualitatives. Elle cède aussi la place à la régression multiple [STAT2, § 16.2 et 16.3; DAGNELIE, 1986, chap. 4] lors de l'étude des surfaces de réponse, y compris les problèmes de mélanges (§ 2.4.1 et 2.4.2), et dans le cas des plans optimaux (§ 2.4.3).

En outre, des modèles plus complexes, tels que le modèle linéaire mixte et le modèle linéaire généralisé (§ 12.4.4), peuvent se substituer dans certaines circonstances aux modèles classiques d'analyse de la variance. Tel est le cas en particulier quand des observations sont effectuées successivement, à différents moments, sur les mêmes individus (mesures répétées dans le temps ou données longitudinales).

### ⊖ 3° Répétitions uniques ou partielles

Une difficulté peut apparaître pour les expériences qui ne sont l'objet que d'une seule répétition ou d'une répétition partielle. Il en est ainsi notamment pour les expériences factorielles fractionnaires et parfois pour les expériences factorielles complètes (§ 2.3.2.8° et 2.3.3).

En l'absence de répétitions, on ne dispose en effet d'aucune estimation de la variance résiduelle et, sans facteurs aléatoires, on ne peut alors procéder à aucun test de signification et à aucune détermination exacte de limites de confiance [STAT2, § 10.3.6, 11.2.4 et 11.4.2].

Une solution peut être toutefois d'utiliser comme estimation de la variance résiduelle soit le terme d'interaction d'ordre le plus élevé, soit un carré moyen provenant du regroupement de ce terme avec d'autres termes d'interaction [STAT2, ex. 11.4.1].

### ⊖ 4° Diagrammes de probabilité

Dans le cas des expériences factorielles de type  $2^k$ , une autre solution consiste à effectuer une représentation graphique des effets principaux et des interactions sous la forme d'un *demi-diagramme de probabilité*<sup>9</sup>.

À cette fin, à partir des différentes moyennes observées, on procède tout d'abord à l'estimation des effets principaux  $a_i$ ,  $b_j$ , ..., des interactions de deux facteurs  $(ab)_{ij}$ ,  $(ac)_{ik}$ , ..., et des diverses interactions d'ordre supérieur  $(abc)_{ijk}$ , ...<sup>10</sup>. On construit ensuite, pour les valeurs absolues des estimations ainsi obtenues, un diagramme de probabilité limité aux valeurs positives de la variable normale réduite, c'est-à-dire à la moitié supérieure des diagrammes de probabilité classiques [STAT2, § 3.3.2]<sup>11</sup>.

<sup>9</sup> En anglais : *half-normal plot*.

<sup>10</sup> Les notations utilisées sont celles qui concernent l'analyse de la variance à deux ou plus de deux critères de classification [STAT2, § 10.3.2 et 11.2.3].

<sup>11</sup> Les demi-diagrammes de probabilité dont il est question ici sont aussi ceux que nous présentons pour les racines carrées des distances de MAHALANOBIS, en matière de tests de normalité dans le cas des distributions à deux dimensions [STAT2, § 3.6.3].

L'examen des demi-diagrammes de probabilité permet notamment d'identifier les effets principaux et les termes d'interaction qui sont les plus importants.

Nous donnons plus de détails au sujet de la construction et de l'interprétation de ces diagrammes au paragraphe 5.5.3.

### ⊖ 5° Compléments

Les effets principaux et les termes d'interaction dont il vient d'être question sont en fait des contrastes orthogonaux [STAT2, § 12.2.1], et la procédure qui vient d'être esquissée est une recherche des contrastes ou des effets les plus *actifs*<sup>12</sup>, cette dernière notion généralisant celle de facteurs influents, à laquelle nous avons fait allusion au paragraphe 1.2.2.4°.

Dans cette optique, différents tests, dont le *test* ou la *méthode de LENTH*<sup>13</sup>, ont été proposés en vue de compléter l'étude visuelle des demi-diagrammes de probabilité.

D'autres informations relatives aux différents sujets abordés ici peuvent être trouvées notamment dans les articles d'ABOUKALAM [2005], ANGELOPOULOS et KOUKOUVINOS [2008], EDWARDS et MEE [2008], et MILLER [2005].

## 5.3 Discussion

### 1° Avantages et inconvénients

Si le dispositif expérimental complètement aléatoire a l'avantage d'être à première vue très simple, il n'est cependant pas sans inconvénients. Il faut noter tout d'abord qu'il peut conduire à certaines anomalies, parfois importantes.

Ainsi, dans le premier exemple de la figure 5.1.1, on peut observer que, par le jeu de la répartition complètement aléatoire, l'objet 4 est largement concentré dans le coin supérieur droit du champ d'expérience (parcelles 3, 4 et 8), tandis que l'objet 1 est concentré, dans une moindre mesure cependant, dans la partie inférieure gauche du dispositif (parcelles 9, 13 et 18).

Un phénomène semblable, mais moins apparent au premier abord, se présente dans le deuxième exemple de la même figure, en ce qui concerne le premier facteur. Cinq répétitions sur six de la modalité 2 de ce facteur (objets 21, 22 et 23) sont en effet localisées dans la première moitié du dispositif (essais 1, 2, 3, 6 et 7), tandis que cinq répétitions sur six de la modalité 3 de ce facteur (objets 31, 32 et 33) se trouvent dans la deuxième moitié du dispositif (essais 10, 12, 13, 17 et 18).

De telles situations peuvent porter à conséquence quand le matériel expérimental, au sens large, est caractérisé par des variations non contrôlées importantes ou

<sup>12</sup> En anglais : *active contrast*, *active effect*.

<sup>13</sup> En anglais : *LENTH's method*.

systématiques. Dans le deuxième cas par exemple, les conditions expérimentales pourraient évoluer de manière systématique dans le temps, en raison notamment d'une modification progressive des qualités de la matière première mise en œuvre (dégradation, humidification, etc.), d'une usure ou de toute autre évolution progressive de l'appareillage utilisé, d'une fatigue croissante ou au contraire d'une habileté de plus en plus grande des opérateurs, etc.

Ces évolutions progressives, dans le temps ou dans l'espace, sont souvent appelées *dérive* ou *gradient* ou *tendance systématique*<sup>14</sup>.

## 2° Entorses à la répartition « au hasard »

Face à de telles situations, les expérimentateurs peuvent être tentés d'éliminer purement et simplement les répartitions qui leur paraissent « anormales », en réalisant de nouvelles répartitions ou en « corrigeant » les premières répartitions obtenues, de manière à les rendre « plus satisfaisantes » (à leur point de vue !). De telles pratiques, qui peuvent être très subjectives, ne sont pas nécessairement répréhensibles, mais il est souvent difficile d'en mesurer l'impact, et il est donc préférable de s'en abstenir strictement.

Certains expérimentateurs s'efforcent également de remédier à l'hétérogénéité du matériel expérimental en constituant des ensembles d'unités expérimentales aussi « équilibrés » que possible. Il peut s'agir par exemple de groupes d'animaux auxquels doivent être affectés les différents objets, et qui sont constitués de telle sorte que les poids initiaux totaux ou moyens des différents groupes soient identiques ou très peu différents.

Comme l'indique notamment FINNEY [1957], cette façon de procéder est dangereuse, en particulier parce qu'elle conduit à une surestimation systématique de la variance résiduelle, et donc à une perte de puissance ou de précision des comparaisons qui sont faites. Une situation de ce type est présentée au paragraphe 11.5.2.4°.

Des solutions plus satisfaisantes peuvent être obtenues en faisant appel aux dispositifs expérimentaux qui sont présentés dans les chapitres suivants (dispositifs en blocs aléatoires complets, en blocs incomplets, etc.). La figure 6.1.1 illustre par exemple l'application du principe des blocs aléatoires complets à une situation semblable à celle du premier cas de la figure 5.1.1, chacun des objets se trouvant alors une et une seule fois dans chacun des blocs qui correspondent aux quatre colonnes de parcelles.

[ La question de la randomisation complète est l'objet de nombreuses discussions, et diverses solutions de *randomisation restreinte* ou *sous contraintes*<sup>15</sup> ont été proposées [BAILEY, 1985 ; COX, 2009 ; MAYO, 1987 ; NELSON, 1996].

On peut mentionner en outre que, par différentes méthodes d'ajustement et de stratification, et à l'aide de l'analyse de la covariance, des informations collectées

<sup>14</sup> En anglais : *gradient*, *trend*.

<sup>15</sup> En anglais : *restricted randomization*, *constrained randomization*.

par simple observation, sans randomisation, sont parfois assimilées à des résultats d'expériences aléatoires [LI et YUE, 2008 ; RUBIN, 2006 ; SHADISH *et al.*, 2008].

### 3° Difficultés liées aux modifications des modalités

Un autre inconvénient de la randomisation complète, dans le cas des expériences organisées de manière séquentielle dans le temps, provient du fait que ce type d'expérience nécessite le plus souvent de nombreuses modifications des conditions expérimentales, alors que ces modifications peuvent exiger de longues manipulations ou être très coûteuses. En examinant attentivement la partie inférieure de la figure 5.1.1, on peut constater par exemple que les modalités du premier facteur doivent être modifiées à 10 reprises au cours de l'expérience (modalité 2 pour les trois premiers essais, puis modalité 1 pour deux essais, puis encore modalité 2 pour deux essais, etc.), tandis que les modalités du deuxième facteur doivent être modifiées à 14 reprises (successivement modalités 2, 3, 1, 3, 2, etc.).

Quand les modalités d'un ou de certains facteurs sont plus *difficiles à modifier*<sup>16</sup> que les modalités du ou des autres facteurs, on peut être tenté de privilégier certaines répartitions par rapport à d'autres. Toujours pour le même exemple, si les modifications relatives au premier facteur étaient sensiblement plus délicates que les modifications relatives au deuxième facteur, on pourrait être tenté d'utiliser une solution du type :

33 31 32 13 12 11 32 31 33 21 22 23 11 13 12 21 22 23,

dans laquelle les trois modalités du deuxième facteur (deuxièmes chiffres 1, 2 et 3) sont chaque fois associés successivement à une même modalité du premier facteur (premiers chiffres 1, 2 et 3)<sup>17</sup>.

Une telle répartition est tout à fait acceptable, mais il faut savoir qu'elle correspond en réalité, non pas à une expérience complètement aléatoire, mais bien au cas des expériences dites en parcelles divisées, dont il est question au chapitre 7. Il s'impose donc d'en interpréter les résultats, le cas échéant, selon les principes relatifs à ce type d'expérience.

### 4° Expériences systématiques et insensibles aux dérives

Par souci de facilité, on peut enfin être tenté d'organiser des expériences de façon tout à fait *systématique*<sup>18</sup>, c'est-à-dire par exemple comme suit :

11 11 12 12 13 13 21 21 22 22 23 23 31 31 32 32 33 33,

<sup>16</sup> En anglais : *hard-to-change factor*.

<sup>17</sup> Cette solution a été établie en répartissant tout d'abord au hasard, et avec deux répétitions, les trois modalités du premier facteur, puis pour chacun des six cas, au hasard et indépendamment les trois modalités du deuxième facteur.

<sup>18</sup> En anglais : *systematic design*.

ou encore :

11 11 21 21 31 31 12 12 22 22 32 32 13 13 23 23 33 33,

les modalités des deux facteurs étant modifiées de façon progressive, à tour de rôle, dans un cas comme dans l'autre.

Une telle façon de faire peut être extrêmement dangereuse en présence de dérives semblables à celles auxquelles nous avons fait allusion ci-dessus, et cela même si les dérives en question sont d'une amplitude très limitée [DAGNELIE, 2000]. Nous illustrerons ce point au paragraphe 5.4.3.

[ Mais d'autres solutions, conduisant à l'obtention de plans qui sont *insensibles aux dérives*<sup>19</sup>, ont été proposées par différents auteurs, en faisant intervenir éventuellement aussi le coût des modifications des modalités [CORREA *et al.*, 2009 ; DE LEÓN ADAMS *et al.*, 2005 ; TACK et VANDEBROEK, 2004].

### 5° Recommandations

À défaut de conditions expérimentales qui sont *effectivement* tout à fait constantes et sauf recours à certaines solutions particulières telles que celles auxquelles nous avons fait allusion (expériences en parcelles divisées ou insensibles aux dérives notamment), nous ne pouvons que recommander de respecter *strictement* les principes de répartition au hasard.

Et ce type de répartition doit en fait intervenir à tous les niveaux du processus expérimental. Au cours d'une expérience portant par exemple sur des groupes d'animaux, il ne suffit pas de constituer les groupes au hasard au début de l'expérience. Il faut également répartir au hasard les groupes dans les stalles, les loges ou les cages d'élevage, et dans toute la mesure du possible, respecter la répartition au hasard dans la préparation et l'application des traitements (alimentations, injections, etc.), maintenir la répartition au hasard au moment où d'éventuels prélèvements (sanguins par exemple) sont effectués et lors des analyses de laboratoire, etc.

## 5.4 Exemple 1 : expérience complètement aléatoire à deux facteurs

### 5.4.1 Présentation et données

#### 1° Présentation

Nous considérons, comme première illustration du dispositif complètement aléatoire, le cas d'une expérience relative à la carbonisation du bois de hêtre (*Fagus sylvatica* L.).

<sup>19</sup> En anglais : *trend-free design*, *trend-robust design*.

Le but de l'expérience est d'étudier l'influence de la dimension et du degré d'humidité des fragments de bois soumis à la carbonisation sur le rendement en charbon de bois [SCHENKEL, 1999].

Le facteur dimension des fragments de bois présente trois niveaux, correspondant à des cubes de 2 cm, 4 cm et 8 cm de côté. Le facteur humidité a au contraire quatre niveaux, à savoir une humidité nulle (bois anhydre) et des humidités égales à (ou proches de) 10 %, 20 % et 40 % (en pourcentages de la masse du bois anhydre). L'expérience est une expérience factorielle complète et comporte donc 12 objets.

Les unités expérimentales sont dans chaque cas des ensembles de cubes de bois, et trois répétitions ont été prévues pour chacun des objets.

La carbonisation est effectuée dans un four chauffé à haute température et les observations que nous prenons en considération concernent le rendement en charbon de bois, exprimé en pourcentage de la masse du bois anhydre.

## 2° Données

Les résultats obtenus figurent dans le tableau 5.4.1 et, sous une autre forme, dans le tableau 5.4.2. Dans ce deuxième tableau, les colonnes D (dimensions des fragments de bois) pourraient tout aussi bien contenir un premier indice ( $i$ , variant de 1 à 3), les colonnes H (humidités des fragments de bois) pourraient contenir un deuxième indice ( $j$ , variant de 1 à 4), et les colonnes Rdt pourraient alors être intitulées  $x_{ijk}$ , l'indice  $k$  étant relatif aux répétitions.

**Tableau 5.4.1.** Étude de la carbonisation du bois de hêtre : rendements en charbon de bois, en pourcentages du bois anhydre (première présentation).

| Dim.<br>(cm) | Humidité (%) |       |       |       |
|--------------|--------------|-------|-------|-------|
|              | 0            | 10    | 20    | 40    |
| 2            | 30,00        | 29,82 | 29,27 | 33,11 |
|              | 29,67        | 29,71 | 30,11 | 30,18 |
|              | 29,78        | 29,87 | 30,58 | 29,16 |
| 4            | 29,38        | 29,11 | 29,98 | 29,31 |
|              | 28,98        | 29,18 | 30,02 | 29,22 |
|              | 29,82        | 30,22 | 29,49 | 29,93 |
| 8            | 29,11        | 28,93 | 28,67 | 29,13 |
|              | 29,78        | 29,78 | 29,44 | 29,42 |
|              | 29,11        | 28,84 | 30,33 | 29,73 |

La deuxième présentation, constituée de quatre colonnes (D, H,  $k$  et Rdt, ou  $i$ ,  $j$ ,  $k$  et  $x_{ijk}$ ) et 36 lignes, est la plus couramment utilisée en vue du traitement des données par ordinateur.

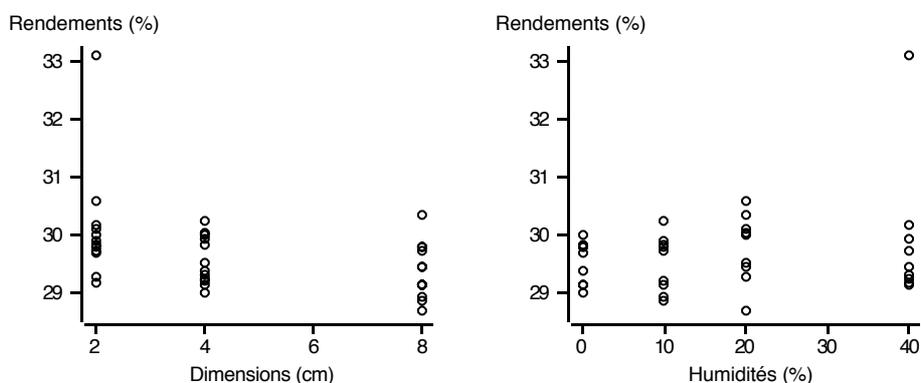
**Tableau 5.4.2.** Étude de la carbonisation du bois de hêtre : rendements en charbon de bois, en pourcentages du bois anhydre (deuxième présentation).

| D | H  | k | Rdt   | D | H  | k | Rdt   | D | H  | k | Rdt   |
|---|----|---|-------|---|----|---|-------|---|----|---|-------|
| 2 | 0  | 1 | 30,00 | 4 | 0  | 1 | 29,38 | 8 | 0  | 1 | 29,11 |
| 2 | 0  | 2 | 29,67 | 4 | 0  | 2 | 28,98 | 8 | 0  | 2 | 29,78 |
| 2 | 0  | 3 | 29,78 | 4 | 0  | 3 | 29,82 | 8 | 0  | 3 | 29,11 |
| 2 | 10 | 1 | 29,82 | 4 | 10 | 1 | 29,11 | 8 | 10 | 1 | 28,93 |
| 2 | 10 | 2 | 29,71 | 4 | 10 | 2 | 29,18 | 8 | 10 | 2 | 29,78 |
| 2 | 10 | 3 | 29,87 | 4 | 10 | 3 | 30,22 | 8 | 10 | 3 | 28,84 |
| 2 | 20 | 1 | 29,27 | 4 | 20 | 1 | 29,98 | 8 | 20 | 1 | 28,67 |
| 2 | 20 | 2 | 30,11 | 4 | 20 | 2 | 30,02 | 8 | 20 | 2 | 29,44 |
| 2 | 20 | 3 | 30,58 | 4 | 20 | 3 | 29,49 | 8 | 20 | 3 | 30,33 |
| 2 | 40 | 1 | 33,11 | 4 | 40 | 1 | 29,31 | 8 | 40 | 1 | 29,13 |
| 2 | 40 | 2 | 30,18 | 4 | 40 | 2 | 29,22 | 8 | 40 | 2 | 29,42 |
| 2 | 40 | 3 | 29,16 | 4 | 40 | 3 | 29,93 | 8 | 40 | 3 | 29,73 |

### 5.4.2 Analyse des résultats<sup>20</sup>

#### 1° Examen préliminaire

Une représentation graphique des données sous la forme de diagrammes de dispersion offre une première vue d'ensemble des résultats (figure 5.4.1).



**Figure 5.4.1.** Étude de la carbonisation du bois de hêtre : représentation graphique de l'influence des deux facteurs considérés<sup>21</sup>.

<sup>20</sup> Un traitement complet de cet exemple à l'aide du logiciel R est présenté à l'adresse <[www.dagnelie.be/docexr/exp054/exp054.htm](http://www.dagnelie.be/docexr/exp054/exp054.htm)>.

<sup>21</sup> Dans ce type de graphique, on ne fait souvent figurer que les points moyens relatifs aux différentes modalités des facteurs. Nous pensons qu'il est de loin préférable de représenter autant que possible les valeurs individuelles elles-mêmes, de manière à pouvoir visualiser, non seulement l'influence des facteurs en termes de moyennes, mais aussi la variabilité des observations.

On constate ainsi, d'une part, l'existence d'une valeur apparemment fort anormale (33,11), et d'autre part, le fait que les deux facteurs ne semblent guère avoir d'influence sur le rendement en charbon de bois, dans le domaine considéré.

La question qui se pose est de savoir si la valeur 33,11 doit être corrigée car, en retournant aux documents originaux, on pourrait identifier par exemple une erreur de transcription (peut-être 33,11 à la place de 30,11 ?), si cette valeur doit au contraire être considérée comme acceptable, ou si elle doit être écartée de l'analyse. En l'absence de toute information complémentaire à ce sujet, nous avons choisi de tester le caractère aberrant de cette observation par la méthode de GRUBBS [STAT2, § 3.5.3] et de l'éliminer éventuellement.

À cette fin, il est nécessaire de procéder à l'analyse de la variance de l'ensemble des données, y compris la valeur suspecte, et de calculer les résidus réduits de cette analyse, c'est-à-dire les résidus de l'analyse divisés par leur écart-type. Le modèle d'analyse de la variance est ici un modèle croisé fixe à deux critères de classification (dimension et humidité), avec des effectifs constants ( $n = 3$ ) [STAT2, § 10.3.2].

Le résidu réduit qui correspond à la valeur 33,11 est égal à 3,07, alors qu'avec 24 degrés de liberté, la valeur maximum admissible est approximativement égale à 2,88, au niveau de probabilité 0,05 [STAT2, table VI]. La valeur suspecte peut donc être considérée comme effectivement anormale, et ne sera plus prise en compte dans la suite.

La moyenne générale des observations est alors égale à 29,58 %, avec des valeurs extrêmes égales à 28,67 et 30,58 %.

La figure 5.4.2 présente les mêmes résultats que la figure 5.4.1, mais après élimination de la valeur 33,11. La partie gauche de cette figure suggère l'existence possible d'une légère décroissance du rendement en fonction de l'augmentation de la dimension des fragments de bois.

### 2° Analyse de la variance

Si on souhaite conserver le caractère orthogonal de l'analyse de la variance, ce qui en facilite le calcul et l'interprétation, on doit estimer la valeur qui est considérée comme manquante, par la moyenne des autres observations relatives au même objet. On doit aussi diminuer en conséquence d'une unité le nombre de degrés de liberté de la composante résiduelle [STAT2, § 10.4.2].

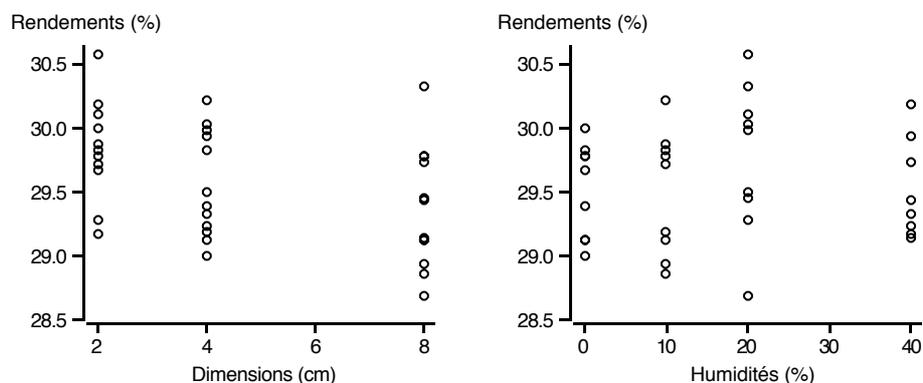
On obtient ainsi la valeur estimée :

$$(30,18 + 29,16)/2 = 29,67,$$

et ensuite le tableau d'analyse de la variance (tableau 5.4.3).

### 3° Conditions d'application

Avant d'aborder l'interprétation des résultats de l'analyse de la variance, il faut en vérifier la validité des conditions d'application.



**Figure 5.4.2.** Étude de la carbonisation du bois de hêtre : représentation graphique de l'influence des deux facteurs, après élimination d'une observation considérée comme aberrante.

**Tableau 5.4.3.** Étude de la carbonisation du bois de hêtre : tableau d'analyse de la variance.

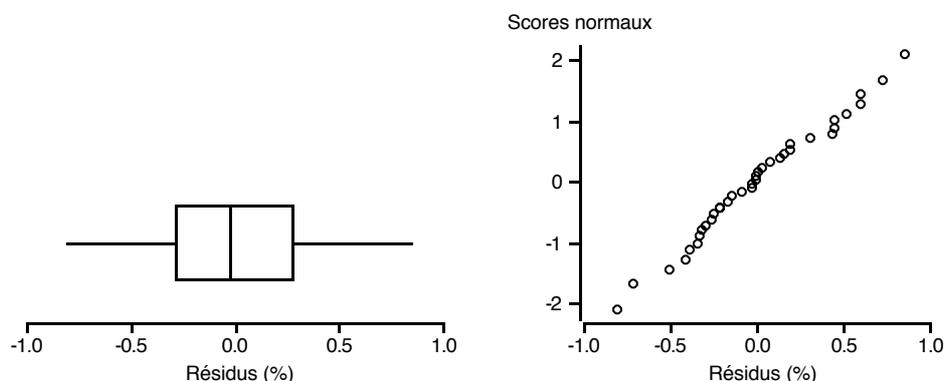
| Sources de variation | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | $F$  | $P$   |
|----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|------|-------|
| Dimension            | 2                 | 1,2926                       | 0,6463        | 2,72 | 0,087 |
| Humidité             | 3                 | 0,4367                       | 0,1456        | 0,61 | 0,61  |
| Dimension-humidité   | 6                 | 0,1947                       | 0,0325        | 0,14 | 0,99  |
| Variation résiduelle | 23                | 5,4675                       | 0,2377        |      |       |
| Totaux               | 34                | 7,3915                       |               |      |       |

La présentation des résidus sous la forme de « *boxplot* » et de diagramme de probabilité (figure 5.4.3), ou uniquement sous cette deuxième forme, ne met en évidence aucune anomalie importante quant aux valeurs individuelles et quant à la normalité de la distribution des résidus.

D'autre part, la méthode de LEVENE, qui consiste en une analyse de la variance du même type que ci-dessus, portant sur les valeurs absolues des résidus [STAT2, § 7.5.2], conduit aussi à une conclusion tout à fait satisfaisante en matière d'égalité des variances. Cette méthode donne en effet, pour les deux facteurs principaux et pour l'interaction, des valeurs des variables  $F$  de FISHER-SNEDECOR égales à 0,78, 1,11 et 1,54, et des probabilités correspondantes égales à 0,47, 0,37 et 0,21.

#### 4° Interprétation

À première vue, l'analyse de la variance des données initiales ne fait apparaître aucune différence significative, dans les limites du domaine considéré, ce qui irait à l'encontre de l'impression donnée par la figure 5.4.2.



**Figure 5.4.3.** Étude de la carbonisation du bois de hêtre : représentation graphique des résidus de l'analyse de la variance sous la forme de « *boxplot* » et de diagramme de probabilité.

Si toutefois, on s'était fixé au départ comme objectif d'établir autant que possible des relations linéaires ou quadratiques entre les deux facteurs considérés et le rendement, on devrait constater qu'il existe bien une relation significative entre la dimension des fragments de bois et le rendement. La somme des carrés des écarts relative à la relation linéaire entre ces deux variables est en effet égale à 1,1978, ce qui donne, par comparaison avec le carré moyen résiduel de l'analyse de la variance, une valeur de la variable  $F$  égale à 5,04 et une probabilité égale à 0,035 [STAT2, § 14.5.3].

La valeur 1,1978 pourrait d'ailleurs être introduite dans le tableau d'analyse de la variance (tableau 5.4.3) comme étant la partie linéaire de l'effet du facteur dimension, la différence, égale à 0,0948, étant la partie quadratique de l'effet de ce même facteur [STAT2, § 12.2.3].

L'équation de régression linéaire, qui est valable uniquement pour des dimensions allant de 2 à 8 cm, est :

$$\text{Rdt} = 29,917 - 0,0731 D,$$

si on utilise les notations du tableau 5.4.2.

La divergence qui apparaît entre les conclusions de la seule approche « analyse de la variance » (absence de différences significatives) et de l'approche « régression » (régression linéaire significative) met bien en évidence la nécessité de définir de façon précise, au départ, le ou les objectifs prioritaires de l'expérience et la procédure d'analyse des résultats qui devra être suivie<sup>22</sup>.

<sup>22</sup> Des conclusions finales fort semblables peuvent être déduites de l'ensemble des données, sans élimination de la valeur 33,11. Toutefois, la méthode de LEVENE met alors en évidence des inégalités de variances, et le résidu de la régression linéaire relatif à la valeur 33,11 est dans ces conditions tout à fait anormal.

### 5.4.3 Importance de la randomisation

#### 1° Principe

Tout ce qui a été dit jusqu'à présent suppose que l'expérience a été réalisée de manière complètement aléatoire, c'est-à-dire notamment que, si les 36 essais dont les résultats sont donnés dans les tableaux 5.4.1 et 5.4.2 ont été effectués successivement dans un même four, ils l'ont été dans un ordre déterminé tout à fait « au hasard ». On peut se poser la question de savoir ce qu'il en serait si les différents essais avaient été réalisés, au contraire, dans un ordre systématique, correspondant par exemple à l'ordre de présentation des résultats dans le tableau 5.4.2.

Dans des conditions strictement constantes, l'ordre de réalisation des essais n'en influence pas les résultats, mais il n'en est pas de même quand les conditions expérimentales varient.

À titre d'illustration, nous supposons ici que certaines conditions de l'expérience ont évolué dans le temps de manière progressive, en induisant une tendance générale dans les résultats, sous la forme d'une dérive linéaire. On peut considérer par exemple une dérive négative ou positive égale à 0,005 ou 0,01 entre les différents essais successifs. Une dérive positive égale à 0,01, qui s'ajouterait d'essai en essai, c'est-à-dire de ligne en ligne, aux données du tableau 5.4.2, impliquerait que la deuxième observation de ce tableau ne serait plus 29,67, mais bien 29,68, que la troisième observation du même tableau ne serait pas 29,78, mais 29,80, que la quatrième observation ne serait pas 29,82, mais 29,85, etc.

Le tableau 5.4.4 présente partiellement les données réelles (colonne 0,00) et les données qui auraient été obtenues en présence des dérives linéaires négatives et positives que nous envisageons ( $-0,01$ ,  $-0,005$ ,  $+0,005$  et  $+0,01$ ). On notera que les dérives totales, de la première à la dernière observation, sont égales en valeur absolue à 0,175 et 0,35, et sont donc seulement de l'ordre de 0,6 et 1,2 % de la moyenne générale, égale à 29,58.

#### 2° Résultats

Les résultats de l'analyse de la variance relative aux données de la colonne 0,00 du tableau 5.4.4 (absence de dérive) sont ceux du tableau 5.4.3, mais des résultats différents doivent être attendus en appliquant exactement la même procédure aux quatre autres colonnes du tableau 5.4.4.

Le tableau 5.4.5 présente les principaux résultats des cinq analyses de la variance, à savoir les carrés moyens résiduels ( $CM_r$ ), les carrés moyens relatifs à l'interaction dimension-humidité ( $CM_{ab}$ ), les carrés moyens relatifs au facteur humidité ( $CM_b$ ), ainsi que les carrés moyens, les valeurs des variables de FISHER-SNEDECOR et les probabilités qui concernent le facteur dimension des fragments de bois ( $CM_a$ ,  $F_a$  et P)<sup>23</sup>.

<sup>23</sup> Les notations sont celles que nous utilisons habituellement pour l'analyse de la variance à deux critères de classification [STAT2, § 10.3.2].

**Tableau 5.4.4.** Étude de la carbonisation du bois de hêtre : présentation partielle des données réelles (colonne 0,00) et des données modifiées par diverses dérives linéaires (colonnes  $-0,01$ ,  $-0,005$ ,  $+0,005$  et  $+0,01$ ).

| D | H  | $k$ | $-0,01$ | $-0,005$ | $0,00$ | $+0,005$ | $+0,01$ |
|---|----|-----|---------|----------|--------|----------|---------|
| 2 | 0  | 1   | 30,00   | 30,000   | 30,00  | 30,000   | 30,00   |
| 2 | 0  | 2   | 29,66   | 29,665   | 29,67  | 29,675   | 29,68   |
| 2 | 0  | 3   | 29,76   | 29,770   | 29,78  | 29,790   | 29,80   |
| 2 | 10 | 1   | 29,79   | 29,805   | 29,82  | 29,835   | 29,85   |
| 2 | 10 | 2   | 29,67   | 29,690   | 29,71  | 29,730   | 29,75   |
| 2 | 10 | 3   | 29,82   | 29,845   | 29,87  | 29,895   | 29,92   |
| ⋮ | ⋮  | ⋮   | ⋮       | ⋮        | ⋮      | ⋮        | ⋮       |
| 8 | 40 | 1   | 28,80   | 28,965   | 29,13  | 29,295   | 29,46   |
| 8 | 40 | 2   | 29,08   | 29,250   | 29,42  | 29,590   | 29,76   |
| 8 | 40 | 3   | 29,38   | 29,555   | 29,73  | 29,905   | 30,08   |

**Tableau 5.4.5.** Étude de la carbonisation du bois de hêtre : principaux résultats des analyses de la variance relatives aux données réelles (ligne 0,00) et aux données modifiées par diverses dérives linéaires<sup>24</sup>.

| Dérives  | $CM_r$ | $CM_{ab}$ | $CM_b$ | $CM_a$ | $F_a$ | P        |
|----------|--------|-----------|--------|--------|-------|----------|
| $-0,01$  | 0,2339 | 0,0331    | 0,1324 | 1,4778 | 6,32  | 0,0065** |
| $-0,005$ | 0,2358 | 0,0327    | 0,1353 | 1,0204 | 4,33  | 0,025*   |
| $0,00$   | 0,2377 | 0,0325    | 0,1456 | 0,6463 | 2,72  | 0,087    |
| $+0,005$ | 0,2397 | 0,0322    | 0,1628 | 0,3578 | 1,49  | 0,25     |
| $+0,01$  | 0,2417 | 0,0318    | 0,1869 | 0,1555 | 0,64  | 0,53     |

Les différences observées entre les résultats des cinq analyses de la variance sont tout à fait négligeables pour la variation résiduelle et pour l'interaction des deux facteurs<sup>25</sup>. Ces différences sont peu importantes aussi pour le facteur humidité. C'est ce qui justifie le fait que nous ne considérons à ce propos que les carrés moyens, en négligeant les valeurs des variables de FISHER-SNEDECOR et les probabilités qui leur sont associées.

<sup>24</sup> De manière à laisser à chacun la possibilité de se référer à l'une ou à l'autre forme de présentation, nous faisons figurer ici, comme dans la plupart des tableaux d'analyse de la variance, à la fois les probabilités P (*p-values*) associées aux valeurs des variables de FISHER-SNEDECOR et les astérisques caractéristiques des trois niveaux de signification habituels (0,05, 0,01 et 0,001), même si ces mentions sont dans une certaine mesure redondantes [STAT2, ex. 10.3.3].

<sup>25</sup> En principe, l'interaction des deux facteurs ne devrait pas être influencée du tout par les dérives linéaires, mais des différences minimales apparaissent cependant dans le cas présent, du fait de l'estimation d'une donnée considérée comme manquante.

Par contre, des différences considérables apparaissent en ce qui concerne le facteur dimension des fragments de bois, les carrés moyens et les valeurs  $F$  variant dans un rapport de 1 à 10. On peut constater aussi que ce facteur qui, initialement, n'était pas significatif mais néanmoins proche de la limite 0,05 (tableau 5.4.3 :  $P = 0,087$ ), est tout à fait non significatif dans le cas des dérivées positives ( $P = 0,25$  et  $0,53$ ), et est au contraire significatif ou hautement significatif dans le cas des dérivées négatives ( $P = 0,025$  et  $0,0065$ ).

Une évolution tout à fait comparable peut être mise en évidence en ce qui concerne la régression, les probabilités relatives à la composante linéaire du facteur dimension allant de 0,0022 pour une dérivée égale à  $-0,01$ , à 0,30 pour une dérivée égale à  $+0,01$ , au lieu de 0,035 en l'absence de dérivée.

Tant en analyse de la variance qu'en régression, les résultats sont donc fondamentalement modifiés du fait des dérivées que nous avons envisagées.

Cet exemple, comme d'autres [DAGNELIE, 2000], illustre l'importance qu'il faut accorder à la randomisation dans la planification et la réalisation des expériences, et les risques d'erreur potentiellement considérables qui sont inhérents à toute absence de randomisation, même dans le cas de dérivées de relativement faible importance (dérivée totale de l'ordre de 1 % de la moyenne seulement, dans l'exemple considéré ici).

## 5.5 Exemple 2: expérience complètement aléatoire à quatre facteurs

### ⊖ 5.5.1 Présentation et données

#### 1° Présentation

Nous envisageons, comme deuxième exemple d'expérience complètement aléatoire, un problème qui peut être abordé sous différents angles. Il s'agit d'une expérience destinée à étudier les conditions de production de lipase par une souche de la levure *Yarrowia lipolytica*, dans un milieu de culture de type lactosérum [UWAMWEZI, 1996].

Quatre facteurs sont pris en considération selon un ensemble factoriel complet  $2^4$  (§ 2.3.2). En outre, un point expérimental supplémentaire a été prévu, avec quatre répétitions, au centre de l'hypercube formé par les points factoriels, comme nous l'avons indiqué au paragraphe 2.3.2.8°.

Au total, l'expérience comporte donc 17 objets et 20 unités expérimentales, ces unités étant des fioles de culture. Les 17 objets ont été affectés de manière complètement aléatoire aux 20 fioles, et deux mesures d'activité enzymatique ont été réalisées pour chacune de celles-ci.

Le tableau 5.5.1 présente les facteurs étudiés et leurs différents niveaux. Il comprend également les lettres A, B, C et D, que nous utiliserons dans la suite pour désigner les quatre facteurs.

**Tableau 5.5.1.** Étude des conditions de production d'une enzyme : facteurs pris en considération et niveaux de ces facteurs<sup>26</sup>.

| Facteurs          | Symboles | Niveaux (%) |     |     |
|-------------------|----------|-------------|-----|-----|
|                   |          | -1          | 0   | +1  |
| Glucose           | A        | 0,25        | 0,5 | 1   |
| Lactosérum        | B        | 1           | 2   | 3   |
| Sulfate ammonique | C        | 0           | 0,4 | 0,8 |
| <i>Corn-steep</i> | D        | 0,25        | 0,5 | 1   |

## 2° Données

Le tableau 5.5.2 présente les 17 objets et les résultats obtenus pour les 20 fioles, en unités par millilitre (U/ml), une unité correspondant à la quantité d'enzyme susceptible de libérer une micromôle d'acide gras par minute. Nous avons ajouté à ces données les codes alphabétiques relatifs aux 16 points expérimentaux factoriels, selon les notations introduites au paragraphe 2.3.2.6°.

## ⊖ 5.5.2 Interprétation des résultats : analyse de la variance

### 1° Examen préliminaire

Le premier élément qui apparaît, à la vue du tableau 5.5.2, est la très grande dispersion des 40 observations individuelles, qui s'étendent de 0 à 1.243 U/ml. Leur moyenne générale est égale à 490 U/ml et leur écart-type estimé à 375 U/ml. Cette dernière valeur ne présente cependant guère d'intérêt, car elle englobe à la fois l'influence des différents facteurs et de leurs interactions éventuelles et les fluctuations résiduelles.

Par une analyse de la variance à un critère de classification, qui tient compte des différences entre les 20 unités expérimentales (20 fioles), indépendamment des objets qui leur sont affectés, et qui constitue les trois dernières lignes du tableau 5.5.3, on obtient un carré moyen résiduel égal à 9.897. L'écart-type qui caractérise les différences entre mesures est donc égal à 99,5 U/ml, et le coefficient de variation entre mesures est égal à 20,3 %.

La figure 5.5.1 présente également les valeurs observées en fonction des niveaux des différents facteurs. Les quatre diagrammes de cette figure, qui ne tiennent

<sup>26</sup> L'utilisation des valeurs conventionnelles -1, 0 et +1 implique que les facteurs A et D sont considérés selon des échelles logarithmiques, les valeurs 0,5 se trouvant à mi-chemin entre 0,25 et 1 en termes de logarithmes.

**Tableau 5.5.2.** Étude des conditions de production d'une enzyme : niveaux des facteurs, symboles des points factoriels, valeurs observées et moyennes de ces valeurs, en unités par millilitre (U/ml)<sup>27</sup>.

| A  | B  | C  | D  | Symb. | Valeurs obs. |       | Moy.    |
|----|----|----|----|-------|--------------|-------|---------|
| -1 | -1 | -1 | -1 | (1)   | 77           | 0     | 38,5    |
| -1 | -1 | -1 | +1 | d     | 61           | 15    | 38,0    |
| -1 | -1 | +1 | -1 | c     | 144          | 24    | 84,0    |
| -1 | -1 | +1 | +1 | cd    | 442          | 634   | 538,0   |
| -1 | +1 | -1 | -1 | b     | 252          | 279   | 265,5   |
| -1 | +1 | -1 | +1 | bd    | 53           | 24    | 38,5    |
| -1 | +1 | +1 | -1 | bc    | 482          | 633   | 557,5   |
| -1 | +1 | +1 | +1 | bcd   | 1.028        | 936   | 982,0   |
| +1 | -1 | -1 | -1 | a     | 54           | 0     | 27,0    |
| +1 | -1 | -1 | +1 | ad    | 601          | 745   | 673,0   |
| +1 | -1 | +1 | -1 | ac    | 102          | 44    | 73,0    |
| +1 | -1 | +1 | +1 | acd   | 156          | 101   | 128,5   |
| +1 | +1 | -1 | -1 | ab    | 750          | 680   | 715,0   |
| +1 | +1 | -1 | +1 | abd   | 1.243        | 1.077 | 1.160,0 |
| +1 | +1 | +1 | -1 | abc   | 682          | 831   | 756,5   |
| +1 | +1 | +1 | +1 | abcd  | 883          | 1.184 | 1.033,5 |
| 0  | 0  | 0  | 0  | –     | 837          | 658   | 747,5   |
| 0  | 0  | 0  | 0  | –     | 590          | 546   | 568,0   |
| 0  | 0  | 0  | 0  | –     | 839          | 538   | 688,5   |
| 0  | 0  | 0  | 0  | –     | 717          | 655   | 686,0   |

aucun compte des éventuelles interactions, semblent indiquer que les facteurs A (glucose), B (lactosérum) et D (*corn-steep*) pourraient avoir chacun une influence significative.

## 2° Analyse de la variance

L'étude des différents facteurs et de leurs interactions peut être abordée par l'analyse de la variance. Mais, face à la grande variabilité des observations, il y a lieu de se poser au préalable la question de savoir s'il n'est pas opportun d'effectuer l'une ou l'autre transformation de variable.

Un examen attentif des données, selon les principes qui s'appliquent en la matière [STAT2, § 4.4], montre qu'aucune des transformations habituelles (logarithme, racine carrée, etc.) ne semble devoir être appliquée. L'analyse de la variance a en conséquence été réalisée sur les données initiales, et les résultats en sont présentés dans le tableau 5.5.3.

<sup>27</sup> Dans ce type de présentation, les valeurs -1 et +1 sont parfois désignées simplement par les signes - et +.

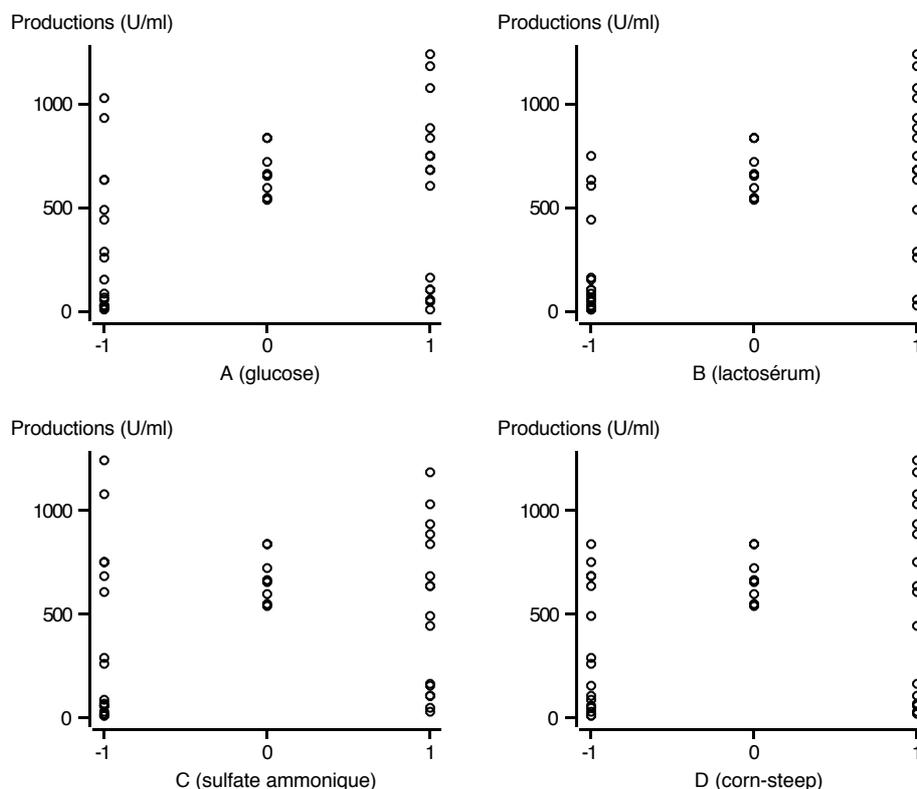
**Tableau 5.5.3.** Étude des conditions de production d'une enzyme :  
tableau d'analyse de la variance.

| Sources de var. | Degrés de lib. | S. des carrés des écarts | Carrés moyens | $F$     | P      | $F_{23}$ | $P_{23}$ |
|-----------------|----------------|--------------------------|---------------|---------|--------|----------|----------|
| A               | 1              | 512.325                  | 512.325       | 45,2 ** | 0,0067 | 50,8 *** | 0,0000   |
| B               | 1              | 1.909.546                | 1.909.546     | 169 *** | 0,0010 | 189 ***  | 0,0000   |
| C               | 1              | 179.251                  | 179.251       | 15,8 *  | 0,028  | 17,8 *** | 0,0003   |
| D               | 1              | 537.944                  | 537.944       | 47,5 ** | 0,0063 | 53,4 *** | 0,0000   |
| AB              | 1              | 327.443                  | 327.443       | 28,9 *  | 0,013  | 32,5 *** | 0,0000   |
| AC              | 1              | 698.857                  | 698.857       | 61,7 ** | 0,0043 | 69,3 *** | 0,0000   |
| AD              | 1              | 74.594                   | 74.594        | 6,59    | 0,083  | 7,40 *   | 0,012    |
| BC              | 1              | 152.214                  | 152.214       | 13,4 *  | 0,035  | 15,1 *** | 0,0007   |
| BD              | 1              | 6.933                    | 6.933         | 0,61    | 0,49   | 0,69     | 0,42     |
| CD              | 1              | 15.095                   | 15.095        | 1,33    | 0,33   | 1,50     | 0,23     |
| ABC             | 1              | 9.557                    | 9.557         | 0,84    | 0,43   | 0,95     | 0,34     |
| ABD             | 1              | 9.557                    | 9.557         | 0,84    | 0,43   | 0,95     | 0,34     |
| ACD             | 1              | 434.545                  | 434.545       | 38,4 ** | 0,0085 | 43,1 *** | 0,0000   |
| BCD             | 1              | 47.972                   | 47.972        | 4,24    | 0,13   | 4,76 *   | 0,040    |
| ABCD            | 1              | 6.356                    | 6.356         | 0,56    | 0,51   | 0,63     | 0,44     |
| Non-lin.        | 1              | 333.336                  | 333.336       | 29,4 *  | 0,012  | 33,1 *** | 0,0000   |
| Var. rés.       | 3              | 33.967                   | 11.322        | 1,14    | 0,36   |          |          |
| Fioles          | 19             | 5.289.492                |               |         |        |          |          |
| Mesures         | 20             | 197.933                  | 9.897         |         |        |          |          |
| Totaux          | 39             | 5.487.425                |               |         |        |          |          |

La partie supérieure de ce tableau identifie les 15 composantes (facteurs et interactions) relatives aux 16 points expérimentaux factoriels. Comme nous l'avons déjà dit, la partie inférieure sépare les différences entre les 20 unités expérimentales, indépendamment des objets qui leur sont affectés, et les différences entre les couples de mesures. La ligne « Var. rés. » concerne la variance résiduelle déduite des quatre répétitions du point central. Et la ligne « Non-lin. » compare la partie factorielle et la partie centrale du plan d'expérience, et constitue la composante de non-linéarité dont nous avons parlé au paragraphe 2.4.1.2°<sup>28</sup>.

Le test de signification de la variance résiduelle (au point central) doit être réalisé par rapport aux différences entre mesures, tandis que les tests relatifs à la non-linéarité et aux 15 composantes factorielles doivent être effectués par rapport

<sup>28</sup> Les sommes des carrés des écarts de la partie supérieure du tableau 5.5.3 peuvent être obtenues notamment par une analyse de la variance à quatre critères de classification, la partie inférieure de ce tableau par une analyse de la variance à un critère de classification, la ligne « Var. rés. » par un simple calcul de variance, et la ligne « Non-lin. » par différence.



**Figure 5.5.1.** Étude des conditions de production d'une enzyme : représentation graphique de l'influence des différents facteurs.

à la variation résiduelle. Les résultats de ces tests sont donnés dans les colonnes  $F$  et  $P$  du tableau 5.5.3<sup>29</sup>.

### 3° Interprétation

L'interprétation des résultats de l'analyse de variance est rendue difficile par la présence d'une interaction importante de trois facteurs (interaction ACD). Cette

<sup>29</sup> Certains livres et certains logiciels spécialisés présentent globalement l'influence de l'ensemble des facteurs étudiés, l'influence de l'ensemble des interactions de deux facteurs, l'influence de l'ensemble des interactions de trois facteurs, etc. Il nous paraît préférable d'identifier dans toute la mesure du possible l'influence de chacun des facteurs et de chacune des interactions. De même, une confusion peut résulter du fait que certains livres et certains logiciels appellent « erreur pure » ce que nous appelons « variation résiduelle », et « variation résiduelle » l'ensemble de cette « erreur pure » et de la composante de non-linéarité (dans le cas présent, une somme des carrés des écarts égale à 367.303 et un carré moyen égal à 91.826, avec quatre degrés de liberté), les tests de signification étant parfois réalisés par rapport à cette « pseudo-variation résiduelle ».

interaction, à laquelle il n'est pas possible de donner une explication simple, met en cause la validité des tests relatifs aux trois facteurs qui y interviennent.

Par contre, l'influence du facteur B (lactosérum) semble bien marquée, malgré la présence de deux interactions quelque peu significatives (interactions AB et BC). Les moyennes observées pour les niveaux  $-1$  et  $+1$  de ce facteur sont respectivement égales à 200 et à 689 U/ml, avec donc une différence égale à 489 U/ml, et la moyenne intermédiaire relative au niveau 0 est égale à 672 U/ml.

On peut remarquer en outre que la composante de non-linéarité est, elle également, significative. Ce fait est certainement lié en partie à la non-linéarité de l'influence du facteur B (valeur intermédiaire égale à 672, qui est loin de se situer à mi-chemin entre les valeurs extrêmes 200 et 689).

#### 4° Conséquences d'éventuelles erreurs

En présence d'interactions significatives d'ordre supérieur, il y a toujours lieu de se demander si la situation observée n'est pas la conséquence d'erreurs d'identification des unités expérimentales (permutation d'étiquettes par exemple), d'erreurs d'attribution des objets aux unités expérimentales, d'erreurs de mesure, d'erreurs d'enregistrement ou de transcription des résultats, etc. Indépendamment de l'attention soutenue qui doit caractériser toute expérimentation, des contrôles supplémentaires réalisés a posteriori s'imposent donc toujours dans de tels cas.

On peut éventuellement se rendre compte de l'ampleur des conséquences de telles erreurs en permutant, à titre d'exercice, les observations de deux lignes voisines, mais fort différentes, du tableau 5.5.2 (par exemple les couples d'observations « 144-24 » et « 442-634 », ou « 252-279 » et « 53-24 »), et en recommençant l'analyse de la variance sur les données ainsi modifiées. De semblables permutations correspondent en effet aux erreurs qu'on commettrait en confondant deux objets qui ne diffèrent que par le niveau du seul facteur D (erreur d'étiquetage ou de transcription par exemple, en ce qui concerne les objets c et cd, ou b et bd).

#### 5° Regroupement de deux sources de variation

Comme la variance résiduelle n'est pas significativement supérieure aux différences entre mesures, et comme les deux carrés moyens correspondants sont du même ordre de grandeur (11.322 et 9.897), on peut envisager aussi de regrouper ces carrés moyens de manière à définir une nouvelle composante résiduelle, avec 23 degrés de liberté :

$$(33.967 + 197.933)/(3 + 20) = 10.083.$$

Les résultats des tests réalisés en fonction de cette composante sont donnés dans les colonnes  $F_{23}$  et  $P_{23}$  du tableau 5.5.3.

Cette façon de procéder rend les tests sensiblement plus puissants, en raison de la présence de 23 degrés de liberté, au lieu de 3, au dénominateur des variables de FISHER-SNEDECOR. Dans le cas présent, cette procédure ne fait cependant que compliquer encore l'interprétation des résultats.

### ⊖ 5.5.3 Interprétation des résultats : demi-diagramme de probabilité

#### 1° Effets des facteurs et des interactions

Une autre approche de l'analyse des mêmes données est basée sur la construction d'un demi-diagramme de probabilité, pour les effets des facteurs et des interactions (§ 5.2.4°). Le tableau 5.5.4 contient les valeurs de ces effets.

**Tableau 5.5.4.** Étude des conditions de production d'une enzyme : effets des facteurs et des interactions (U/ml).

| Facteurs et interactions | Effets |
|--------------------------|--------|
| A                        | 127    |
| B                        | 244    |
| C                        | 75     |
| D                        | 130    |
| AB                       | 101    |
| AC                       | -148   |
| AD                       | 48     |
| BC                       | 69     |
| BD                       | -15    |
| CD                       | 22     |
| ABC                      | 17     |
| ABD                      | -17    |
| ACD                      | -117   |
| BCD                      | 39     |
| ABCD                     | 14     |

Ces valeurs peuvent être obtenues notamment à partir des moyennes relatives aux différents facteurs. On a par exemple, en utilisant des notations semblables à celles de l'analyse de la variance [STAT2, § 9.2.2, 10.2.2 et 11.2.2] :

$$\bar{x}_{2...} - \bar{x}_{...} = 570,81 - 444,28 = 126,53,$$

$$\bar{x}_{.2..} - \bar{x}_{...} = 688,56 - 444,28 = 244,28, \quad \dots,$$

$$\bar{x}_{22..} - \bar{x}_{2...} - \bar{x}_{.2..} + \bar{x}_{...} = 916,25 - 570,81 - 688,56 + 444,28 = 101,16, \quad \dots,$$

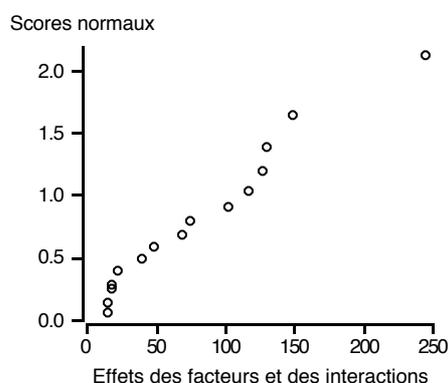
l'indice 2 désignant chaque fois le niveau supérieur +1 du facteur considéré<sup>30</sup>.

<sup>30</sup> Les moyennes sont affectées de quatre indices, remplacés par des points en cas de sommation, qui correspondent aux quatre facteurs (A, B, C et D) :  $\bar{x}_{2...}$  est la moyenne des observations relatives au niveau supérieur +1 du facteur A,  $\bar{x}_{.2..}$  est la moyenne des observations relatives

Les valeurs présentées dans le tableau 5.5.4 peuvent également être obtenues par la méthode de YATES, relative aux expériences factorielles [STAT2, § 11.2.2 et ex. 11.2.2], ou par régression multiple, comme nous le verrons au paragraphe 5.5.4. Et les valeurs absolues correspondantes, qui interviennent dans la construction du diagramme de probabilité, sont à une constante près les racines carrées des sommes des carrés des écarts et des carrés moyens de l'analyse de la variance (tableau 5.5.3).

## 2° Demi-diagramme de probabilité

Le demi-diagramme de probabilité relatif aux données du tableau 5.5.4 est l'objet de la figure 5.5.2.



**Figure 5.5.2.** Étude des conditions de production d'une enzyme : demi-diagramme de probabilité relatif aux effets des facteurs et des interactions.

Classiquement, dans la construction d'un diagramme de probabilité, on porte en regard des différentes valeurs observées, les probabilités cumulées correspondantes ou les scores normaux, c'est-à-dire les valeurs équivalentes de la variable normale réduite [STAT2, § 3.3.2]. Ces dernières valeurs peuvent être déterminées par la relation :

$$u_i = \Phi^{-1}[(i - 1/2)/n],$$

au niveau supérieur +1 du facteur B,  $\bar{x}_{22..}$  est la moyenne des observations relatives à la fois au niveau supérieur +1 du facteur A et au niveau supérieur +1 du facteur B, etc. Nous aurions pu ajouter un cinquième indice, relatif aux répétitions des mesures, mais nous avons évité de le faire, afin de ne pas surcharger les notations.

De plus, nous considérons ainsi que les « effets des facteurs et des interactions » sont les valeurs estimées des termes  $a_i$ ,  $b_j$ , ...,  $(ab)_{ij}$ ,  $(ac)_{ik}$ , ...,  $(abc)_{ijk}$ , ... de l'analyse de la variance [STAT2, § 9.3.2, 10.3.2 et 11.2.3]. Les « effets » sont parfois définis aussi comme étant les valeurs, deux fois plus élevées, qui correspondent, pour les différents facteurs, aux différences entre le niveau supérieur et le niveau inférieur, et non pas aux différences entre le niveau supérieur et le niveau moyen.

$n$  étant le nombre d'observations qui doivent figurer dans le diagramme,  $i$  les rangs des observations, et  $\Phi^{-1}$  la fonction inverse de la fonction de répartition  $\Phi(u)$  de la distribution normale réduite [STAT1, § 6.6.1].

Dans le cas présent, on prend en considération les valeurs absolues des effets des facteurs et des interactions, car les signes affectés à ces effets dépendent uniquement de la manière dont a été réalisé le codage des facteurs en  $-1$  et  $+1$ . On ne doit donc considérer que la moitié supérieure du diagramme de probabilité et, en conséquence, les scores normaux sont définis de la manière suivante :

$$u_i = \Phi^{-1}[1/2 + (i - 1/2)/(2n)].$$

Pour les deux valeurs extrêmes 14 et 244 du tableau 5.5.4, on a par exemple, respectivement :

$$u_1 = \Phi^{-1}[1/2 + (1 - 1/2)/30] = 0,042 \quad \text{et} \quad u_{15} = \Phi^{-1}[1/2 + (15 - 1/2)/30] = 2,128.$$

### 3° Interprétation

L'examen de la figure 5.5.2 montre que le demi-diagramme de probabilité est loin d'être linéaire, dans la mesure où il présente notamment une courbure à proximité de l'origine.

Néanmoins, il met en évidence un point qui se détache nettement de l'ensemble des autres, ce point correspondant à l'effet du facteur B (244 U/ml). Cette observation confirme dans une certaine mesure les résultats de l'analyse de la variance, le facteur B étant de loin le plus significatif (§ 5.5.2).

L'examen purement visuel du demi-diagramme de probabilité peut éventuellement être complété par la réalisation d'un des tests auxquels nous avons fait allusion au paragraphe 5.2.5°.

### 4° Commentaires

On notera que les effets des facteurs et des interactions qui sont présentés dans le tableau 5.5.4, ainsi que les conclusions qu'on peut en déduire, sont indépendants du fait qu'on tient compte uniquement des résultats relatifs aux 16 points expérimentaux factoriels ou de l'ensemble des 20 unités expérimentales. Ils sont indépendants aussi du fait qu'on considère les 32 ou les 40 valeurs observées individuelles ou, au contraire, les 16 ou les 20 moyennes (tableau 5.5.2).

Ces remarques sont importantes, car elles soulignent le fait que l'interprétation des résultats par l'intermédiaire d'un demi-diagramme de probabilité reste applicable en l'absence de répétitions des points expérimentaux factoriels et en l'absence d'observations complémentaires relatives à un éventuel point central. Il n'en est pas de même pour l'analyse de la variance que nous avons présentée au paragraphe 5.5.2. La répétition des observations est en effet indispensable pour obtenir la ligne « Mesures » du tableau 5.5.3, et les observations complémentaires sont indispensables pour calculer les composantes « Var. rés. » et « Non-lin. » de ce tableau.

## ⊖ 5.5.4 Interprétation des résultats : régression multiple

### 1° Différentes possibilités

Une troisième approche du même problème est basée sur la régression multiple [STAT2, § 16.2 et 16.3; DAGNELIE, 1986, chap. 4]. Comme l'étude du demi-diagramme de probabilité, cette approche peut concerner aussi bien des mesures effectuées en plusieurs répétitions, y compris pour un point central (40 observations dans le cas envisagé), des mesures effectuées en plusieurs répétitions mais sans point central (32 observations dans le cas envisagé), des mesures qui auraient été effectuées sans répétitions sauf pour un point central (20 observations dans le cas envisagé), ou encore des mesures qui auraient été effectuées sans répétitions et pour un ensemble de points factoriels uniquement (16 observations dans le cas envisagé).

Nous n'examinerons que cette dernière possibilité, à partir des 16 premières moyennes de la dernière colonne du tableau 5.5.2, comme si seules ces données étaient disponibles.

### 2° Étude des seuls facteurs

Comme le schéma factoriel est du type  $2^k$ , avec donc deux niveaux seulement pour chacun des facteurs, il ne permet au premier abord que d'établir une équation du premier degré.

En désignant les variables explicatives associées aux quatre facteurs par  $x_A$ ,  $x_B$ ,  $x_C$  et  $x_D$ , et en considérant comme valeurs de ces variables les valeurs codées  $-1$  et  $+1$ , on obtient la relation :

$$y = 444 + 127x_A + 244x_B + 75x_C + 130x_D,$$

avec un écart-type résiduel estimé égal à 285 U/ml<sup>31</sup>.

On voit apparaître dans cette équation la moyenne générale de l'ensemble des observations relatives aux 16 points factoriels (444) et les effets des quatre facteurs (tableau 5.5.4), ce qui confirme que la régression multiple peut être une autre méthode de calcul de ces effets.

Les valeurs des variables  $t$  de STUDENT qui peuvent être associées aux quatre coefficients de régression :

$$t_A = 1,78, \quad t_B = 3,43, \quad t_C = 1,05 \quad \text{et} \quad t_D = 1,82,$$

montrent, avec 11 degrés de liberté, que seul le coefficient de  $x_B$  est significatif ( $P_B = 0,0056$ ).

---

<sup>31</sup> Il s'agit ici de l'écart-type résiduel relatif à la régression multiple, qui ne doit pas être confondu avec l'écart-type résiduel qui peut être déduit de l'analyse de la variance présentée au paragraphe 5.5.2.

Si on souhaite s'en tenir aux seules variables qui apportent une contribution significative, la solution du problème est donc la régression simple :

$$y = 444 + 244x_B,$$

avec un écart-type résiduel estimé égal à 328 U/ml.

Ces différents résultats confirment ceux qui ont été obtenus antérieurement en ce qui concerne l'importance relative des quatre facteurs.

### 3° Étude des facteurs et des interactions

On peut envisager d'introduire en outre, dans l'équation de régression, les différents produits de deux variables  $x_A x_B$ ,  $x_A x_C$ , ...,  $x_C x_D$ .

On obtient alors une équation de régression à 10 variables explicatives dans laquelle, à nouveau, seule la variable  $x_B$  a une contribution significative ( $t_B = 4,34$  et  $P_B = 0,0075$ , avec cinq degrés de liberté).

En allant plus loin, on peut aussi considérer comme variables explicatives les produits de trois variables  $x_A x_B x_C$ ,  $x_A x_C x_D$ , ...,  $x_B x_C x_D$ , et éventuellement le produit des quatre variables  $x_A x_B x_C x_D$ .

Par une procédure de type *stepwise* (ou pas à pas) [DAGNELIE, 1986, § 4.5.2], on aboutit à l'équation suivante, dont tous les coefficients sont significatifs :

$$y = 444 + 127x_A + 244x_B + 75x_C + 130x_D \\ + 101x_A x_B - 148x_A x_C + 69x_B x_C - 117x_A x_C x_D,$$

avec un écart-type résiduel estimé égal à 110 U/ml. Cette équation est évidemment nettement meilleure que l'équation qui fait intervenir uniquement le facteur B, dont l'écart-type résiduel est trois fois plus élevé (328 U/ml).

On peut constater que les variables qui interviennent dans l'équation de régression correspondent aux différentes composantes de l'analyse de la variance qui étaient significatives au premier abord (colonnes *F* et *P* du tableau 5.5.3), et cela bien que les données prises en considération ne soient pas exactement les mêmes dans les deux cas (40 mesures individuelles pour l'analyse de la variance et 16 moyennes pour la régression multiple). D'autre part, comme pour les quatre facteurs, les coefficients de régression des termes produits sont exactement les effets des interactions qui y correspondent (tableau 5.5.4)<sup>32</sup>.

<sup>32</sup> Les relations étroites qui existent entre l'analyse de la variance et la régression multiple découlent du fait que les différentes variables explicatives sont toutes non corrélées, en raison du caractère factoriel de l'expérience. Il en résulte notamment que les coefficients de la régression multiple sont égaux aux coefficients des régressions simples, que les sommes des carrés des écarts qui peuvent être associées à ces coefficients sont identiquement celles de l'analyse de la variance, etc. [STAT2, § 16.2.2; DAGNELIE, 1986, § 4.3 et 4.4].

#### 4° Commentaires

Quelques remarques complémentaires méritent d'être formulées en ce qui concerne la régression multiple.

Tout d'abord, il faut noter que les carrés  $x_A^2$ ,  $x_B^2$ ,  $x_C^2$  et  $x_D^2$  des variables initiales ne peuvent pas être pris en considération comme variables explicatives, car ils sont tous uniformément égaux à 1.

D'autre part, la dernière possibilité que nous avons évoquée (régression faisant intervenir les quatre variables initiales et, éventuellement, toutes les variables produits) doit être envisagée avec une extrême prudence, en raison du nombre élevé de variables potentielles qu'elle permet de considérer, ce nombre étant égal au nombre d'observations moins une.

Enfin, les équations de régression pourraient faire intervenir les valeurs réelles des niveaux des facteurs, telles qu'elles sont données dans le tableau 5.5.1, ou leurs logarithmes, au lieu des valeurs codées  $-1$  et  $+1$ , les valeurs des coefficients de régression étant alors modifiées en conséquence.

#### 5° Utilité des différentes approches

En ce qui concerne les différentes approches que nous avons présentées, il n'est évidemment pas question de vouloir traiter, dans la pratique courante, tous les cas rencontrés selon les différentes procédures.

En adoptant diverses approches pour un même jeu de données, nous avons voulu mettre en évidence, au point de vue didactique, les relations et les concordances qui existent entre elles, en particulier en ce qui concerne l'analyse de la variance et la régression multiple, et aussi les discordances qui peuvent apparaître, en particulier quant à la méthode du demi-diagramme de probabilité par comparaison avec les autres méthodes.

En pratique, un choix doit être fait dans chaque cas a priori, en fonction notamment du ou des buts poursuivis. Un principe relativement général peut être d'utiliser la méthode du demi-diagramme de probabilité dans l'optique de l'identification des facteurs influents, souvent pour un nombre relativement important de facteurs, et de considérer l'analyse de la variance et la régression multiple comme des méthodes qui permettent une étude plus approfondie, l'une dans une optique d'interprétation des facteurs et de leurs interactions, et l'autre dans une optique d'estimation ou de prévision, et éventuellement de détermination de conditions optimales, de production ou de fabrication.

### ⊖ 5.5.5 Étude de deux expériences factorielles fractionnaires

#### 1° Subdivision des données

Les données que nous avons examinées au cours des paragraphes précédents permettent aussi d'illustrer les notions d'expériences factorielles fractionnaires. Il

suffit pour cela de scinder les données factorielles du tableau 5.5.2 en deux parties, correspondant aux deux ensembles d'objets que nous avons identifiés au paragraphe 2.3.3.4°, à savoir d'une part :

a, b, c, d, abc, abd, acd, bcd,

et d'autre part :

(1), ab, ac, ad, bc, bd, cd, abcd.

Le tableau 5.5.5 présente les données de cette manière, en supposant qu'on ne dispose que d'une seule observation, en l'occurrence les moyennes du tableau 5.5.2, pour chacun des points expérimentaux factoriels<sup>33</sup>.

**Tableau 5.5.5.** Étude des conditions de production d'une enzyme : présentation des données sous la forme de deux ensembles factoriels fractionnaires.

| Obj. | A  | B  | C  | D  | Moy.    | Obj. | A  | B  | C  | D  | Moy.    |
|------|----|----|----|----|---------|------|----|----|----|----|---------|
| a    | +1 | -1 | -1 | -1 | 27,0    | (1)  | -1 | -1 | -1 | -1 | 38,5    |
| b    | -1 | +1 | -1 | -1 | 265,5   | ab   | +1 | +1 | -1 | -1 | 715,0   |
| c    | -1 | -1 | +1 | -1 | 84,0    | ac   | +1 | -1 | +1 | -1 | 73,0    |
| d    | -1 | -1 | -1 | +1 | 38,0    | ad   | +1 | -1 | -1 | +1 | 673,0   |
| abc  | +1 | +1 | +1 | -1 | 756,5   | bc   | -1 | +1 | +1 | -1 | 557,5   |
| abd  | +1 | +1 | -1 | +1 | 1.160,0 | bd   | -1 | +1 | -1 | +1 | 38,5    |
| acd  | +1 | -1 | +1 | +1 | 128,5   | cd   | -1 | -1 | +1 | +1 | 538,0   |
| bcd  | -1 | +1 | +1 | +1 | 982,0   | abcd | +1 | +1 | +1 | +1 | 1.033,5 |

## 2° Première expérience fractionnaire

La partie gauche du tableau 5.5.5 constitue une expérience factorielle fractionnaire  $2^{4-1}$ , comportant seulement huit observations pour quatre facteurs. Cette expérience est de résolution IV (§ 2.3.3.7°), les différents facteurs étant confondus avec les interactions de trois facteurs, les interactions de deux facteurs étant confondues deux à deux, et aucune information n'étant disponible en ce qui concerne l'interaction des quatre facteurs (§ 2.3.3.4°).

En faisant abstraction des conclusions qui ont été obtenues au cours des paragraphes précédents à propos de l'expérience complète, on peut analyser les huit observations en question par l'analyse de la variance, par l'étude du demi-diagramme de probabilité, et par la régression multiple (nous examinerons plus loin les huit autres observations, qui constituent la partie droite du tableau 5.5.5).

<sup>33</sup> Il est évident que, s'il s'agissait réellement d'observations individuelles, les décimales seraient tout à fait superflues, pour des valeurs allant de 27 à 1.160. Nous n'avons cependant pas voulu les supprimer, pour ne pas introduire de discordances, même minimes, par rapport aux résultats antérieurs.

### 3° Analyse de la variance

Les résultats de l'analyse de la variance sont présentés dans la première partie du tableau 5.5.6. Selon ces résultats, seul le facteur B (lactosérum) est significatif.

**Tableau 5.5.6.** Étude des conditions de production d'une enzyme : tableaux d'analyse de la variance relatifs à deux expériences factorielles fractionnaires.

| Sources de variation | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | F      | P     |
|----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|--------|-------|
| A                    | 1                 | 61.688                       | 61.688        | 0,95   | 0,40  |
| B                    | 1                 | 1.041.485                    | 1.041.485     | 16,0 * | 0,028 |
| C                    | 1                 | 26.508                       | 26.508        | 0,41   | 0,57  |
| D                    | 1                 | 172.725                      | 172.725       | 2,65   | 0,20  |
| Variation résiduelle | 3                 | 195.551                      | 65.184        |        |       |
| Totaux               | 7                 | 1.497.957                    |               |        |       |
| A                    | 1                 | 218.461                      | 218.461       | 1,48   | 0,31  |
| B                    | 1                 | 130.561                      | 130.561       | 0,89   | 0,42  |
| C                    | 1                 | 67.896                       | 67.896        | 0,46   | 0,55  |
| D                    | 1                 | 101.025                      | 101.025       | 0,69   | 0,47  |
| Variation résiduelle | 3                 | 442.016                      | 147.339       |        |       |
| Totaux               | 7                 | 959.959                      |               |        |       |

Il faut noter toutefois que la variation « résiduelle » regroupe en fait les contributions des trois couples d'interactions de deux facteurs (AB-CD, AC-BD et AD-BC). Si on avait fait apparaître individuellement chacun de ces termes, on n'aurait disposé d'aucune composante de variation résiduelle, et donc d'aucune possibilité de test de signification.

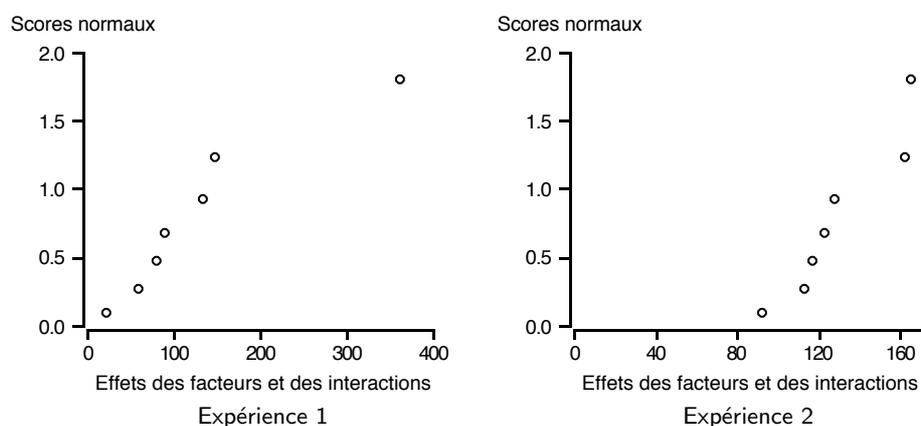
### 4° Demi-diagramme de probabilité

Les effets des facteurs et des interactions, calculés de la même manière qu'au paragraphe 5.5.3.1°, sont donnés dans la colonne « Expér. 1 » du tableau 5.5.7, et le demi-diagramme de probabilité relatif à ces effets est présenté dans la partie gauche de la figure 5.5.3. L'examen de ces deux éléments d'informations confirme l'importance du facteur B.

On remarquera que, dans le tableau 5.5.7, nous avons utilisé une notation du type « A (BCD) » en vue d'indiquer qu'il s'agit soit de « A-BCD », le facteur A étant confondu avec l'interaction BCD, soit du seul facteur A, mais alors sous l'hypothèse que l'interaction BCD est nulle. Très souvent, seule une notation de type « A » est utilisée, en perdant de vue la confusion possible du facteur considéré avec une éventuelle interaction non nulle de trois facteurs (ou de plus de trois facteurs dans d'autres cas).

**Tableau 5.5.7.** Étude des conditions de production d'une enzyme : effets des facteurs et des interactions relatifs à deux expériences factorielles fractionnaires (U/ml).

| Facteurs et interactions | Effets   |          |
|--------------------------|----------|----------|
|                          | Expér. 1 | Expér. 2 |
| A (BCD)                  | 88       | 165      |
| B (ACD)                  | 361      | 128      |
| C (ABD)                  | 58       | 92       |
| D (ABC)                  | 147      | 112      |
| AB-CD                    | 79       | 123      |
| AC-BD                    | -133     | -162     |
| AD-BC                    | -21      | 117      |



**Figure 5.5.3.** Étude des conditions de production d'une enzyme : demi-diagrammes de probabilité relatifs à deux expériences factorielles fractionnaires.

En réalité, cette remarque s'applique aussi à l'analyse de la variance (tableau 5.5.6), dans laquelle les notations « A », « B », « C » et « D » et les tests correspondants supposent en fait que les quatre interactions de trois facteurs sont nulles.

Quant à la régression multiple, elle n'ajoute pas grand-chose aux deux autres approches, dans la mesure où elle confirme uniquement la signification du facteur B.

### 5° Deuxième expérience fractionnaire

L'étude de la deuxième partie du tableau 5.5.5 peut être intéressante au point de vue didactique. Les informations en question peuvent en effet être considérées

comme constituant une deuxième expérience factorielle fractionnaire, indépendante de la première et devant donner en principe des résultats comparables.

L'analyse de la variance de ces données constitue la deuxième partie du tableau 5.5.6, tandis que les effets des facteurs et des interactions sont présentés dans la colonne « Expér. 2 » du tableau 5.5.7, et le demi-diagramme de probabilité constitue la partie droite de la figure 5.5.3<sup>34</sup>. Aucun effet n'apparaît significatif pour cette deuxième expérience, les résultats obtenus étant très différents en particulier en ce qui concerne le facteur B ( $F = 0,89$  au lieu de 16,0 et  $P = 0,42$  au lieu de 0,028).

Les différences observées entre les conclusions des deux expériences partielles, réalisées dans des conditions identiques, soulignent le caractère aléatoire de tout processus expérimental, en particulier quand le nombre d'observations est très limité.

---

<sup>34</sup> En examinant la partie droite de la figure 5.5.3, on notera que l'échelle des abscisses est très différente de celle de la partie gauche.

# Chapitre 6

## Les expériences en blocs aléatoires complets

### Sommaire

#### **6.1 Principes**

6.1.1 Les expériences en champ

6.1.2 Quelques autres situations

#### **6.2 Analyse des résultats**

#### **6.3 Discussion**

#### **6.4 Exemple 1 : expérience en blocs aléatoires complets (planification)**

6.4.1 Présentation

6.4.2 Parcelles sans bordures

6.4.3 Parcelles avec bordures

#### **6.5 Exemple 2 : expérience en blocs aléatoires complets (analyse de résultats)**

6.5.1 Présentation et données

6.5.2 Analyse des résultats : analyse de la variance

6.5.3 Analyse des résultats : régression

## 6.1 Principes

### 6.1.1 Les expériences en champ

#### 1° Notion de bloc aléatoire complet

Dans le cas des expériences en champ, au sens large (champ, verger, forêt, etc.), on entend classiquement par bloc un ensemble de parcelles voisines et très semblables les unes aux autres, quant aux conditions de croissance et de développement de la végétation. Ces blocs sont dits complets quand tous les objets mis en expérience sont présents dans chacun d'eux, le nombre de parcelles par bloc étant au moins égal au nombre d'objets.

La répartition des objets au sein des différents blocs se fait normalement de façon complètement aléatoire et indépendamment d'un bloc à l'autre, d'où la notion de *blocs aléatoires complets*, aussi appelés *blocs randomisés*<sup>1</sup> et parfois *blocs FISHER*.

Cette répartition « au hasard » dans les blocs peut être réalisée à l'aide de tables de nombres aléatoires classiques ou, plus facilement, à l'aide de tables de permutations aléatoires, de 10, 20 ou 50 nombres par exemple. Une telle répartition, y compris éventuellement la préparation du plan d'expérience tel qu'il doit être installé sur le terrain, peut également être faite par ordinateur.

#### 2° Forme des blocs

La forme des blocs doit toujours être définie en même temps que la forme des parcelles (§ 3.3), de manière à garantir une similitude aussi grande que possible des conditions de croissance et de développement à l'intérieur de chacun des blocs, ce qui correspond aussi, pour un champ d'expérience donné, à une hétérogénéité maximum entre blocs.

Quand le terrain dont on dispose est relativement homogène, il y a généralement intérêt à adopter pour les blocs, comme pour les parcelles, une forme aussi carrée que possible. Par contre, quand le terrain présente dans une certaine direction un net gradient de fertilité (ou de toute autre nature), il y a lieu de donner autant que possible aux blocs une forme allongée perpendiculairement à cette direction, ce qui revient normalement à disposer les blocs perpendiculairement aux parcelles.

La figure 6.1.1 illustre ces principes, dans le cas d'une expérience qui ferait intervenir sept objets et quatre blocs, en présence d'un gradient qui se marquerait de gauche à droite, dans le sens de la longueur du champ d'expérience. La répartition au hasard a été réalisée à l'aide des quatre dernières lignes de la partie droite de la table de permutations aléatoires des nombres de 1 à 10 donnée en annexe (table 1.1), en négligeant les valeurs supérieures à 7.

---

<sup>1</sup> En anglais : *randomized blocks, complete blocks, randomized complete blocks*.

|          |        |        |        |
|----------|--------|--------|--------|
| 3        | 4      | 4      | 6      |
| 6        | 3      | 5      | 3      |
| 1        | 5      | 2      | 1      |
| 2        | 1      | 7      | 5      |
| 7        | 7      | 3      | 2      |
| 4        | 2      | 1      | 4      |
| 5        | 6      | 6      | 7      |
| Bloc 1   | Bloc 2 | Bloc 3 | Bloc 4 |
| Gradient |        |        |        |

**Figure 6.1.1.** Exemple de forme et d'orientation des parcelles et des blocs en présence d'un gradient (de fertilité ou de toute autre nature).

### 3° Généralisation

Le principe des blocs aléatoires complets, qui est particulièrement facile à exposer dans le cas des expériences en champ, peut être étendu à de nombreuses autres situations. L'objectif est toujours de constituer des groupes d'unités expérimentales aussi semblables que possible les unes aux autres, de manière à réduire, au sein des blocs, l'hétérogénéité des conditions expérimentales.

La diversité des situations qui peuvent se présenter, y compris dans un même domaine d'application, génère évidemment une grande variété dans la notion de bloc elle-même.

## 6.1.2 Quelques autres situations

### 1° Productions végétales

Nous avons introduit ci-dessus le concept de bloc dans le cas d'un champ de forme régulière, dans lequel pouvaient être délimités des blocs eux-mêmes de forme régulière. En pratique, en vue d'assurer leur homogénéité, les blocs peuvent aussi être conçus en étant de forme tout à fait irrégulière, voire même constitués d'éléments de terrain disjoints.

Ainsi, en arboriculture fruitière par exemple, les blocs peuvent être formés d'arbres de configuration semblable (mêmes dimensions et mêmes dispositions des branches notamment), sans que ces arbres soient nécessairement voisins les uns des autres.

Dans le même domaine, les blocs peuvent également être des arbres, pour chacun desquels les unités expérimentales sont des branches ou des rameaux, si

du moins les objets considérés peuvent être étudiés sur des branches ou sur des rameaux individuels (différents modes d'éclaircissage des fruits par exemple).

Les photographies 1, 7, 8, 11, 12, 15 et 16 et leurs légendes [DAGNELIE, 2009] donnent diverses illustrations de la notion de bloc, en champ et en verger.

### 2° Productions animales

D'une manière fort semblable, en matière de productions animales, les blocs peuvent être tout d'abord des groupes d'animaux de même race, de même sexe, de même âge et de même poids (ou d'âges et de poids semblables), ou des groupes d'animaux de même père, de même sexe et de même âge (demi-frères ou demi-sœurs), ou mieux encore, quand cela s'avère possible, des animaux d'une même nichée et de même sexe. Tel peut être le cas par exemple pour des nichées de porcelets, au sein desquelles les différents objets peuvent être répartis de manière complètement aléatoire, et cela indépendamment d'une nichée à l'autre, chacune des nichées constituant un bloc.

Mais les blocs peuvent aussi être des animaux considérés individuellement, quand il est possible de leur appliquer simultanément deux ou plusieurs traitements sur différentes parties du corps, qui sont alors considérées comme étant différentes unités expérimentales.

### 3° Domaine médical

Les mêmes principes peuvent s'appliquer au domaine médical, les blocs étant des groupes de patients qui présentent des caractéristiques semblables, quant au sexe, à l'âge, au degré de développement de certaines pathologies, etc., et au sein desquels peuvent être répartis les différents traitements.

Les problèmes particuliers de randomisation que nous avons évoqués au paragraphe 5.1.3° se présentent cependant de manière plus aiguë ici. Plus encore que pour les expériences complètement aléatoires, il peut en effet s'avérer difficile de concilier la constitution de blocs et l'affectation aléatoire des différents traitements aux différents patients, à l'intérieur des blocs, avec le caractère aveugle de cette répartition.

Les blocs peuvent également être des patients, qui sont soumis simultanément à deux ou plusieurs traitements. On peut penser notamment à la comparaison de traitements anti-allergiques, à laquelle nous avons fait allusion antérieurement, en considérant que l'unité expérimentale est une certaine surface de peau (§ 3.1.3°). Mais on peut évoquer aussi à titre d'exemple l'étude de certaines affections oculaires, chaque œil pouvant constituer une unité expérimentale et le patient étant un bloc de deux unités expérimentales.

Quant à la terminologie, en matière médicale, la notion de bloc est parfois associée à celle de *stratification*<sup>2</sup>, avec toutefois certaines nuances [WITTES, 1998].

---

<sup>2</sup> En anglais : *stratification*.

#### 4° Domaine industriel et laboratoire

Dans le domaine industriel comme en laboratoire, les blocs peuvent être des ensembles de manipulations ou d'essais effectués durant des périodes d'une durée donnée (des demi-journées ou des journées, par exemple), au cours desquelles on peut penser que les conditions de travail sont particulièrement stables. Il peut s'agir aussi d'ensembles de manipulations ou d'essais réalisés sur un même appareil, par opposition à d'autres appareils semblables constituant d'autres blocs, ou par une même personne ou une même équipe de travailleurs, ou sur un même lot de matière première, etc.

C'est sans doute dans ce secteur qu'on peut être le plus imaginaire, en vue de maîtriser au mieux la variabilité du matériel expérimental et des conditions de réalisation de l'expérience. On peut citer encore, à titre d'exemple très particulier, la possibilité de comparer des shampoings sur des « demi-têtes », les cheveux d'une même personne pouvant être lavés pour moitié avec un premier shampoing et pour moitié avec un deuxième shampoing, chaque personne constituant alors un bloc de deux unités expérimentales.

## 6.2 Analyse des résultats

### 1° Un facteur

Dans le cas le plus simple d'une expérience faisant intervenir un seul facteur, l'interprétation statistique des résultats qui est la plus courante est basée sur l'analyse de la variance à deux critères de classification. Le facteur subsidiaire blocs vient en effet s'ajouter au facteur principal envisagé initialement.

Le facteur blocs est considéré le plus souvent comme aléatoire, dans la mesure où on ne cherche pas à obtenir des conclusions relatives aux seuls blocs étudiés, mais bien à une population ou à un ensemble plus vaste, dont les quelques blocs étudiés sont représentatifs. Il en résulte que le modèle d'analyse de la variance pris en considération est en général un modèle croisé mixte ou aléatoire [STAT2, § 10.3.3 et 10.3.4]. En outre, pour chacune des variables considérées, on ne dispose fréquemment que d'une seule observation par unité expérimentale, ce qui correspond au cas des « échantillons d'une seule observation » [STAT2, § 10.3.6].

Les remarques que nous avons formulées au paragraphe 5.2.1°, en matière d'examen préliminaire des données (respect des conditions d'application et transformations de variables) et d'analyse ultérieure (comparaisons particulières et multiples de moyennes essentiellement) restent d'application. Ces remarques concernent d'ailleurs tous les cas d'analyse de la variance que nous évoquerons dans la suite.

De même, comme pour les expériences complètement aléatoires (§ 5.2.2°), l'analyse de la variance peut céder la place à d'autres méthodes, de type non

paramétrique, d'étude de tables de contingence, de régression, etc. Il faut citer en particulier le test non paramétrique de FRIEDMAN [STAT2, § 10.3.8].

Enfin, on se rappellera que, si le facteur blocs est considéré comme fixe et si on ne dispose que d'une seule observation par unité expérimentale et par variable observée, aux conditions de normalité et d'égalité des variances, s'ajoute une condition d'additivité du modèle d'analyse de la variance, cette condition pouvant être vérifiée dans une certaine mesure par le test de TUKEY [STAT2, § 10.3.6].

## 2° Deux ou plusieurs facteurs

Pour deux ou plus de deux facteurs, l'analyse de la variance est aussi la méthode d'analyse qui est sans doute la plus utilisée. Dans le cas des expériences factorielles complètes par exemple (§ 2.3.2), il s'agit normalement de modèles croisés mixtes ou aléatoires d'analyse à trois ou plus de trois critères de classification [STAT2, § 11.2.3, 11.2.4 et 11.4.2].

Il faut noter à ce sujet que les différentes interactions qui lient le facteur blocs à un ou plusieurs autres facteurs sont très souvent du même ordre de grandeur, et qu'en conséquence, ces interactions sont fréquemment regroupées en une seule composante, de manière à augmenter l'efficacité des comparaisons. Le carré moyen qui résulte de ce regroupement est couramment qualifié, de façon quelque peu abusive, de carré moyen « résiduel ».

Dans le cas des surfaces de réponse, des mélanges, etc. (§ 2.4), la régression est généralement associée à l'analyse de la variance.

## 6.3 Discussion

### 1° Avantages

Les expériences en blocs aléatoires complets présentent de multiples avantages. Elles sont en premier lieu souvent aussi simples, voire même plus simples à organiser que les expériences complètement aléatoires.

Elles peuvent en outre être réalisées pour n'importe quel nombre d'objets et n'importe quel nombre de répétitions, la seule restriction étant que le nombre de répétitions doit être, d'une façon générale, identique pour les différents objets. Il est toutefois possible de ne pas respecter entièrement cette dernière contrainte en attribuant à certains objets (témoin par exemple) deux ou plusieurs unités expérimentales par bloc, ce qui conduit à adopter pour ces objets un nombre de répétitions qui est un multiple du nombre de blocs (§ 2.2.2.2°).

Les expériences en blocs aléatoires complets possèdent également l'avantage de conserver toutes leurs propriétés quand, pour quelque raison que ce soit, un ou plusieurs objets ou un ou plusieurs blocs doivent être éliminés, par exemple au moment de la réalisation des observations ou lors de l'analyse des résultats.

Enfin, ces expériences sont en général plus efficaces que les expériences complètement aléatoires. Pour un même matériel expérimental, la précision ou la puissance des comparaisons est plus élevée, ou inversement, pour une même précision ou une même puissance, le matériel expérimental peut être plus réduit.

### 2° Efficacité relative : détermination approchée

L'*efficacité relative*<sup>3</sup> du dispositif en blocs aléatoires complets, par comparaison avec le dispositif complètement aléatoire, peut être estimée en première approximation par le rapport des carrés moyens qui servent de bases de comparaison dans les deux analyses de la variance [STAT2, § 10.3.6].

En vue de préciser les choses, considérons une expérience en blocs aléatoires complets qui comporterait  $p$  objets et  $q$  blocs, et désignons par  $SCE_b$  et  $SCE_{ab}$  respectivement la somme des carrés des écarts relative au facteur blocs et la somme des carrés des écarts relative à l'interaction objets-blocs. Le carré moyen qui sert de base de comparaison dans l'analyse de la variance à deux critères de classification est dans ces conditions :

$$CM_{ab} = SCE_{ab}/[(p-1)(q-1)],$$

tandis que le carré moyen résiduel de l'analyse de la variance à un critère de classification, qui ne tiendrait compte que du seul facteur objets, en négligeant le facteur blocs, serait :

$$CM_r = (SCE_b + SCE_{ab})/[(q-1) + (p-1)(q-1)].$$

Le rapport des carrés moyens, et donc l'efficacité relative, est en conséquence :

$$CM_r/CM_{ab} = (p-1)(SCE_b/SCE_{ab} + 1)/p.$$

Cette formulation montre bien que le gain de précision ou de puissance du dispositif en blocs aléatoires complets, par rapport au dispositif complètement aléatoire, est d'autant plus important que le facteur blocs, matérialisé par la somme des carrés des écarts  $SCE_b$ , est lui-même important.

Cette présentation de l'efficacité relative n'est cependant qu'approchée et conduit à une surestimation, qui ne peut pas être négligée quand le nombre d'objets et le nombre de blocs sont réduits.

### ⊖ 3° Efficacité relative : détermination exacte

Deux modifications doivent intervenir en vue d'aboutir à un résultat tout à fait correct.

D'une part, on peut montrer qu'en raison des restrictions apportées à la randomisation par l'introduction du facteur blocs, la quantité  $CM_r$ , considérée ci-dessus

---

<sup>3</sup> En anglais : *relative efficiency*.

est en moyenne une valeur surestimée de la variance résiduelle d'une éventuelle expérience complètement aléatoire. Une estimation non biaisée de cette variance résiduelle est donnée par la relation :

$$CM'_r = [SCE_b + (p-1)q CM_{ab}] / (pq-1).$$

D'autre part, l'introduction du facteur blocs provoque aussi une réduction du nombre de degrés de liberté du carré moyen qui sert de base de comparaison, et donc une réduction de la précision ou de la puissance du test. Une correction peut être apportée à ce sujet en multipliant le quotient  $CM'_r/CM_{ab}$  par la quantité :

$$\frac{[p(q-1)+3]}{[p(q-1)+1]} \frac{[(p-1)(q-1)+1]}{[(p-1)(q-1)+3]},$$

les valeurs  $(p-1)(q-1)$  et  $p(q-1)$  étant les nombres de degrés de liberté relatifs aux deux carrés moyens  $CM_{ab}$  et  $CM'_r$  (ou ci-dessus  $CM_{ab}$  et  $CM_r$ ).

#### 4° Conséquences pratiques

Le fait que l'efficacité relative est fonction de l'importance des différences entre blocs n'est pas sans conséquences quant à la réalisation pratique des expériences. Non seulement, comme nous l'avons indiqué au paragraphe 6.1, les blocs doivent être conçus de telle sorte qu'ils soient aussi homogènes que possible, et donc aussi différents que possible les uns des autres, mais il peut être utile en outre de confondre avec le facteur blocs certaines sources de variation subsidiaires.

Si par exemple, dans une expérience en champ, certains travaux ne peuvent pas être réalisés d'une traite, pour l'ensemble de l'expérience, il y a intérêt à interrompre le travail entre deux blocs consécutifs, plutôt qu'au milieu de l'un ou l'autre bloc, de manière à conserver une homogénéité aussi grande que possible au sein de chacun des blocs.

De même, si le travail d'observation doit être réparti entre deux ou plusieurs personnes, il y a intérêt à confier entièrement un ou plusieurs blocs à chacune des personnes concernées, afin de confondre les éventuelles différences d'appréciation des observateurs avec le facteur blocs.

#### 5° Données manquantes

L'existence de *données manquantes*<sup>4</sup> peut constituer dans une certaine mesure une entrave à l'utilisation du dispositif en blocs aléatoires complets.

Si la présence de données manquantes peut être considérée comme purement aléatoire et si ces données sont peu nombreuses, une solution relativement simple consiste à procéder à l'estimation des valeurs manquantes et, corrélativement, à une réduction de certains nombres de degrés de liberté [STAT2, § 10.4.3]. Si

---

<sup>4</sup> En anglais : *missing data*.

par contre, les données manquantes sont nombreuses, leur nombre dépassant par exemple un dixième du nombre total d'observations, le recours à l'analyse de la variance non orthogonale, à l'analyse de la covariance, ou encore au modèle linéaire mixte peut s'imposer (§ 12.4.1, 12.4.2 et 12.4.4).

Les problèmes liés au nombre élevé de données manquantes, doublés des difficultés particulières de randomisation (§ 6.1.2.3°), ont comme conséquence que le dispositif en blocs aléatoires complets est relativement peu utilisé dans le domaine médical, par comparaison notamment avec le secteur agronomique.

Nous donnons aussi quelques informations complémentaires relatives à la question des données manquantes au paragraphe 12.5.

### 6° Autres dispositifs en blocs

La dimension des blocs et le fait que tous les objets doivent être présents au moins une fois dans chacun des blocs constituent dans certains cas un frein à l'utilisation du dispositif en blocs aléatoires complets.

D'une part, certains blocs sont par essence même de très petite dimension. Nous avons cité au paragraphe 6.1.2 plusieurs exemples de blocs de deux unités expérimentales, et on pourrait envisager aussi certains blocs qui, par leur nature, ne comporteraient que trois ou quatre unités. De tels blocs ne permettent évidemment pas de comparer, en blocs complets, plus de deux, trois ou quatre objets.

D'autre part, pour de grands nombres d'objets (plus de 15 ou 20 objets par exemple) et pour un matériel expérimental peu homogène, l'utilisation de blocs complets peut être inopportune, l'efficacité des expériences en blocs complets pouvant alors être relativement faible.

Enfin, la présence de tous les objets au moins une fois dans chacun des blocs est une contrainte qui s'adapte mal à de nombreuses expériences relatives à l'étude des surfaces de réponse, y compris le cas des mélanges, et aux plans optimaux (§ 2.4). En effet, dans ces différents cas, les objets ou la plupart d'entre eux au moins ne sont souvent présents qu'en une seule répétition.

L'utilisation d'autres dispositifs, tels que les dispositifs en blocs incomplets, en réseaux, etc. (§ 9.1 et 10.1), doit alors être envisagée. À cet égard, il faut noter que la *constitution de blocs*<sup>5</sup>, complets ou non, est un principe très général qui, avec la randomisation, intervient dans de très nombreux dispositifs expérimentaux.

Des informations relatives à la dimension maximum à donner aux blocs et à l'efficacité des blocs incomplets par rapport aux blocs complets, dans le cas des expériences en champ, sont présentées notamment par LIN et BINNS [1984] et PATTERSON et HUNTER [1983].

[ Il faut signaler aussi que la recherche de dispositifs insensibles aux dérives, que nous avons évoqués à propos des expériences complètement aléatoires (§ 5.3.4°),

---

<sup>5</sup> En anglais : *blocking*.

peut être étendue au cas des expériences en blocs [MAJUMDAR et MARTIN, 2002; TACK et VANDEBROEK, 2002].

### ⊖ 7° Corrélations entre unités expérimentales

Dans l'utilisation de nichées comme blocs (§ 6.1.2.2°) et dans d'autres cas comparables, la distinction entre blocs correspond à une réalité physique. Dans de nombreuses autres situations par contre, telles que la délimitation de blocs dans des champs d'expériences ou la constitution de blocs dans des successions d'essais effectués en séquence, les blocs peuvent être tout à fait artificiels.

Bien souvent, la réalité ne correspond donc pas à des coupures nettes entre blocs, mais à des évolutions progressives, dans l'espace ou dans le temps, sous forme de gradients. Comme le montre notamment l'exemple du paragraphe 3.6, ces gradients sont générateurs de corrélations entre parcelles ou entre unités expérimentales voisines.

Différents auteurs ont étudié ces corrélations, ainsi que la possibilité d'en tenir compte dans l'analyse des résultats [AASTVEIT, 1983; BERGONZINI et LEDOUX, 1988; HONG *et al.*, 2005; WATSON, 2000].

## 6.4 Exemple 1 : expérience en blocs aléatoires complets (planification)

### 6.4.1 Présentation

#### 1° Principe

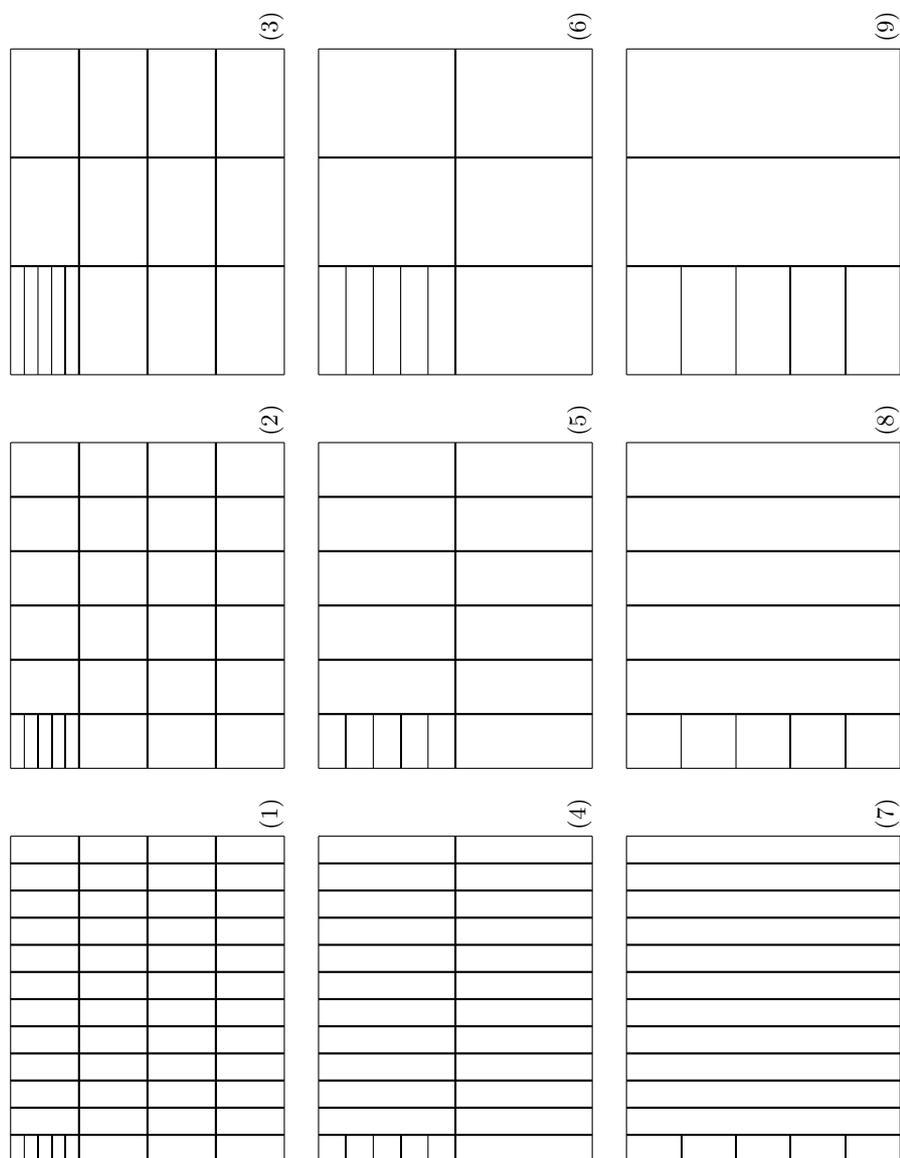
Afin de bien préciser la notion de bloc, telle qu'elle apparaît dans les expériences en champ, ainsi que les notions relatives à la forme à donner aux blocs, en relation notamment avec la configuration des parcelles, nous poursuivons ici l'étude de l'expérience d'uniformité dont il a déjà été question au paragraphe 3.6.

Nous supposons dans la suite que la plantation de théiers présentée à la figure 3.6.1 est destinée à l'installation d'une expérience qui comporte cinq objets (quatre fumures et un témoin, par exemple), et nous nous basons sur les données étudiées antérieurement et relatives à deux *tippings* (tableau 3.6.1).

#### 2° Différents découpages

La figure 6.4.1 présente neuf découpages différents du terrain d'expérience en blocs de cinq parcelles, l'étendue des parcelles allant de 2,88 m<sup>2</sup> (2,4 m sur 1,2 m, soit quatre théiers par parcelle) à 46,08 m<sup>2</sup> (9,6 m sur 4,8 m, soit 64 théiers par parcelle), et corrélativement, le nombre de blocs variant de 48 à 3.

On notera que, pour tenir compte de la plus grande hétérogénéité de la plantation dans le sens horizontal (tableaux 3.6.1 et 3.6.2, et figure 3.6.3), les parcelles



**Figure 6.4.1.** Planification d'une expérience sur théier : différents découpages du terrain en blocs de cinq parcelles.

et les blocs ont été disposés de manière telle que les premières soient autant que possible allongées horizontalement (c'est-à-dire parallèlement au « gradient de fertilité » le plus important) et les seconds allongés verticalement (c'est-à-dire perpendiculairement à ce « gradient de fertilité »).

À partir des données du tableau 3.6.1, on peut alors calculer dans chaque cas les sommes des carrés des écarts et les carrés moyens totaux, entre blocs et dans les blocs, et en déduire diverses informations quant à la précision des comparaisons de moyennes.

De plus, on peut envisager le problème à la fois pour des parcelles sans bordures (§ 6.4.2) et pour des parcelles avec bordures (§ 6.4.3).

## 6.4.2 Parcelles sans bordures

### 1° Premier découpage

Dans le cas n° 1 de la figure 6.4.1 (parcelles expérimentales confondues avec les parcelles unitaires initiales), la somme des carrés des écarts totale et la variance ou le carré moyen correspondant sont :

$$SCE_t = 834,2238 \quad \text{et} \quad CM_t = 834,2238/239 = 3,4905;$$

la somme des carrés des écarts et le carré moyen entre blocs sont :

$$SCE_b = 630,4548 \quad \text{et} \quad CM_b = 630,4548/47 = 13,4139;$$

tandis que la somme des carrés des écarts et le carré moyen dans les blocs ou résiduels sont :

$$SCE_r = 203,7690 \quad \text{et} \quad CM_r = 203,7690/192 = 1,0613.$$

La valeur 3,4905 donne une idée de ce que serait la variabilité résiduelle d'une expérience complètement aléatoire dont les parcelles auraient une étendue de 2,88 m<sup>2</sup> (quatre théiers par parcelle). Il y correspond un écart-type égal à 1,87 t/ha, un coefficient de variation égal à 51,4 %, une erreur standard des différences de moyennes entre objets égale à 1,87/ $\sqrt{24}$  ou 0,38 t/ha, et un coefficient de variation de ces différences égal à 10,5 %<sup>6</sup>.

De même, la valeur 1,0613 donne une idée de ce que pourrait être, dans les mêmes conditions, la variabilité résiduelle d'une expérience en blocs aléatoires complets. On peut en déduire, entre autres choses, le coefficient de variation résiduelle, égal à 28,3 % au lieu de 51,4 %, et le coefficient de variation des différences de moyennes, égal à 5,8 % au lieu de 10,5 %.

<sup>6</sup> La valeur 24 qui intervient dans la détermination de l'erreur standard des différences de moyennes est égale au nombre de répétitions (48) divisé par 2, puisqu'il s'agit de la différence de deux moyennes.

En outre, le rapport :

$$3,4905/1,0613 = 3,29 \text{ ou } 329 \%,$$

est une estimation de ce que serait, dans ces conditions, l'efficacité relative de l'expérience en blocs, par comparaison avec l'expérience complètement aléatoire.

## 2° Autres découpages

Nous donnons aussi, à titre d'exemple, quelques résultats intermédiaires relatifs au cas n° 6 de la figure 6.4.1. En fonction des données du tableau 3.6.1, les rendements moyens des 30 parcelles de 9,6 m sur 2,4 m, réparties en six blocs, figurent dans le tableau 6.4.1. On peut en déduire les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \text{SCE}_t &= 72,1617 & \text{et} & & \text{CM}_t &= 2,4883, \\ \text{SCE}_b &= 63,7942 & \text{et} & & \text{CM}_b &= 12,7588, \\ \text{SCE}_r &= 8,3675 & \text{et} & & \text{CM}_r &= 0,3486. \end{aligned}$$

**Tableau 6.4.1.** Planification d'une expérience sur théier : rendements moyens des deux *tippings* pour des parcelles de 9,6 m sur 2,4 m (32 théiers par parcelle), en tonnes par hectare.

|      |      |      |
|------|------|------|
| 1,59 | 2,82 | 3,53 |
| 1,74 | 3,68 | 4,53 |
| 1,82 | 3,71 | 4,42 |
| 1,70 | 3,30 | 6,11 |
| 1,42 | 3,49 | 6,32 |
| 1,59 | 3,92 | 5,27 |
| 1,98 | 4,11 | 6,34 |
| 1,72 | 3,95 | 5,58 |
| 2,59 | 3,77 | 6,22 |
| 2,72 | 3,65 | 5,50 |

Il en résulte qu'en tenant compte du facteur blocs, le coefficient de variation résiduelle est égal à 16,2 % et le coefficient de variation des différences de moyennes entre objets est égal à 9,4 %. Et l'efficacité relative, par rapport à l'expérience complètement aléatoire qui serait constituée de parcelles de mêmes dimensions, est égale à 714 %.

Sans passer en revue de façon détaillée les autres cas présentés à la figure 6.4.1, nous faisons figurer dans le tableau 6.4.2 l'essentiel des résultats obtenus ci-dessus et les résultats correspondants relatifs aux autres situations (la dernière colonne du tableau 6.4.2 devant être examinée plus loin). Nous avons également introduit dans ce tableau les résultats relatifs à un découpage en quatre blocs (parcelles de

**Tableau 6.4.2.** Planification d'une expérience sur théier : résultats de différents découpages du terrain dans le cas de parcelles sans bordures.

| Numéros de la fig. 6.4.1 | Dimensions des parcelles (m) | Nombres de théiers par parc. | Nombres de blocs | Coeff. de variation résiduelle | C. de var. des différ. de moy. | Efficacité relative (%) | Différences significat. (%) |
|--------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 1                        | 2,4 × 1,2                    | 4                            | 48               | 28,3                           | 5,8                            | 329                     | 12 à 19                     |
| 2                        | 4,8 × 1,2                    | 8                            | 24               | 21,1                           | 6,1                            | 500                     | 12 à 20                     |
| 4                        | 2,4 × 2,4                    | 8                            | 24               | 23,4                           | 6,8                            | 413                     | 14 à 22                     |
| 3                        | 9,6 × 1,2                    | 16                           | 12               | 17,6                           | 7,2                            | 641                     | 14 à 23                     |
| 5                        | 4,8 × 2,4                    | 16                           | 12               | 17,7                           | 7,2                            | 642                     | 14 à 23                     |
| 7                        | 2,4 × 4,8                    | 16                           | 12               | 18,5                           | 7,6                            | 593                     | 15 à 24                     |
| 6                        | 9,6 × 2,4                    | 32                           | 6                | 16,2                           | 9,4                            | 714                     | 19 à 30                     |
| 8                        | 4,8 × 4,8                    | 32                           | 6                | 15,6                           | 9,0                            | 764                     | 18 à 29                     |
| –                        | 7,2 × 4,8                    | 48                           | 4                | 14,9                           | 10,6                           | 730                     | 21 à 34                     |
| 9                        | 9,6 × 4,8                    | 64                           | 3                | 15,3                           | 12,5                           | 792                     | 25 à 40                     |

7,2 m sur 4,8 m, avec 48 théiers par parcelle), qui n'apparaît pas dans la figure 6.4.1.

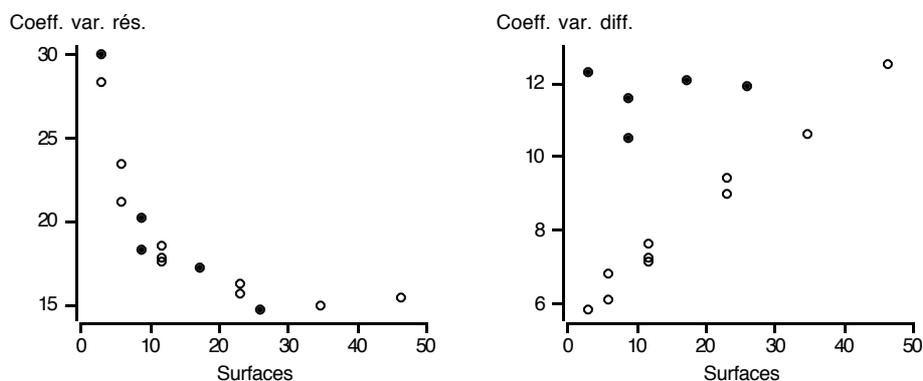
Les relations entre la surface des parcelles et le coefficient de variation résiduelle, d'une part, et entre la surface des parcelles et le coefficient de variation des différences de moyennes, d'autre part, sont également présentées sous forme graphique par les points blancs de la figure 6.4.2.

### 3° Examen des résultats

Un rapide examen de l'ensemble des résultats montre que le coefficient de variation résiduelle diminue progressivement quand les dimensions des parcelles augmentent. Mais comme, corrélativement, le nombre de blocs diminue aussi, le coefficient de variation des différences de moyennes et l'efficacité relative, par rapport aux expériences complètement aléatoires constituées de parcelles de mêmes dimensions, évoluent par contre en sens opposé.

Les constatations relatives au coefficient de variation résiduelle et à l'efficacité relative pourraient faire croire que les expériences « les meilleures » sont celles qui font intervenir de grandes parcelles. Mais en raison de l'objectif même de l'expérience, l'élément essentiel à prendre en considération est en fait la précision des comparaisons de moyennes, qui est représentée ici par le coefficient de variation de leurs différences.

Comme ce coefficient augmente, de façon d'ailleurs quasi linéaire (figure 6.4.2), en fonction de la surface des parcelles, il apparaît que la préférence doit être donnée aux parcelles les plus petites. Cette conclusion confirme celle qui avait été mise en



**Figure 6.4.2.** Planification d'une expérience sur théier : relations entre la surface des parcelles et le coefficient de variation résiduelle, d'une part, et entre la surface des parcelles et le coefficient de variation des différences de moyennes, d'autre part, pour des parcelles sans bordures (points blancs) et avec bordures (points noirs).

évidence au paragraphe 3.6.2.4°, et aussi le premier principe exposé au paragraphe 3.2.1.1°.

#### 4° Discussion

Bien sûr, ces considérations théoriques ne doivent pas faire oublier les contingences pratiques et, dans cette optique, il serait sans doute excessif d'envisager la possibilité de réaliser une expérience qui comporterait 24 ou 48 blocs.

Dans la pratique courante, le choix de l'expérimentateur « traditionnel » se porterait vraisemblablement, a priori, sur un dispositif comportant quatre ou six blocs, mais il nous paraît opportun de voir néanmoins quel serait le gain de précision qui pourrait être attendu en faisant l'effort, s'il est réalisable, de passer à 12 blocs.

L'efficacité relative du dispositif n° 3 de la figure 6.4.1 (12 blocs) par rapport au dispositif n° 6 (six blocs), par exemple, peut être déterminée par une simple comparaison des carrés des coefficients de variation des différences de moyennes (tableau 6.4.2) :

$$9,4^2/7,2^2 = 1,70 \text{ ou } 170 \%,$$

ou avec plus de précision :

$$(16,2^2/6)/(17,6^2/12) = 1,69 \text{ ou } 169 \%.$$

Des résultats quasi identiques peuvent être obtenus en comparant le dispositif n° 5 (12 blocs également) et le dispositif n° 6 (efficacité relative égale à 168 %, au lieu de 169 %).

Ces différentes valeurs indiquent qu'il faudrait augmenter de près de 70 % le nombre de répétitions du dispositif n° 6, pour atteindre la précision du dispositif n° 3 ou du dispositif n° 5, c'est-à-dire aussi qu'il y a pratiquement équivalence entre les dispositifs 3 et 5 (60 parcelles de 16 théiers, soit 960 théiers), et 10 répétitions ( $6 \times 1,70 = 10,2$ ) semblables à celles du dispositif n° 6 (50 parcelles de 32 théiers, soit 1.600 théiers).

Par rapport aux dispositifs 3 et 5, le choix de l'expérimentateur qui ne souhaiterait pas dépasser six répétitions est donc : adopter le dispositif n° 6, avec une perte d'efficacité de l'ordre de 40 % ( $1/1,70 = 0,59$ ), ou vouloir conserver la même efficacité et organiser alors, si c'est possible, une expérience sensiblement plus étendue ( $1.150 \text{ m}^2$  au lieu de  $690 \text{ m}^2$ ).

Ce type de comparaison conduirait à une conclusion plus nette encore pour le dispositif qui comporte quatre blocs (non représenté dans la figure 6.4.1), l'efficacité relative par rapport aux dispositifs 3 et 5 étant alors (tableau 6.4.2) :

$$10,6^2/7,2^2 \quad \text{ou} \quad (14,9^2/4)/(17,6^2/12) = 2,15 \text{ ou } 215 \text{ \%}.$$

Ces considérations, relatives évidemment à un cas bien particulier, mais loin d'être exceptionnel (des coefficients de variation résiduelle de l'ordre de 15 à 20 % ne sont en effet pas exceptionnels), montrent combien il peut être dangereux de s'en tenir de façon systématique à de petits nombres de répétitions (quatre, cinq ou six blocs), comme il est de pratique assez courante en matière agronomique.

#### 5° Tests d'égalité des moyennes

Le même problème peut être envisagé sous l'angle de la puissance des tests d'égalité des moyennes. En se basant sur les relations approchées, et relativement optimistes, du paragraphe 3.4, il est en effet possible de déterminer, pour les différents cas envisagés, les différences de moyennes qu'on peut espérer mettre en évidence avec une probabilité égale à 0,5 ou 0,9, pour un niveau de signification égal à 0,05. Ces valeurs sont données dans la dernière colonne du tableau 6.4.2.

Il apparaît ainsi que, pour un dispositif expérimental comportant quatre blocs, on ne peut espérer mettre en évidence avec une probabilité égale à 0,5 que des différences de rendement de l'ordre de 21 %, et avec une probabilité égale à 0,9 des différences de l'ordre de 34 %, les valeurs correspondantes étant 19 et 30 % environ pour le dispositif n° 6 de la figure 6.4.1 (six blocs), et aussi 14 et 23 % environ pour le dispositif n° 3 (12 blocs). Les différences qui existent entre ces trois options sont, ici également, relativement importantes.

### 6.4.3 Parcelles avec bordures

#### 1° Résultats

Tout ce qui vient d'être dit ne s'applique évidemment que si les parcelles d'expérience ne nécessitent pas de bordures, au sens où celles-ci ont été définies au

paragraphe 3.2.2, ce qui peut être très critiquable dans le cas d'une expérience de comparaison de fumures par exemple. Aussi, reprenons-nous l'ensemble du problème en supposant l'existence de bordures du type qui est illustré par la partie gauche de la figure 3.2.1 (une ligne complète de bordure entourant chaque parcelle, soit deux lignes complètes séparant les parties utiles ou mesurées des différentes parcelles). De telles bordures ne sont réalisables que dans le cas de parcelles suffisamment grandes, à savoir pour les dispositifs 5, 6, 8 et 9 de la figure 6.4.1 (3, 6 ou 12 blocs), ainsi que pour le dispositif qui comporte quatre blocs.

La détermination des variances ou des carrés moyens résiduels, des variances des différences de moyennes, etc. est plus délicate dans le cas présent et nous n'en donnons pas le détail. Nous faisons cependant figurer l'essentiel des résultats dans le tableau 6.4.3, qui est tout à fait comparable au tableau 6.4.2, les dimensions des parcelles et les nombres de théiers par parcelle étant des dimensions et des nombres de théiers « utiles », à l'exclusion des bordures.

**Tableau 6.4.3.** Planification d'une expérience sur théier : résultats de différents découpages du terrain dans le cas de parcelles avec bordures.

| Numéros de la fig. 6.4.1 | Dimensions des parcelles (m) | Nombres de théiers par parc. | Nombres de blocs | Coeff. de variation résiduelle | C. de var. des différ. de moy. | Efficacité relative (%) | Différences significat. (%) |
|--------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 5                        | 2,4 × 1,2                    | 4                            | 12               | 30,0                           | 12,3                           | 291                     | 25 à 40                     |
| 6                        | 7,2 × 1,2                    | 12                           | 6                | 18,2                           | 10,5                           | 595                     | 21 à 34                     |
| 8                        | 2,4 × 3,6                    | 12                           | 6                | 20,1                           | 11,6                           | 534                     | 23 à 38                     |
| –                        | 4,8 × 3,6                    | 24                           | 4                | 17,1                           | 12,1                           | 579                     | 24 à 39                     |
| 9                        | 7,2 × 3,6                    | 36                           | 3                | 14,6                           | 11,9                           | 855                     | 24 à 39                     |

Les valeurs du coefficient de variation résiduelle et du coefficient de variation des différences de moyennes sont également représentées graphiquement par les points noirs de la figure 6.4.2.

## 2° Discussion

Comme dans le cas des parcelles sans bordures, l'examen des résultats montre tout d'abord que le coefficient de variation résiduelle diminue progressivement et que l'efficacité relative augmente régulièrement quand la surface des parcelles s'accroît, et cela dans des proportions tout à fait comparables.

Mais les éléments les plus importants sont la manière dont le coefficient de variation des différences de moyennes se démarque du cas des parcelles sans bordures (figure 6.4.2) et la très grande stabilité de ce coefficient. Cette stabilité résulte du fait que l'augmentation de précision qu'on espère obtenir en fonction de l'augmentation du nombre de répétitions est compensée par une augmentation corrélative

de l'importance des bordures et, donc aussi, une réduction du nombre de théiers « utiles ».

On peut illustrer ce phénomène en comparant par exemple les dispositifs constitués respectivement de 4 et de 12 blocs, pour lesquels nous avons observé précédemment (sans bordures) une efficacité relative de 215 % en faveur du plus grand nombre de blocs. Dans le cas présent (avec bordures), l'efficacité relative de ces deux dispositifs est pratiquement égale à l'unité (tableau 6.4.3) :

$$12,1^2/12,3^2 \quad \text{ou} \quad (17,1^2/4)/(30,0^2/12) = 0,97 \text{ ou } 97 \text{ \%}.$$

Le gain de précision qu'on pouvait espérer obtenir en multipliant par 3 le nombre de blocs est pratiquement annulé par l'importance croissante des bordures et, de ce fait, une réduction considérable de la partie utile des parcelles. Pour quatre blocs en effet, chaque parcelle de 48 théiers comporte 24 théiers utiles et 24 théiers de bordure (50 % et 50 %), le nombre total de théiers utiles par objet étant égal à 96, tandis que pour 12 blocs, chaque parcelle de 16 théiers réunit quatre théiers utiles et 12 théiers de bordure (25 % et 75 %), le nombre total de théiers utiles étant égal à 48 seulement, soit deux fois moins.

### 3° Conclusion

En conséquence, et contrairement au cas précédent (parcelles sans bordures), l'expérimentateur pourrait augmenter ici la dimension des parcelles et réduire le nombre de blocs, si cela lui facilite la tâche, sans devoir craindre une perte de précision importante.

On notera toutefois que la sensibilité d'une expérience qui serait organisée dans de telles conditions serait en tout état de cause très faible. Au mieux, on peut en effet espérer mettre en évidence des différences de rendement de l'ordre de 20 à 25 % avec une probabilité égale à 0,5, et de l'ordre de 35 à 40 % seulement avec une probabilité égale à 0,9 (tableau 6.4.3).

## 6.5 Exemple 2 : expérience en blocs aléatoires complets (analyse de résultats)

### 6.5.1 Présentation et données

#### 1° Présentation

Nous considérons, comme deuxième exemple de dispositif en blocs aléatoires complets, une expérience de comparaison de fumures réalisée au Rwanda, sur blé, dans des conditions de fertilité naturelle extrêmement faible [NEEL et DE PRINS, 1973].

Les objets qui ont été choisis sont présentés dans le tableau 6.5.1. Ils font intervenir quatre éléments fertilisants, à savoir l'azote (N), le potassium ( $K_2O$ ), le phosphore ( $P_2O_5$ ) et le calcium (Ca).

**Tableau 6.5.1.** Comparaison de fumures sur blé : structure des objets (différents engrais, en kg/ha).

| Objets | N   | $K_2O$ | $P_2O_5$ | Ca    |
|--------|-----|--------|----------|-------|
| 1      | –   | –      | –        | –     |
| 2      | –   | –      | –        | 1.000 |
| 3      | –   | –      | –        | 4.500 |
| 4      | –   | –      | –        | 8.000 |
| 5      | 100 | 200    | –        | 1.000 |
| 6      | 100 | 200    | –        | 4.500 |
| 7      | 100 | 200    | –        | 8.000 |
| 8      | 100 | 200    | 100      | 1.000 |
| 9      | 100 | 200    | 100      | 4.500 |
| 10     | 100 | 200    | 100      | 8.000 |
| 11     | 100 | 200    | 200      | 1.000 |
| 12     | 100 | 200    | 200      | 4.500 |
| 13     | 100 | 200    | 200      | 8.000 |
| 14     | 100 | 200    | 300      | 1.000 |
| 15     | 100 | 200    | 300      | 4.500 |
| 16     | 100 | 200    | 300      | 8.000 |

Les objets 5 à 16 constituent une expérience factorielle  $4 \times 3$  comportant, outre une fumure azotée et potassique de base, quatre niveaux de phosphore (0, 100, 200 et 300 kg/ha) et trois niveaux de calcium (1.000, 4.500 et 8.000 kg/ha). S'y ajoutent un témoin (objet 1) et trois fumures uniquement calciques (objets 2 à 4).

D'autre part, l'expérience est organisée dans une région de collines aménagées en terrasses, celles-ci étant séparées par des haies anti-érosives. Trois terrasses voisines, de 12 m de largeur, ont été choisies pour constituer trois blocs, et 16 parcelles, approximativement carrées et d'environ 5 m de côté, ont été délimitées sur chaque terrasse. Des sentiers ont également été prévus à intervalles réguliers et les 16 objets ont été répartis au hasard et indépendamment à l'intérieur de chacun des blocs.

La figure 6.5.1 donne le plan exact de l'expérience, à l'échelle de 1/600, les haies anti-érosives étant représentées en pointillé, et les photographies 5 et 6 [DAGNELIE, 2009] en offrent une autre illustration<sup>7</sup>.

<sup>7</sup> Dans sa version électronique, la transmission du présent document en format PDF peut avoir pour conséquence de modifier quelque peu l'échelle de la figure 6.5.1.

|    |    |    |   |    |    |    |    |        |
|----|----|----|---|----|----|----|----|--------|
| 16 | 2  | 7  | 9 | 8  | 10 | 6  | 4  | Bloc 1 |
| 15 | 13 | 14 | 1 | 3  | 11 | 5  | 12 |        |
| 14 | 10 | 12 | 3 | 5  | 9  | 1  | 16 | Bloc 2 |
| 4  | 15 | 7  | 8 | 13 | 11 | 2  | 6  |        |
| 7  | 2  | 10 | 5 | 15 | 6  | 11 | 9  | Bloc 3 |
| 12 | 1  | 14 | 4 | 8  | 13 | 16 | 3  |        |

Figure 6.5.1. Comparaison de fumures sur blé : plan de l'expérience.

## 2° Données

Dans chaque parcelle, la récolte a été réalisée sur une superficie de 18 m<sup>2</sup>, en laissant des bordures de 30 à 50 cm de largeur, variant notamment en fonction de la forme exacte des parcelles.

Les rendements observés, en kg de grains par parcelle, et leurs moyennes, en kg par parcelle et en tonnes par hectare, sont présentés dans le tableau 6.5.2. On notera qu'une donnée est manquante, les moyennes correspondantes étant indiquées entre parenthèses<sup>8</sup>.

En vue d'un traitement par ordinateur, les données du tableau 6.5.1 et de la partie centrale du tableau 6.5.2 pourraient être présentées sous la forme d'un seul tableau, constitué de six colonnes et 48 lignes. Les six colonnes seraient alors relatives aux niveaux des quatre éléments fertilisants (ou aux indices qui leur seraient associés), aux numéros ou indices des blocs, et aux rendements observés, tandis que les différentes lignes correspondraient aux 48 parcelles.

## 6.5.2 Analyse des résultats : analyse de la variance<sup>9</sup>

### 1° Examen préliminaire

Un simple examen des résultats, aussi rapide soit-il, montre qu'il serait inutile, et même dangereux, de vouloir soumettre l'ensemble des données à une seule ana-

<sup>8</sup> Une partie de ces données a déjà été considérée antérieurement [STAT2, ex. 11.2.4 et 12.2.2].

<sup>9</sup> Un traitement complet de cet exemple à l'aide du logiciel R est présenté à l'adresse <[www.dagnelie.be/docexr/exp065/exp065.htm](http://www.dagnelie.be/docexr/exp065/exp065.htm)>.

**Tableau 6.5.2.** Comparaison de fumures sur blé : rendements observés, en kg par parcelle, et moyennes, en kg par parcelle et en tonnes par ha<sup>10</sup>.

| Objets | Blocs |      |      | Moyennes |        |
|--------|-------|------|------|----------|--------|
|        | 1     | 2    | 3    | (kg/p)   | (t/ha) |
| 1      | 0,00  | 0,04 | 0,06 | 0,03     | 0,02   |
| 2      | 0,14  | 0,22 | 0,35 | 0,24     | 0,13   |
| 3      | 0,42  | 0,45 | 0,44 | 0,44     | 0,24   |
| 4      | 0,44  | 0,28 | 0,84 | 0,52     | 0,29   |
| 5      | 0,28  | 0,49 | 0,33 | 0,37     | 0,20   |
| 6      | 1,09  | 1,17 | 0,84 | 1,03     | 0,57   |
| 7      | 0,79  | 0,94 | 0,82 | 0,85     | 0,47   |
| 8      | 1,30  | 0,80 | 2,01 | 1,37     | 0,76   |
| 9      | 2,05  | 2,37 | 2,52 | 2,31     | 1,29   |
| 10     | 2,07  | 2,60 | 2,25 | 2,31     | 1,28   |
| 11     | –     | 2,36 | 2,71 | (2,54)   | (1,41) |
| 12     | 2,99  | 2,92 | 3,63 | 3,18     | 1,77   |
| 13     | 2,62  | 2,89 | 3,43 | 2,98     | 1,66   |
| 14     | 2,61  | 2,06 | 3,29 | 2,65     | 1,47   |
| 15     | 3,22  | 2,93 | 3,85 | 3,33     | 1,85   |
| 16     | 3,15  | 3,35 | 3,67 | 3,39     | 1,88   |

lyse de la variance. Des différences considérables apparaissent en effet à vue d’œil, et il faut bien sûr éviter d’analyser, même avec l’une ou l’autre transformation de variables, des rendements observés allant de strictement 0 à près de 4 kg par parcelle (0 à plus de 2 t/ha).

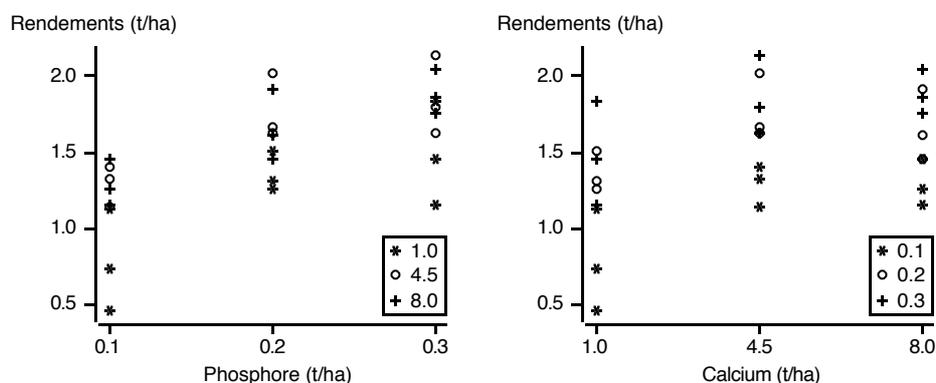
Un examen un peu plus attentif montre que les rendements sont à la fois très faibles et très irréguliers pour les objets qui ne réunissent pas l’ensemble des quatre éléments fertilisants considérés (objets 1 à 7). Aussi avons-nous décidé de ne soumettre à l’analyse de la variance que les valeurs observées relatives aux objets 8 à 16, qui constituent un ensemble factoriel 3<sup>2</sup>.

Le fait d’éliminer de l’analyse les objets 1 à 7 ne soulève aucune difficulté particulière dans le cas présent, ce qui ne serait pas vrai pour d’autres dispositifs que les blocs aléatoires complets (carré latin, blocs incomplets, etc.)<sup>11</sup>.

La figure 6.5.2 présente les observations relatives aux objets 8 à 16 sous forme graphique, en relation avec les facteurs phosphore et calcium, toutes les données

<sup>10</sup> Les rendements par hectare ne sont bien sûr que des valeurs tout à fait théoriques, dans la mesure où les haies anti-érosives dont il a été question dans la présentation de l’expérience occupent une partie importante du terrain.

<sup>11</sup> Si les rendements observés avaient été plus élevés pour les objets 5 à 7, on aurait aussi pu considérer l’ensemble des résultats relatifs aux objets 5 à 16, en conservant alors la structure factorielle 4 × 3.



**Figure 6.5.2.** Comparaison de fumures sur blé : représentation graphique des observations relatives aux objets 8 à 16<sup>12</sup>.

étant converties en tonnes par hectare. Les deux diagrammes mettent l'un et l'autre en évidence des différences sensibles entre les trois niveaux de fumure, en particulier pour le phosphore.

## 2° Analyse de la variance

En ce qui concerne l'analyse de la variance, nous avons choisi de présenter ici l'approche qui consiste à procéder à l'estimation de la donnée manquante. Nous reviendrons ultérieurement sur cette question (§ 12.4.2.4° et 12.4.4.3°).

Par la procédure habituelle [STAT2, § 10.4.3], on obtient la valeur estimée :

$$\hat{x} = [9(5,07) + 3(20,01) - 69,65]/16 = 2,25,$$

les quantités 5,07, 20,01 et 69,65 étant respectivement la somme des observations relatives à l'objet 11, la somme des observations relatives au bloc 1, et la somme générale, les deux dernières sommes étant limitées aux objets 8 à 16. En tenant compte du résultat ainsi obtenu, la moyenne qui concerne l'objet 11 devient 1,36 t/ha et la moyenne générale, toujours pour les objets 8 à 16, est égale à 1,48 t/ha.

L'analyse de la variance qui doit être réalisée correspond à un modèle croisé mixte à trois critères de classification, avec une seule observation par combinaison des trois facteurs [STAT2, § 11.2.4], les facteurs phosphore et calcium étant considérés comme fixes et le facteur blocs comme aléatoire. Les résultats de cette analyse sont donnés dans le tableau 6.5.3.

<sup>12</sup> Dans le diagramme de gauche, relatif au phosphore, les observations qui concernent le niveau inférieur de calcium (1 t/ha) sont représentées par des astérisques, les observations qui concernent le niveau intermédiaire de calcium (4,5 t/ha) par des points blancs, et les observations qui concernent le niveau supérieur de calcium (8 t/ha) par des signes +. Et il en est de même, *mutatis mutandis*, pour les niveaux de phosphore dans le diagramme de droite, relatif au calcium.

**Tableau 6.5.3.** Comparaison de fumures sur blé : tableau d'analyse de la variance.

| Sources de variation | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | F        | P      |
|----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|----------|--------|
| Phosphore            | 2                 | 6,2949                       | 3,1474        | 39,9 *** | 0,0000 |
| Calcium              | 2                 | 3,5022                       | 1,7511        | 22,2 *** | 0,0000 |
| Interaction          | 4                 | 0,1525                       | 0,0381        | 0,48     | 0,75   |
| Blocs                | 2                 | 1,9191                       | 0,9596        |          |        |
| Variation résiduelle | 15                | 1,1820                       | 0,0788        |          |        |
| Totaux               | 25                | 13,0507                      |               |          |        |

Dans ce tableau, les trois interactions qui font intervenir le facteur blocs ont été regroupées en une composante « résiduelle » unique, comme nous l'avons indiqué au paragraphe 6.2.2°, et un degré de liberté a été supprimé en raison de l'estimation de la donnée manquante [STAT2, § 10.4.3].

### 3° Interprétation

L'examen du tableau 6.5.3 montre que les deux facteurs pris en considération (phosphore et calcium) sont très hautement significatifs et que leur interaction est tout à fait négligeable. Chacun des deux facteurs peut en conséquence être éventuellement étudié séparément.

Il apparaît aussi que l'efficacité relative du dispositif en blocs aléatoires complets par rapport à une répartition tout à fait aléatoire est, en première approximation, proche de 230 % :

$$[(1,9191 + 1,1820)/(2 + 15)]/0,0788 = 2,31 \text{ ou } 231 \text{ \%}.$$

Ceci signifierait que les trois répétitions en blocs aléatoires complets donnent une information quasi équivalente à celle qui proviendrait de sept répétitions complètement aléatoires ( $3 \times 2,31 \simeq 7$ ).

La valeur obtenue est cependant assez largement surestimée, un calcul plus précis, qui serait basé sur les relations du paragraphe 6.3.3°, conduisant à un résultat proche de 190 %. La différence entre les deux valeurs est essentiellement la conséquence du fait qu'on ne dispose que d'un très petit nombre de blocs. Il serait donc plus correct de parler d'une équivalence entre trois blocs aléatoires complets et six répétitions complètement aléatoires ( $3 \times 1,90 \simeq 6$ ).

D'autre part, il faut noter aussi que les résultats obtenus par l'analyse de la variance non orthogonale, par l'analyse de la covariance et à l'aide du modèle linéaire mixte sont fort semblables à ceux présentés ici (§ 12.4.2.4° et 12.4.4.3°).

#### 4° Analyse complémentaire

Pour chacun des deux facteurs, il est possible de compléter l'analyse de la variance en subdivisant l'influence du facteur considéré en une contribution linéaire et une contribution non linéaire ou quadratique. Cela peut être réalisé soit par la méthode des polynômes orthogonaux [STAT2, § 12.2.3], soit par un calcul de régression simple [STAT2, § 14.5.3]. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 6.5.4.

**Tableau 6.5.4.** Comparaison de fumures sur blé : tableau d'analyse de la variance, après subdivision des sommes des carrés des écarts factorielles.

| Sources de variation | Degrés de liberté | S. des carrés des écarts | Carrés moyens | F       | P      |
|----------------------|-------------------|--------------------------|---------------|---------|--------|
| Phosphore            | 2                 | 6,2949                   | 3,1474        | 39,9*** | 0,0000 |
| Régression linéaire  | 1                 | 5,7348                   | 5,7348        | 72,8*** | 0,0000 |
| Régression quadrat.  | 1                 | 0,5601                   | 0,5601        | 7,11*   | 0,018  |
| Calcium              | 2                 | 3,5022                   | 1,7511        | 22,2*** | 0,0000 |
| Régression linéaire  | 1                 | 2,4494                   | 2,4494        | 31,1*** | 0,0001 |
| Régression quadrat.  | 1                 | 1,0528                   | 1,0528        | 13,4**  | 0,0023 |
| Interaction          | 4                 | 0,1525                   | 0,0381        | 0,48    | 0,75   |
| Blocs                | 2                 | 1,9191                   | 0,9596        |         |        |
| Variation résiduelle | 15                | 1,1820                   | 0,0788        |         |        |
| Totaux               | 25                | 13,0507                  |               |         |        |

Il apparaît ainsi, non seulement que les deux facteurs considérés ont une influence très hautement significative sur le rendement, mais aussi que, dans les deux cas, leur influence n'est pas simplement linéaire. Ce résultat confirme une impression que pouvaient donner les deux diagrammes de la figure 6.5.2.

### 6.5.3 Analyse des résultats : régression

#### 1° Deux facteurs considérés séparément

L'analyse de la variance peut avantageusement être complétée par une étude de régression, mettant en relation le rendement et les deux facteurs envisagés. Dans un premier temps, nous considérons séparément les deux facteurs.

Comme les composantes linéaires et quadratiques de l'analyse de la variance sont significatives (tableau 6.5.4), il paraît judicieux de procéder à l'ajustement d'équations du deuxième degré. De tels ajustements peuvent être réalisés par la méthode des polynômes orthogonaux [STAT2, § 12.2.3] ou par régression multiple [STAT2, § 16.2].

On obtient ainsi les équations de régression suivantes, d'une part pour le phosphore :

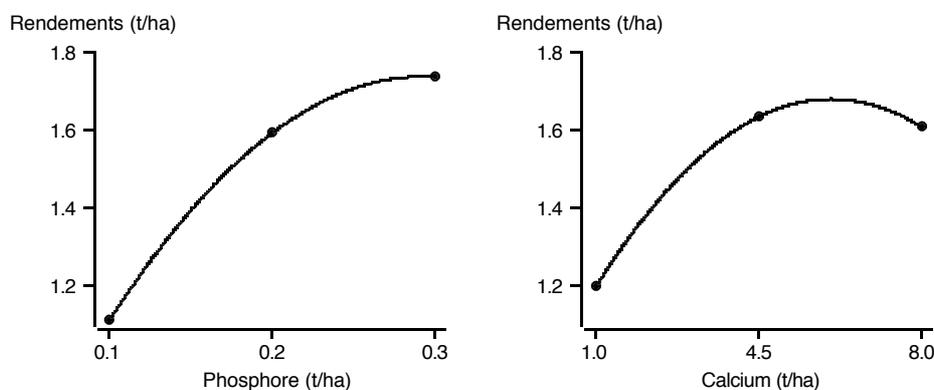
$$\text{Rdt} = 0,2858 + 9,934\text{P} - 16,99\text{P}^2,$$

et d'autre part pour le calcium :

$$\text{Rdt} = 0,9863 + 0,2296\text{Ca} - 0,01900\text{Ca}^2,$$

toutes les variables étant exprimées en tonnes par hectare<sup>13</sup>.

La figure 6.5.3 représente les deux courbes de réponse ainsi définies, passant chacune par les trois points moyens correspondants, à savoir des rendements moyens égaux à 1,11, 1,59 et 1,74 t/ha pour les trois niveaux de phosphore, et 1,20, 1,63 et 1,61 t/ha pour les trois niveaux de calcium.



**Figure 6.5.3.** Comparaison de fumures sur blé : courbes de réponse relatives au phosphore et au calcium.

## 2° Rendement maximum

Les abscisses des maximums des deux courbes de réponse peuvent être calculées de la manière suivante, en annulant les dérivées du rendement par rapport au phosphore et au calcium :

$$\text{P} = -9,934/[2(-16,99)] = 0,292 \quad \text{et} \quad \text{Ca} = -0,2296/[2(-0,01900)] = 6,04.$$

On peut en conclure que le rendement maximum correspond à un apport d'environ 300 kg d'acide phosphorique et 6 tonnes de chaux par hectare. On remarquera qu'on se trouve à la limite du domaine expérimental dans le premier cas et en un point plus central dans le deuxième cas, ce qu'indique également la figure 6.5.3.

<sup>13</sup> Par souci de cohérence avec les résultats de l'analyse de la variance, les différents calculs de régression ont été effectués en faisant intervenir la valeur estimée 2,25, qui remplace la donnée manquante.

Il faut toutefois interpréter de telles informations avec prudence, car si l'ajustement parabolique convient bien sûr parfaitement à un ensemble de trois points observés en abscisses, il est certain aussi qu'une telle fonction n'est pas nécessairement la meilleure pour représenter la réalité des phénomènes étudiés. En particulier, pour cette raison, aucune extrapolation ne doit être faite en dehors du domaine expérimental étudié.

D'autre part, la recherche d'un rendement maximum peut être éminemment contestable au point de vue pratique. Le plus souvent en effet, l'obtention des « derniers kilos » de production nécessite un apport d'engrais (ou, dans d'autres situations, de substances de croissance, de produits phytosanitaires, etc.) qui peut s'avérer extrêmement coûteux.

### 3° Fumure optimale

Très souvent, l'objectif réel est en fait la recherche d'un rendement optimum, mais il est difficile de traiter ce problème de façon générale, car sa solution dépend chaque fois des conditions économiques locales et, fréquemment aussi, d'autres facteurs tels que les possibilités d'approvisionnement, de commercialisation, etc.

À titre d'exemple, nous envisageons tout d'abord le problème pour la fumure phosphorique, en faisant la supposition, tout à fait arbitraire, que le coût de l'apport supplémentaire d'un kilogramme d'acide phosphorique est égal à trois fois le bénéfice lié à la production supplémentaire d'un kilogramme de blé (1 kg d'engrais phosphorique peut être « payé » par 3 kg de blé).

Dans ces conditions, le point d'équilibre entre l'accroissement des recettes et l'accroissement des dépenses est celui pour lequel l'accroissement du rendement est égal à trois fois l'accroissement de la fumure :

$$\Delta Rdt = 3 \Delta P,$$

ou encore, en termes de dérivée, le point de la courbe de réponse pour lequel la dérivée est égale à 3 :

$$dRdt/dP = 3.$$

Cette dérivée étant :

$$dRdt/dP = 9,934 - 2(-16,99)P,$$

on obtient comme valeur optimale de la fumure phosphorique :

$$P = (3 - 9,934)/[2(-16,99)] = 0,204,$$

soit environ 200 kg/ha, au lieu de 290 ou 300 kg/ha pour le rendement maximum.

On aboutit strictement au même résultat en considérant que le rendement en blé, diminué du coût relatif de la fumure phosphorique, est :

$$Rdt = 0,2858 + 6,934P - 16,99P^2,$$

la valeur 9,934 étant diminuée de 3 unités, et en déterminant ensuite l'abscisse du maximum de cette fonction.

Quant au deuxième facteur, si de manière tout aussi arbitraire, on suppose que le coût de l'apport supplémentaire d'un kilogramme de chaux est égal au dixième du bénéfice lié à la production supplémentaire d'un kilogramme de blé (1 kg de blé peut « payer » 10 kg de chaux), on obtient de la même façon :

$$Ca = (0,1 - 0,2296)/[2(-0,01900)] = 3,41,$$

soit un apport optimal de chaux de l'ordre de 3,4 t/ha, au lieu de 6 t/ha<sup>14</sup>.

On pourrait aussi assortir les valeurs ainsi obtenues de limites de confiance [STAT2, § 15.2.2], de même qu'on pourrait utiliser d'autres types de courbes de réponse et d'autres méthodes de calcul [ANTONIADOU et WALLACH, 2000; HERMANDEZ et MULLA, 2008].

#### 4° Deux facteurs considérés simultanément

On peut, par régression multiple, considérer simultanément les deux facteurs étudiés, et il serait d'ailleurs indispensable de procéder de la sorte en présence d'une interaction significative. Comme nous l'avons déjà signalé à propos des surfaces de réponse (§ 2.4.1.1°), l'équation de régression fait alors intervenir les deux facteurs, leurs carrés et leur produit.

On obtient ici :

$$Rdt = -0,2788 + 10,29 P + 0,2454 Ca - 16,99 P^2 - 0,01900 Ca^2 - 0,07929 P Ca,$$

les trois variables Rdt, P et Ca étant toujours exprimées en tonnes par hectare.

Le maximum de rendement et la fumure correspondante peuvent être déterminés en annulant les dérivées partielles du rendement par rapport aux deux facteurs, et en résolvant le système de deux équations à deux inconnues qui est ainsi obtenu.

On pourrait aussi calculer une fumure optimale en procédant de la même façon à partir de l'équation modifiée comme précédemment :

$$Rdt = -0,2788 + 7,29 P + 0,1454 Ca - 16,99 P^2 - 0,01900 Ca^2 - 0,07929 P Ca,$$

le coefficient de P étant diminué de 3 unités, de façon toujours arbitraire, à titre d'exemple, et le coefficient de Ca de 1/10.

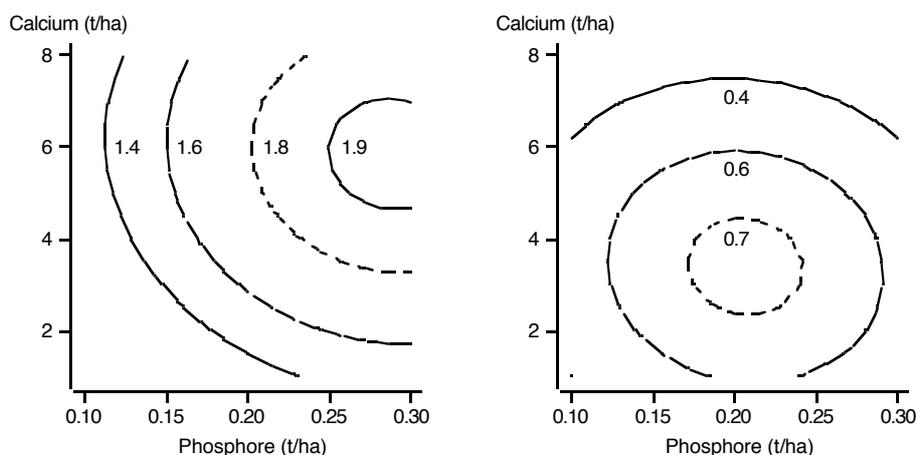
#### 5° Courbes d'isoreponse

Une solution plus simple et plus visuelle du problème consiste à considérer la surface de réponse qui correspond à l'équation de régression, dans l'espace à

<sup>14</sup> On peut noter que les résultats auraient été très peu différents (0,203 au lieu de 0,204, et 3,45 au lieu de 3,41) si on n'avait pas tenu compte de la valeur estimée 2,25 utilisée en analyse de la variance.

trois dimensions (P, Ca, Rdt), et à déterminer sur cette surface des courbes d'égal rendement. Ces courbes, qui s'apparentent à des courbes de niveau, sont appelées d'une manière générale *courbes d'isoreponse*<sup>15</sup>.

La figure 6.5.4 donne la représentation graphique de la projection de telles courbes dans le plan (P, Ca), d'une part pour la surface qui correspond à l'équation de régression initiale, c'est-à-dire au rendement maximum, et d'autre part pour la surface qui correspond à l'équation de régression modifiée, c'est-à-dire à la fumure optimale.



**Figure 6.5.4.** Comparaison de fumures sur blé : courbes d'isoreponse pour les rendements non modifiés et modifiés (en t/ha), en fonction du phosphore et du calcium.

Le premier diagramme confirme la localisation du maximum aux environs de 0,3 et 6 tonnes d'engrais par hectare, respectivement pour le phosphore et pour le calcium, tandis que le second diagramme localise l'optimum à proximité de 0,2 et 3,5 tonnes d'engrais par hectare.

Il faut noter qu'en présence d'une interaction relativement importante, et contrairement à ce qui est observé ici, les résultats obtenus en considérant les deux variables simultanément pourraient être sensiblement différents des résultats obtenus en considérant les deux variables séparément.

Nous terminons en ajoutant que le problème de la détermination de régions de confiance pour des conditions optimales relatives à deux ou plusieurs facteurs est envisagé notamment par DEL CASTILLO et CAHYA [2001].

<sup>15</sup> En anglais : *isoresponse curve, contour curve*.

# Chapitre 7

## Les expériences en parcelles divisées (*split-plot*) et en bandes croisées (*split-block*)

### Sommaire

#### 7.1 Principes

- 7.1.1 Les expériences en blocs aléatoires complets et parcelles divisées
- 7.1.2 Autres dispositifs expérimentaux en parcelles divisées
- 7.1.3 Les expériences en bandes croisées

#### 7.2 Analyse des résultats

- 7.2.1 Les expériences en blocs aléatoires complets et parcelles divisées
- 7.2.2 Autres dispositifs expérimentaux en parcelles divisées
- 7.2.3 Les expériences en bandes croisées

#### 7.3 Discussion

#### 7.4 Exemple 1 : expérience en blocs aléatoires complets et parcelles divisées

- 7.4.1 Présentation et données
- 7.4.2 Analyse des résultats

#### 7.5 Exemple 2 : expérience en blocs aléatoires complets et bandes croisées

- 7.5.1 Présentation et données
- 7.5.2 Analyse des résultats

## 7.1 Principes

### 7.1.1 Les expériences en blocs aléatoires complets et parcelles divisées

#### 1° Deux facteurs

Nous introduisons le principe des *parcelles divisées*<sup>1</sup> en considérant tout d'abord le cas le plus classique des expériences factorielles organisées en blocs aléatoires complets. La figure 7.4.1 en donne un exemple, relatif à deux facteurs.

Dans cet exemple, que nous détaillerons ultérieurement (§ 7.4.1), le premier facteur possède six modalités et le deuxième facteur en possède trois. L'expérience comporte quatre blocs, correspondant aux quatre quadrants de la figure 7.4.1, et la répartition des 18 objets au sein des blocs a été réalisée en deux temps, correspondant aux deux facteurs.

Dans un premier temps, on a défini six parcelles au sein de chacun des quatre blocs, et on leur a attribué les différentes modalités du premier facteur (différentes variétés, dans l'exemple considéré), comme dans toute expérience en blocs aléatoires complets qui ne ferait intervenir qu'un seul facteur (§ 6.1.1.1°). Il s'agit des premiers chiffres (1 à 6) des nombres de deux chiffres qui identifient les différents objets. À ce stade, on ne tient donc aucun compte de l'existence du deuxième facteur.

Dans un deuxième temps, on a divisé chacune des 24 premières parcelles en trois parcelles plus petites, et on a réparti les trois modalités du deuxième facteur (différentes fumures, dans l'exemple considéré) au sein de chacun des 24 groupes de trois parcelles, comme s'il s'agissait de 24 blocs (deuxièmes chiffres, à savoir 1 à 3, des nombres qui désignent les différents objets). À ce stade de la randomisation, on néglige donc tout à fait le premier facteur.

D'une manière générale, pour deux facteurs présentant respectivement  $p$  et  $q$  modalités et pour  $r$  blocs, la première étape est une répartition classique des  $p$  modalités du premier facteur au sein des  $r$  blocs, dans  $pr$  parcelles de relativement grande taille. La deuxième étape consiste ensuite en une répartition aléatoire et indépendante des  $q$  modalités du deuxième facteur à l'intérieur de ces  $pr$  parcelles, en constituant un total de  $pqr$  parcelles de plus petite dimension.

Les premières parcelles, de plus grande taille, sont appelées *grandes parcelles* et parfois *sous-blocs*<sup>2</sup>, tandis que les secondes, de plus petite taille, sont qualifiées de *petites parcelles* ou *sous-parcelles*<sup>3</sup>. D'une manière plus générale, en dehors des

---

<sup>1</sup> En anglais : *split-plot*.

<sup>2</sup> En anglais : *whole plot, sub-block*.

<sup>3</sup> En anglais : *sub-plot*.

expériences en champ, en forêt, etc., on parle aussi d'*unités du premier degré*<sup>4</sup> et d'*unités du deuxième degré*<sup>5</sup>.

Comme au paragraphe 6.1.2, les notions de bloc, de grande parcelle et de petite parcelle peuvent en effet être appliquées à d'autres situations que les expériences en champ. Dans une expérience qui serait relative par exemple à la fabrication de papier, les quatre blocs pourraient consister en quatre journées de travail, les six « grandes parcelles » pourraient correspondre à six types de matière première, pour chacun desquels une fabrication serait réalisée au cours de chacune des quatre journées, et les « petites parcelles » pourraient correspondre à trois modalités de séchage du papier.

### ⊖ 2° Trois et plus de trois facteurs

Le principe des blocs aléatoires complets avec parcelles divisées peut être étendu de trois façons différentes au cas de trois facteurs.

Pour une expérience factorielle comportant trois facteurs, respectivement à  $p$ ,  $p'$  et  $p''$  modalités, et  $r$  blocs, on peut tout d'abord associer les différentes modalités d'un seul facteur aux grandes parcelles (ou aux unités du premier degré), puis toutes les combinaisons des deux autres facteurs aux petites parcelles (ou aux unités du deuxième degré), en définissant ainsi  $pr$  grandes parcelles et  $pp'p''r$  petites parcelles.

On peut aussi associer toutes les combinaisons des modalités de deux facteurs aux grandes parcelles, puis les différentes modalités du troisième facteur aux petites parcelles, en définissant  $pp'r$  grandes parcelles et, aussi,  $pp'p''r$  petites parcelles. On notera que les grandes parcelles de la première option sont en fait plus étendues que celles de la deuxième option, puisqu'elles réunissent chacune  $p'p''$  petites parcelles, au lieu de  $p''$  petites parcelles.

Mais, toujours pour une expérience qui comporterait trois facteurs, on peut envisager en outre d'effectuer la répartition des objets en trois temps, en définissant des *parcelles divisées à deux niveaux*<sup>6</sup>.

Les différentes modalités d'un premier facteur sont alors réparties tout d'abord à l'intérieur des  $r$  blocs, dans  $pr$  grandes parcelles (ou unités du premier degré). Les différentes modalités d'un deuxième facteur sont ensuite réparties à l'intérieur des  $pr$  grandes parcelles, en  $pp'r$  parcelles intermédiaires ou sous-parcelles (ou unités du deuxième degré). Et les différentes modalités du troisième facteur sont enfin réparties à l'intérieur des  $pp'r$  parcelles intermédiaires, en  $pp'p''r$  petites parcelles ou *sous-sous-parcelles* (ou *unités du troisième degré*)<sup>7</sup>, toutes les répartitions étant effectuées « au hasard » et indépendamment les unes des autres.

<sup>4</sup> En anglais : *whole unit*.

<sup>5</sup> En anglais : *sub-unit*.

<sup>6</sup> En anglais : *split-split-plot*.

<sup>7</sup> En anglais : *sub-sub-plot, sub-sub-unit*.

Les mêmes principes peuvent aussi être appliqués à un nombre quelconque de facteurs, avec évidemment une diversité de possibilités encore accrue.

### 7.1.2 Autres dispositifs expérimentaux en parcelles divisées

#### 1° Dispositif complètement aléatoire

Le principe des parcelles divisées peut être associé aussi au cas des expériences complètement aléatoires. Comme première illustration, considérons par exemple une expérience d'alimentation de truies et de porcelets.

Dans cette optique, nous supposons qu'on souhaite étudier la croissance de porcelets en fonction, à la fois, de l'alimentation qui est donnée à leurs mères durant leurs gestations ou leurs périodes d'allaitement, et de l'alimentation qui est donnée ensuite aux porcelets eux-mêmes, après sevrage.

Si on considère deux alimentations différentes des truies et quatre alimentations différentes des porcelets, et si on dispose de 10 truies, on peut répartir « au hasard » dans un premier temps les deux alimentations entre les 10 truies, puis choisir quatre porcelets dans chacune des portées, et répartir entre eux au hasard et indépendamment, dans chacune des portées, les quatre alimentations destinées aux porcelets. Il s'agirait ainsi d'une expérience factorielle  $2 \times 4$ , avec cinq répétitions et utilisant le principe des parcelles divisées.

Une deuxième illustration du même dispositif est donnée par la séquence :

33 31 32 13 12 11 32 31 33 21 22 23 11 13 12 21 22 23,

que nous avons envisagée au paragraphe 5.3.3°, et dans laquelle les trois modalités du deuxième facteur sont chaque fois associées successivement à chacune des modalités du premier facteur. Il s'agit ici d'une expérience factorielle  $3^2$  de même nature que la précédente, mais en deux répétitions.

#### ⊖ 2° Carré latin et blocs incomplets

Le principe des expériences en parcelles divisées peut être adapté à de nombreux autres dispositifs expérimentaux, dont les dispositifs en carré latin et en blocs incomplets (§ 8.1, 9.1 et 10.1).

Dans le cas du carré latin  $4 \times 4$  qui est présenté à la figure 8.1.1 et qui fait intervenir un facteur objets, un facteur lignes et un facteur colonnes, on pourrait subdiviser par exemple chacune des 16 parcelles en trois sous-parcelles, en vue d'introduire dans l'expérience un facteur supplémentaire à trois modalités. En dehors des facteurs lignes et colonnes, l'expérience serait alors une expérience factorielle  $4 \times 3$  en carré latin et parcelles divisées, avec quatre répétitions.

### ⊖ 3° Expériences factorielles fractionnaires, surfaces de réponse, etc.

Les différentes applications du principe des parcelles divisées que nous avons envisagées jusqu'à présent concernent toutes des expériences factorielles complètes (§ 2.3.2). Mais le même principe peut être appliqué aussi aux expériences non factorielles (au sens strict) : expériences factorielles fractionnaires (§ 2.3.3), étude des surfaces de réponse (§ 2.4.1 et 2.4.2), etc.

En matière d'expérience factorielle fractionnaire, dans le cas de l'exemple du paragraphe 2.3.3.6° (expérience de type  $3^{3-1}$ ), la répartition des objets pourrait être :

$$221 \quad 232 \quad 213 \quad 312 \quad 331 \quad 323 \quad 133 \quad 122 \quad 111,$$

une première répartition au hasard ayant été réalisée tout d'abord pour le premier facteur (premiers chiffres), et une deuxième répartition au hasard étant réalisée ensuite globalement pour les deux autres facteurs (deux derniers chiffres).

De même, en ce qui concerne l'étude des surfaces de réponse, dans le cas du plan de DOEHLERT à deux facteurs (partie gauche de la figure 2.4.3 et partie supérieure gauche du tableau 2.4.1), on pourrait envisager de procéder en un premier temps à une répartition aléatoire des trois niveaux du facteur  $x_2$ , puis à une répartition aléatoire, pour chacun de ces niveaux, des deux ou des trois niveaux du facteur  $x_1$ . Le résultat pourrait être par exemple :

$$(-1; 0) \quad (1; 0) \quad (0; 0) \quad (0,5; -0,866) \quad (0,5; 0,866) \quad (-0,5; 0,866) \quad (-0,5; -0,866).$$

De telles situations, essentiellement liées aux expériences organisées de façon consécutive, se présentent principalement dans le domaine industriel.

## 7.1.3 Les expériences en bandes croisées

### 1° Blocs aléatoires complets

Aux expériences en blocs aléatoires complets et parcelles divisées, on peut associer les expériences en blocs aléatoires complets et *bandes croisées* ou *blocs divisés*<sup>8</sup>. Il s'agit d'expériences factorielles qui font généralement intervenir deux facteurs et qui sont conçues de telle sorte qu'à l'intérieur de chacun des blocs, les différents traitements soient appliqués à des bandes de terrain allongées dans une première direction pour un des facteurs et dans une deuxième direction, perpendiculaire à la première, pour l'autre facteur.

La figure 7.5.1 donne une illustration de ce type d'expérience. Il s'agit de deux blocs, dans chacun desquels apparaissent, d'une part, huit bandes verticales relativement étroites correspondant aux huit modalités d'un premier facteur (premiers chiffres, 1 à 8, des nombres qui désignent les différents objets), et d'autre part, deux

<sup>8</sup> En anglais : *split-block*, *strip-block*, *strip-plot*, *criss-cross*.

bandes horizontales plus larges correspondant aux deux modalités d'un deuxième facteur (deuxièmes chiffres, 1 ou 2, des nombres qui désignent les différents objets). Dans une direction comme dans l'autre, la répartition des différentes modalités est réalisée « au hasard » et indépendamment dans chacun des blocs.

Cette façon de procéder permet de disposer de grandes parcelles, qui correspondent aux bandes verticales et horizontales, pour chacun des deux facteurs, et de petites parcelles, qui correspondent aux intersections des deux réseaux de bandes, en ce qui concerne l'interaction des deux facteurs.

### ⊖ 2° Carré latin, blocs incomplets, etc.

Le même principe peut être appliqué à d'autres dispositifs expérimentaux, dont le carré latin et les blocs incomplets (§ 8.1, 9.1 et 10.1). Il s'agit toutefois de situations peu courantes. On peut trouver des informations à ce sujet dans les publications de FEDERER [1955, 1975, 1977] et KUEHL [2000].

De nombreuses variantes des dispositifs expérimentaux en parcelles divisées et en bandes croisées sont également présentées par FEDERER et KING [2007].

## 7.2 Analyse des résultats

### 7.2.1 Les expériences en blocs aléatoires complets et parcelles divisées

#### 1° Analyse de la variance

Dans le cas de deux facteurs, auquel nous nous limitons, l'interprétation des résultats des expériences en blocs aléatoires complets et parcelles divisées consiste généralement en une analyse de la variance à trois critères de classification, le plus souvent avec une seule observation par petite parcelle et par variable étudiée [STAT2, § 11.2.4].

Les différentes sources de variation d'une telle analyse sont, classiquement, le premier facteur considéré au départ, le deuxième facteur considéré au départ, le facteur blocs, l'interaction des deux facteurs initiaux, et les interactions facteur 1 – blocs, facteur 2 – blocs et facteur 1 – facteur 2 – blocs. Ces trois dernières interactions ne peuvent toutefois pas être regroupées en une seule composante « résiduelle », comme dans le cas général des blocs aléatoires complets (§ 6.2.2°), car on doit s'attendre à ce que la première soit plus importante, et parfois même beaucoup plus importante, que les deux autres.

L'interaction facteur 1 – blocs se mesure en effet au sein des blocs, au niveau des grandes parcelles, tandis que les interactions facteur 2 – blocs et facteur 1 – facteur 2 – blocs résultent essentiellement des disparités qui peuvent exister entre les petites parcelles, au sein des grandes parcelles. Or, l'hétérogénéité observée au

premier niveau (grandes parcelles) est normalement supérieure à celle observée au deuxième niveau (petites parcelles).

En conséquence, l'interaction facteur 1 – blocs est généralement considérée individuellement et utilisée comme base de comparaison pour tester l'influence du premier facteur. Cette composante est souvent appelée aussi *variation résiduelle 1* ou *erreur 1* (ou *a*)<sup>9</sup>. Par contre, les deux autres interactions sont généralement regroupées en une composante unique, appelée *variation résiduelle 2* ou *erreur 2* (ou *b*)<sup>10</sup>, qui sert de base de comparaison à la fois pour le deuxième facteur et pour l'interaction des deux facteurs<sup>11</sup>.

En outre, on présente souvent séparément l'ensemble des éléments relatifs aux grandes parcelles et l'ensemble des éléments qui concernent les petites parcelles. Le tableau 7.2.1 donne le schéma d'une telle analyse, pour  $p$  modalités du premier facteur, associé aux grandes parcelles,  $q$  modalités du deuxième facteur, associé aux petites parcelles, et  $r$  blocs.

**Tableau 7.2.1.** Schéma de l'analyse de la variance relative aux expériences en blocs aléatoires complets et parcelles divisées, dans le cas général  $p \times q \times r$  et dans le cas particulier  $6 \times 3 \times 4$ .

| Sources de variation   | Degrés de liberté |    |
|------------------------|-------------------|----|
| Facteur 1              | $p - 1$           | 5  |
| Blocs                  | $r - 1$           | 3  |
| Variation résiduelle 1 | $(p - 1)(r - 1)$  | 15 |
| Facteur 2              | $q - 1$           | 2  |
| Facteur 1 – facteur 2  | $(p - 1)(q - 1)$  | 10 |
| Variation résiduelle 2 | $p(q - 1)(r - 1)$ | 36 |
| Totaux                 | $pqr - 1$         | 71 |

Ce tableau présente également, en particulier, les nombres de degrés de liberté relatifs à l'exemple du paragraphe 7.1.1.1° (comparaison de variétés et de fumures).

## 2° Comparaisons de moyennes

Dans les comparaisons de moyennes, au sens des comparaisons particulières ou multiples notamment [STAT2, § 12.2, 12.3 et 12.4], il faut être attentif au fait que la manière de calculer les erreurs standards des différences de moyennes dépend du ou des facteurs qui sont pris en considération.

<sup>9</sup> En anglais : *error 1*.

<sup>10</sup> En anglais : *error 2*.

<sup>11</sup> Comme au paragraphe 6.2.2° et comme dans de nombreux autres cas, l'utilisation des expressions « variation résiduelle », « carré moyen résiduel » ou « variance résiduelle » est quelque peu abusive, dans la mesure où il ne s'agit pas de variances résiduelles au sens propre, mais bien d'interactions ou de groupes d'interactions servant de bases de comparaison pour d'autres éléments de l'analyse.

Pour les différences  $\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{i'..}$ , relatives au premier facteur, et pour les différences  $\bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{.j'.$ , relatives au deuxième facteur, les erreurs standards sont respectivement :

$$\sqrt{2 \text{CM}_{(1)}/(qr)} \quad \text{et} \quad \sqrt{2 \text{CM}_{(2)}/(pr)},$$

si on désigne par  $\text{CM}_{(1)}$  et  $\text{CM}_{(2)}$  les carrés moyens qui concernent les deux sources de variation « résiduelle ». De même, pour les différences  $\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i'j.}$ , relatives également au deuxième facteur, mais en se limitant à une modalité donnée  $i$  du premier facteur, l'erreur standard est :

$$\sqrt{2 \text{CM}_{(2)}/r}.$$

⌈ La situation se complique quelque peu quand on considère les différences  $\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i'j.}$ , relatives au premier facteur en se limitant à une modalité donnée  $j$  du deuxième facteur. L'erreur standard est alors :

$$\sqrt{2 [\text{CM}_{(1)} + (q-1) \text{CM}_{(2)}]/(qr)}.$$

Le cas échéant, le nombre de degrés de liberté correspondant peut être déterminé comme suit, de façon approchée, selon la méthode de SATTERTHWAITTE [STAT2, § 11.2.3.10°] :

$$p(p-1)(r-1) [\text{CM}_{(1)} + (q-1) \text{CM}_{(2)}]^2 / [p \text{CM}_{(1)}^2 + (p-1)(q-1) \text{CM}_{(2)}^2].$$

En outre, l'analyse de la variance et les erreurs standards des différences de moyennes qui concernent le cas des parcelles divisées à deux niveaux (*split-split-plot*) sont présentées notamment par KUEHL [2000].

## 7.2.2 Autres dispositifs expérimentaux en parcelles divisées

### 1° Dispositif complètement aléatoire

Des principes semblables peuvent être appliqués au cas des expériences complètement aléatoires organisées en parcelles divisées.

En particulier, pour deux facteurs, l'analyse de la variance est une analyse à deux critères de classification. Le tableau 7.2.2 donne le schéma de cette analyse, pour  $p$  et  $q$  modalités des facteurs et pour  $r$  répétitions des  $pq$  objets, ainsi que les nombres de degrés de liberté relatifs au premier exemple du paragraphe 7.1.2.1° (alimentation de truies et de porcelets).

### ⊖ 2° Autres situations

La méthode qui vient d'être présentée ne s'applique évidemment pas quand on ne dispose que d'une seule répétition, les deux composantes résiduelles disparaissant alors des analyses de la variance. D'autres approches doivent donc être

**Tableau 7.2.2.** Schéma de l'analyse de la variance relative aux expériences complètement aléatoires organisées en parcelles divisées, dans le cas général  $p \times q \times r$  et dans le cas particulier  $2 \times 4 \times 5$ .

| Sources de variation   | Degrés de liberté |    |
|------------------------|-------------------|----|
| Facteur 1              | $p - 1$           | 1  |
| Variation résiduelle 1 | $p(r - 1)$        | 8  |
| Facteur 2              | $q - 1$           | 3  |
| Facteur 1 – facteur 2  | $(p - 1)(q - 1)$  | 3  |
| Variation résiduelle 2 | $p(q - 1)(r - 1)$ | 24 |
| Totaux                 | $pqr - 1$         | 39 |

envisagées, et il en est de même pour des effectifs inégaux et pour les expériences non factorielles au sens strict, qui ont aussi été évoquées au paragraphe 7.1.2.3°.

Des informations peuvent être trouvées à ce sujet dans les articles de GOOS *et al.* [2006], NAES *et al.* [2007], et SMITH et JOHNSON [2007].

### 7.2.3 Les expériences en bandes croisées

#### 1° Analyse de la variance

Selon des principes semblables à ceux du paragraphe 7.2.1.1°, pour les expériences en blocs aléatoires complets et bandes croisées, l'interprétation des résultats consiste normalement en une analyse de la variance à trois critères de classification, dans laquelle n'intervient aucun regroupement a priori des interactions liées au facteur blocs [STAT2, § 11.2.4]. On doit s'attendre en effet, dans ce cas, à ce que les interactions facteur 1 – blocs et facteur 2 – blocs soient toutes deux plus importantes que l'interaction facteur 1 – facteur 2 – blocs, sans qu'elles ne soient cependant nécessairement du même ordre de grandeur.

Chacune des trois sources de variation auxquelles on s'intéresse principalement, à savoir les deux facteurs initiaux et leur interaction, doit alors être comparée à son interaction avec le facteur blocs. Certains regroupements peuvent néanmoins être envisagés au cas par cas, moyennant la réalisation de tests préliminaires.

Les interactions qui servent de bases de comparaison sont parfois appelées variation résiduelle 1, variation résiduelle 2 et variation résiduelle 3, ou erreur 1 (ou  $a$ ), erreur 2 (ou  $b$ ) et erreur 3 (ou  $ab$ ), comme le montre le tableau 7.2.3, pour  $pq$  objets et  $r$  blocs.

Ce tableau présente également les nombres de degrés de liberté relatifs à l'exemple qui a été évoqué au paragraphe 7.1.3.1°.

**Tableau 7.2.3.** Schéma de l'analyse de la variance relative aux expériences en blocs aléatoires complets et bandes croisées, dans le cas général  $p \times q \times r$  et dans le cas particulier  $8 \times 2 \times 2$ .

| Sources de variation   | Degrés de liberté       |    |
|------------------------|-------------------------|----|
| Facteur 1              | $p - 1$                 | 7  |
| Blocs                  | $r - 1$                 | 1  |
| Variation résiduelle 1 | $(p - 1)(r - 1)$        | 7  |
| Facteur 2              | $q - 1$                 | 1  |
| Variation résiduelle 2 | $(q - 1)(r - 1)$        | 1  |
| Facteur 1 – facteur 2  | $(p - 1)(q - 1)$        | 7  |
| Variation résiduelle 3 | $(p - 1)(q - 1)(r - 1)$ | 7  |
| Totaux                 | $pqr - 1$               | 31 |

### ⊖ 2° Comparaisons de moyennes

Des informations relatives au calcul des erreurs standards des différences de moyennes sont données notamment par KUEHL [2000]. D'autre part, une large discussion relative aux expériences en parcelles divisées et en bandes croisées, comportant notamment de nombreux exemples et diverses mises en garde, est présentée par FEDERER [1975, 1977].

## 7.3 Discussion

### 1° Avantages et inconvénients

Les expériences en parcelles divisées et en bandes croisées ont l'avantage de permettre l'utilisation de parcelles ou, d'une manière plus générale, d'unités expérimentales de plus grandes dimensions, pour un facteur dans le premier cas et pour les deux facteurs dans le deuxième cas.

Mais il faut savoir que cet avantage est compensé par une perte, parfois importante, de précision ou de puissance pour les comparaisons qui concernent le ou, éventuellement, les facteurs associés aux grandes parcelles. Cette perte de précision ou de puissance résulte non seulement des différences d'ordre de grandeur entre les composantes « résiduelles » qui servent de bases de comparaison (§ 7.2.1.1° et 7.2.3.1°), mais aussi des différences qui existent entre les nombres de degrés de liberté de ces composantes. Ce dernier élément intervient de façon d'autant plus marquée que le ou les facteurs associés aux grandes parcelles comportent un petit nombre de modalités.

Par contre, on peut souvent observer un gain de précision ou de puissance pour le facteur qui est associé aux petites parcelles et pour l'interaction des deux facteurs.

## 2° Applications agronomiques

Dans le domaine agronomique, l'utilisation de parcelles divisées ou de bandes croisées peut donc se justifier en premier lieu quand, pour l'une ou l'autre raison (mécanisation, facilité de réalisation de l'expérience, etc.), un des deux ou les deux facteurs considérés nécessitent des parcelles ou des unités expérimentales de relativement grandes dimensions. Au moment de prendre une décision allant éventuellement dans ce sens, il ne faut cependant pas perdre de vue les réductions de précision ou de puissance auxquelles nous venons de faire allusion.

D'autre part, le recours au principe des parcelles divisées peut aussi se justifier quand on souhaite mettre l'accent plus sur un des facteurs que sur l'autre ou, à la limite, quand on s'intéresse uniquement à un des deux facteurs et à l'interaction des deux facteurs. Tel peut être le cas par exemple si on souhaite comparer différents produits phytosanitaires et étudier leur interaction éventuelle avec un certain nombre de variétés d'une culture donnée, sans s'intéresser particulièrement aux différences pouvant exister entre les variétés.

Enfin, un troisième cas d'application du principe des parcelles divisées concerne l'introduction, en cours d'expérience, d'un facteur supplémentaire non prévu initialement. Une telle situation peut se présenter en particulier dans les expériences de longue durée (expériences forestières notamment), où il est parfois utile ou même nécessaire de subdiviser les parcelles, si leur dimension le permet, de manière à pouvoir tenir compte d'un facteur supplémentaire qui n'avait pas été prévu ou jugé suffisamment important au départ (lutte contre une maladie ou un parasite qui a pris de l'extension en cours d'expérience, par exemple).

## 3° Applications industrielles

D'origine agronomique, le principe des parcelles divisées a été introduit et largement développé dans le domaine industriel et dans certains domaines connexes où les expériences sont organisées en séquence. On notera d'ailleurs que la dénomination « *split-plot* » reste régulièrement d'application dans de nombreuses situations où la notion de « parcelle » n'a aucune raison d'être.

Le but poursuivi dans ce cas est essentiellement de faire face autant que possible aux difficultés de modification des modalités de certains facteurs (§ 5.3.3°). Dans cette optique, le principe des parcelles divisées est assez souvent associé à l'un ou l'autre critère d'optimalité, appliqué au coût global de réalisation de l'expérience.

[ Des informations complémentaires sont données notamment par GOOS [2002],  
[ JONES et NACHTSHEIM [2009], et KOWALSKI *et al.* [2007].

## 4° Efficacité relative

On peut déterminer de façon approchée l'efficacité relative des dispositifs en parcelles divisées et en bandes croisées, par comparaison avec les dispositifs classiques correspondants, en calculant les rapports des carrés moyens qui servent de

bases de comparaison, d'une manière semblable à celle que nous avons présentée au paragraphe 6.3.2°.

Dans le cas des expériences en blocs aléatoires complets et parcelles divisées par exemple, il s'agit des quotients :

$$CM_r/CM_{(1)} \quad \text{et} \quad CM_r/CM_{(2)},$$

si on désigne par  $CM_{(1)}$  et  $CM_{(2)}$  les carrés moyens relatifs aux deux sources de variation « résiduelle » de l'expérience en parcelles divisées, et par  $CM_r$  le carré moyen « résiduel » qui est obtenu en supposant que la répartition des objets à l'intérieur des blocs a été réalisée de manière complètement aléatoire.

Toujours dans ce cas, on peut démontrer que  $CM_r$  est en fait une moyenne pondérée de  $CM_{(1)}$  et  $CM_{(2)}$ . Il en résulte que toute augmentation de l'un ou l'autre de ces deux derniers carrés moyens est nécessairement compensée par une diminution de l'autre, ce qui confirme le fait que tout gain de précision ou de puissance lié aux petites parcelles est compensé par une perte de précision ou de puissance pour les grandes parcelles.

Des formules plus précises, qui tiennent compte notamment de la correction relative aux nombres de degrés de liberté (§ 6.3.3°), peuvent être trouvées dans plusieurs ouvrages classiques, dont ceux de FEDERER [1955] et KUEHL [2000].

[ On peut facilement démontrer la propriété de moyenne pondérée en partant des définitions des différentes composantes. Si on désigne par  $SCE_{ac}$ ,  $SCE_{bc}$  et  $SCE_{abc}$  les sommes des carrés des écarts relatives aux trois interactions qui font intervenir le facteur blocs, affecté de l'indice  $c$  [STAT2, § 11.2.2], on a :

$$CM_{(1)} = SCE_{ac}/[(p-1)(r-1)], \quad CM_{(2)} = (SCE_{bc} + SCE_{abc})/[p(q-1)(r-1)]$$

$$\text{et} \quad CM_r = (SCE_{ac} + SCE_{bc} + SCE_{abc})/[(pq-1)(r-1)].$$

On en déduit :

$$CM_r = \frac{(p-1)(r-1)CM_{(1)} + p(q-1)(r-1)CM_{(2)}}{(p-1)(r-1) + p(q-1)(r-1)},$$

ce qui est bien une relation de moyenne pondérée, les coefficients de pondération étant les nombres de degrés de liberté des carrés moyens.

### 5° Données manquantes

La question des données manquantes se complique quelque peu dans le cas des expériences en parcelles divisées et en bandes croisées, car elle doit être envisagée, le cas échéant, de manière séparée pour les grandes et pour les petites parcelles.

Cette question peut être traitée soit par l'utilisation de formules particulières semblables à celles qui concernent par exemple les blocs aléatoires complets classiques [STAT2, § 10.4.3], soit par l'analyse de la variance non orthogonale, l'analyse de la covariance ou le modèle linéaire mixte (§ 12.4.1, 12.4.2 et 12.4.4).

[ Des informations peuvent être trouvées notamment à ce sujet dans le livre de [ FEDERER et KING [2007].

### ⊖ 6° Parcelles divisées et observations successives

Les observations qui sont répétées à différents moments sur les mêmes individus sont parfois traitées comme s'il s'agissait de parcelles divisées, en assimilant les différents individus observés à de grandes parcelles et les différentes observations successives à de petites parcelles.

Dans cette optique, pour une expérience complètement aléatoire qui ferait intervenir  $p$  modalités d'un seul facteur et  $q$  observations successives (croissance d'animaux soumis à différentes alimentations et observés à différentes dates, par exemple), l'analyse serait du type de celle du tableau 7.2.2, le « facteur 2 » étant en fait le facteur temps ou dates. De même, dans le cas d'une expérience en blocs aléatoires complets, pour  $p$  modalités d'un seul facteur,  $q$  répétitions successives des mêmes mesures et  $r$  blocs, l'analyse de la variance serait celle du tableau 7.2.1.

Aucune difficulté particulière ne se présente en ce qui concerne la première partie de telles analyses, c'est-à-dire pour le seul facteur considéré au départ. Il n'en est pas de même par contre pour la deuxième partie de l'analyse, c'est-à-dire pour le facteur temps ou dates et pour l'interaction des deux facteurs. Les différentes observations successives étant réalisées sur les mêmes individus, il faut en effet s'attendre à ce que les résidus relatifs à chacun des individus ne soient pas indépendants les uns des autres, mais au contraire plus ou moins fortement corrélés entre eux.

Nous donnerons quelques informations complémentaires à ce propos au paragraphe 11.2.2.3°.

## 7.4 Exemple 1 : expérience en blocs aléatoires complets et parcelles divisées

### 7.4.1 Présentation et données

#### 1° Présentation générale

Nous illustrons le principe des blocs aléatoires complets avec parcelles divisées en considérant le cas d'une expérience réalisée sur haricot en vue d'étudier, pour plusieurs variétés, l'influence d'une inoculation bactérienne par *Rhizobium*.

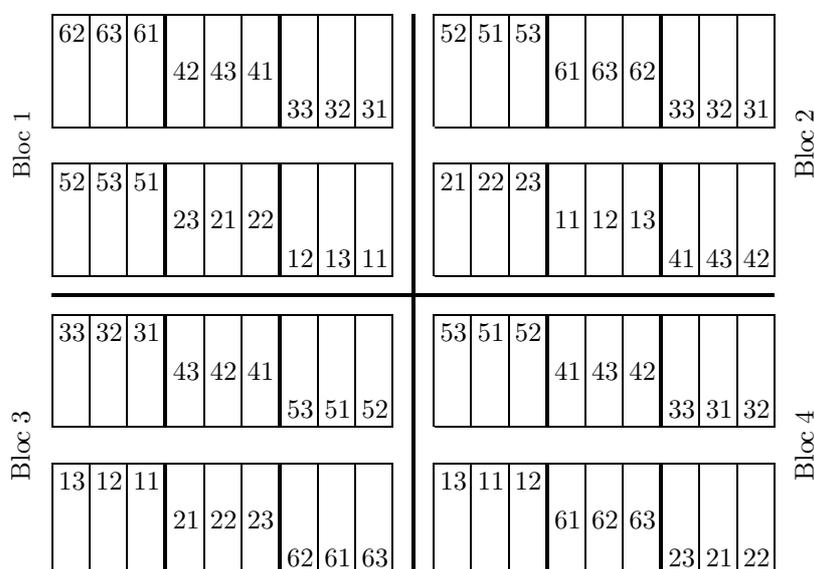
Les variétés considérées sont au nombre de six et les « traitements » appliqués à ces variétés au nombre de trois, l'ensemble constituant une expérience factorielle complète comportant 18 objets. Les « traitements » sont, dans chaque cas, un té-

moins, une inoculation et un apport d'azote minéral (50 unités d'azote par ha), cet apport étant destiné à chiffrer autant que possible l'équivalent en azote de l'inoculation bactérienne.

Le détail des modalités de culture et de traitement est exposé dans la publication originale de BRAKEL et MANIL [1965].

## 2° Dispositif expérimental

La figure 7.4.1 représente, à l'échelle de 1/400, le plan exact de l'expérience. Les parcelles unitaires ont 2 m de largeur sur 6 m de longueur et sont réunies en huit groupes de neuf parcelles, les différents groupes étant séparés et entourés de tous côtés par des chemins d'accès de 2 m de largeur<sup>12</sup>.



**Figure 7.4.1.** Expérience d'inoculation bactérienne sur haricot : plan de l'expérience, les numéros d'ordre des variétés et des traitements étant chaque fois juxtaposés.

Les 72 parcelles ont été divisées en quatre blocs, constitués chacun de deux groupes de neuf parcelles. En l'absence de toute information relative à l'hétérogénéité du terrain, ces blocs ont été définis de manière à être aussi compacts que possible. Ils correspondent aux quatre quadrants de la figure 7.4.1.

<sup>12</sup> Dans sa version électronique, la transmission du présent document en format PDF peut avoir pour conséquence de modifier quelque peu l'échelle de la figure 7.4.1.

Nous avons indiqué au paragraphe 7.1.1.1° comment la répartition des 18 objets a été effectuée, en deux temps, au sein de chacun des blocs. L'objectif poursuivi en ayant recours au principe des parcelles divisées était, à la fois, de simplifier la réalisation de l'expérience (semis de 24 grandes parcelles au lieu de 72 parcelles unitaires), et de concentrer l'attention sur les différences entre traitements et sur leur interaction avec le facteur variétés, éventuellement aux dépens de la précision des comparaisons entre variétés, considérées comme relativement secondaires.

### 3° Données

Chacune des 72 petites parcelles comportait cinq lignes de haricots, semées à 40 cm d'écartement. Seules les trois lignes centrales de chaque parcelle ont été l'objet de mesures, de telle sorte que la surface utile par parcelle est égale à 7,2 m<sup>2</sup>.

Les rendements obtenus de cette manière et exprimés en kg de gousses fraîches par parcelle, ainsi que les moyennes correspondantes, sont présentés dans le tableau 7.4.1.

**Tableau 7.4.1.** Expérience d'inoculation bactérienne sur haricot : rendements observés et moyennes, en kg de gousses fraîches par parcelle.

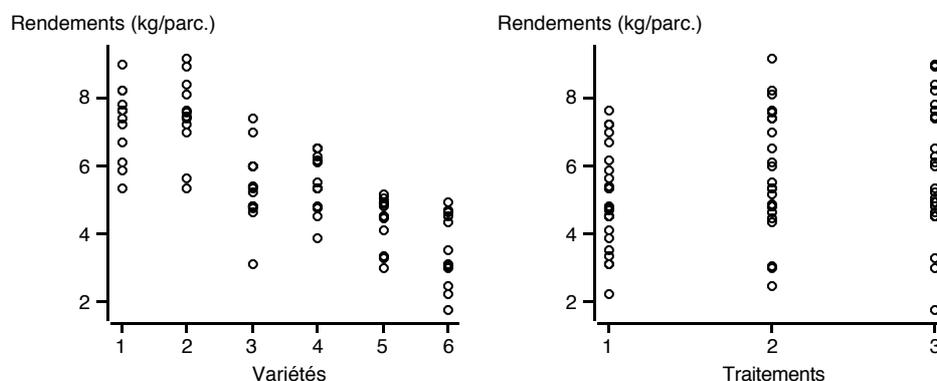
| Variétés et traitements |   | Blocs |      |      |      | Moyennes |
|-------------------------|---|-------|------|------|------|----------|
|                         |   | 1     | 2    | 3    | 4    |          |
| 1                       | 1 | 7,20  | 6,70 | 5,87 | 5,35 | 6,28     |
| 1                       | 2 | 7,38  | 8,20 | 7,60 | 6,08 | 7,32     |
| 1                       | 3 | 7,82  | 8,98 | 7,64 | 8,20 | 8,16     |
| 2                       | 1 | 6,95  | 7,60 | 7,22 | 5,60 | 6,84     |
| 2                       | 2 | 7,55  | 9,15 | 8,10 | 5,30 | 7,52     |
| 2                       | 3 | 7,42  | 8,89 | 8,40 | 7,37 | 8,02     |
| 3                       | 1 | 5,37  | 4,75 | 3,08 | 5,30 | 4,62     |
| 3                       | 2 | 6,95  | 7,41 | 4,80 | 6,00 | 6,29     |
| 3                       | 3 | 6,00  | 5,20 | 4,80 | 4,60 | 5,15     |
| 4                       | 1 | 3,87  | 6,15 | 4,75 | 4,50 | 4,82     |
| 4                       | 2 | 5,35  | 6,50 | 4,79 | 5,50 | 5,54     |
| 4                       | 3 | 5,35  | 6,50 | 6,28 | 6,10 | 6,06     |
| 5                       | 1 | 4,50  | 4,80 | 3,35 | 4,11 | 4,19     |
| 5                       | 2 | 5,14  | 4,45 | 4,85 | 2,95 | 4,35     |
| 5                       | 3 | 4,50  | 4,91 | 3,28 | 5,02 | 4,43     |
| 6                       | 1 | 3,10  | 4,65 | 2,20 | 3,50 | 3,36     |
| 6                       | 2 | 3,00  | 4,59 | 2,46 | 4,30 | 3,59     |
| 6                       | 3 | 2,95  | 4,90 | 1,75 | 4,48 | 3,52     |

## 7.4.2 Analyse des résultats<sup>13</sup>

### 1° Examen préliminaire

La figure 7.4.2 présente les données sous forme graphique. Dans cette figure, comme dans le tableau 7.4.1, on observe tout d'abord que les données sont extrêmement variables (valeur minimum égale à 1,75 et valeur maximum égale à 9,15, soit un rapport de plus de 1 à 5, avec une moyenne générale égale à 5,56 kg par parcelle). On observe aussi que les différences concernent essentiellement les variétés et, à première vue, relativement peu les traitements.

En raison notamment de l'existence de ces différences importantes, les rendements ont été soumis à une transformation logarithmique (logarithmes décimaux), destinée à stabiliser les variances.



**Figure 7.4.2.** Expérience d'inoculation bactérienne sur haricot : représentation graphique de l'influence des deux facteurs considérés.

### 2° Analyse de la variance

Le tableau 7.4.2 donne les résultats de l'analyse de la variance, réalisée selon le schéma du tableau 7.2.1. L'analyse détaillée à trois critères de classification montrerait que la ligne « Variation résiduelle 1 » du tableau 7.4.2 correspond bien à l'interaction variétés-blocs, et que le regroupement des interactions traitements-blocs et variétés-traitements-blocs, qui constitue la « Variation résiduelle 2 », se justifie pleinement. Les carrés moyens de ces deux interactions sont en effet égaux respectivement à 0,003854 et 0,002951, avec 6 et 30 degrés de liberté.

Le tableau 7.4.2 montre qu'il existe des différences très hautement significatives entre variétés et entre traitements, et que l'interaction des deux facteurs n'est pas significative.

<sup>13</sup> Un traitement complet de cet exemple à l'aide du logiciel R est présenté à l'adresse <[www.dagnelie.be/docexr/exp074/exp074.htm](http://www.dagnelie.be/docexr/exp074/exp074.htm)>.

**Tableau 7.4.2.** Expérience d'inoculation bactérienne sur haricot : tableau d'analyse de la variance.

| Sources de variation   | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | F        | P      |
|------------------------|-------------------|------------------------------|---------------|----------|--------|
| Variétés               | 5                 | 1,055289                     | 0,211058      | 15,0 *** | 0,0000 |
| Blocs                  | 3                 | 0,147833                     | 0,049278      |          |        |
| Variation résiduelle 1 | 15                | 0,211102                     | 0,014073      |          |        |
| Traitements            | 2                 | 0,056757                     | 0,028378      | 9,15 *** | 0,0006 |
| Variétés-traitements   | 10                | 0,044062                     | 0,004406      | 1,42     | 0,21   |
| Variation résiduelle 2 | 36                | 0,111646                     | 0,003101      |          |        |
| Totaux                 | 71                | 1,626689                     |               |          |        |

Ces conclusions peuvent paraître surprenantes, par comparaison avec ce que semblent indiquer les diagrammes de la figure 7.4.2. Elles résultent du fait que les tests relatifs au facteur traitements et à l'interaction variétés-traitements sont beaucoup plus puissants que le test relatif au facteur variétés, en raison, d'une part, de la très grande différence entre les carrés moyens des deux composantes résiduelles (rapport de 1 à 4,5 environ), et d'autre part, de la différence entre les nombres de degrés de liberté qui sont associés à ces deux composantes (respectivement 15 et 36).

### 3° Différences de moyennes

Comme il a été dit ci-dessus, les différences entre variétés ne constituent pas, dans le cas présent, un des éléments essentiels de l'expérimentation. Par contre, les différences entre traitements doivent être prises en considération de manière plus précise.

Les moyennes des 24 observations relatives à chacun des traitements sont, après transformation logarithmique :

témoin : 0,68144 ,  
 inoculation : 0,73875 ,  
 fumure azotée : 0,74301 .

On peut en déduire les intervalles de confiance suivants, d'une part pour l'influence de l'inoculation :

$$0,73875 - 0,68144 \pm 2,028 \sqrt{2(0,003101)/24} = 0,05731 \pm 0,03260 \\ = 0,02471 \text{ et } 0,08991 ,$$

et d'autre part pour l'influence de la fumure azotée :

$$0,74301 - 0,68144 \pm 2,028 \sqrt{2(0,003101)/24} = 0,06157 \pm 0,03260 \\ = 0,02897 \text{ et } 0,09417 .$$

La valeur 0,05731 est en fait une estimation de la différence des logarithmes des rendements moyens et, donc aussi, du logarithme du quotient des rendements moyens. Cette différence indique que les rendements obtenus après inoculation sont égaux, dans l'ensemble, à 114 % des rendements des parcelles témoins, puisque :

$$10^{0,05731} = 1,141 \quad \text{ou} \quad \log_{10} 1,141 = 0,0573.$$

De même, aux valeurs 0,02471 et 0,08991, correspondent des limites égales à 106 et 123 %.

Ces différents résultats montrent que l'accroissement de rendement lié à l'inoculation peut être estimé à 14 %, avec des limites de confiance égales à 6 et 23 %.

Quant à l'accroissement de rendement lié à la fumure azotée, il peut être estimé d'une manière identique à 15 %, avec des limites de confiance égales à 7 et 24 %.

L'accroissement de rendement dû à l'inoculation étant égal à environ 93 % de l'accroissement lié à l'apport de 50 unités d'azote par ha, on peut en conclure que l'inoculation bactérienne équivaut dans ce cas à l'apport de 46 ou 47 unités d'azote.

#### 4° Efficacité relative

Le tableau 7.4.2 montre aussi que, pour une répartition supposée complètement aléatoire des 18 objets au sein des quatre blocs, c'est-à-dire en négligeant la structure propre aux parcelles divisées, la variation « résiduelle » relative aux deux facteurs étudiés et à leur interaction aurait été :

$$CM_r = (0,211102 + 0,111646)/(15 + 36) = 0,006328.$$

On peut en déduire qu'en première approximation, par rapport à une expérience classique en blocs aléatoires complets, l'efficacité du test relatif aux variétés est, dans le cas des parcelles divisées :

$$CM_r/CM_{(1)} = 0,006328/0,014073 = 0,45 \text{ ou } 45 \text{ \%}.$$

On obtient de la même façon, pour les tests relatifs aux traitements et à l'interaction des deux facteurs :

$$CM_r/CM_{(2)} = 0,006328/0,003101 = 2,04 \text{ ou } 204 \text{ \%}.$$

On peut en conclure que le quasi-doublement de l'efficacité des tests relatifs aux traitements et à l'interaction, qui constituent les principaux objectifs de l'expérience, est contrebalancé par une perte de plus de 50 % de l'efficacité du test relatif aux variétés.

[ En raison de la réduction du nombre de degrés de liberté, la perte d'efficacité est sans doute sensiblement plus importante que 55 %, et elle serait plus importante ] encore si le nombre de variétés considérées avait été plus réduit.

### 5° À propos de la transformation logarithmique

L'emploi de la transformation logarithmique soulève quelques questions complémentaires, qui méritent d'être discutées ici et qui s'appliquent également à d'autres exemples présentés plus loin.

En ce qui concerne les moyennes, il faut se souvenir du fait que le retour à la variable initiale, à partir des moyennes des logarithmes, donne naissance à des moyennes géométriques, qui sont toujours inférieures ou égales aux moyennes arithmétiques correspondantes [STAT1, § 3.5.2]. À titre indicatif, les moyennes relatives aux trois traitements, obtenues par l'intermédiaire des logarithmes, sont :

$$10^{0,68144} = 4,80, \quad 10^{0,73875} = 5,48 \quad \text{et} \quad 10^{0,74301} = 5,53 \text{ kg/parcelle,}$$

alors que les moyennes arithmétiques, déduites directement des données du tableau 7.4.1, sont :

$$5,02, \quad 5,77 \quad \text{et} \quad 5,89 \text{ kg/parcelle.}$$

On peut noter aussi que, globalement, les conclusions auxquelles on aboutit dans le cas présent, avec ou sans transformation de variable, sont fort semblables. Mais l'emploi de la transformation logarithmique, qui complique quelque peu les calculs, présente cependant deux avantages.

D'une part, cette transformation permet d'exprimer toutes les différences entre objets en valeur relative, c'est-à-dire indépendamment notamment des unités de mesure utilisées, de l'étendue des parcelles, etc. Cet avantage n'est pas propre au cas présenté ici, mais est, au contraire, tout à fait général.

D'autre part, l'emploi de la transformation logarithmique rend non significative l'interaction variétés-traitements, qui sans transformation, serait juste significative ( $F_{obs} = 2,36$  et  $P = 0,029$ ). Cette absence d'interaction, en termes de logarithmes, signifie que les effets de l'inoculation et de la fumure azotée, exprimés en valeur relative, ne dépendent pas de la variété considérée. Les pourcentages d'augmentation de rendement qui ont été calculés ci-dessus globalement, pour l'ensemble des variétés, peuvent donc être appliqués indifféremment à chacune d'entre elles.

[ En outre, en ce qui concerne la variabilité « résiduelle », la relation existant entre le coefficient de variation d'une variable aléatoire et l'écart-type de son logarithme [STAT1, ex. 5.8.9] permet de calculer aisément des estimations des deux coefficients de variation résiduelle relatifs aux observations initiales. On obtient pour les grandes parcelles (variétés) :

$$\sqrt{0,014073}/0,4343 = 0,273 \text{ ou } 27,3 \%,$$

et pour les petites parcelles (traitements et interaction des deux facteurs) :

[ 
$$\sqrt{0,003101}/0,4343 = 0,128 \text{ ou } 12,8 \%.$$

### ⊖ 6° Codification du modèle d'analyse de la variance

Au cours des chapitres précédents, nous n'avons pas présenté les codes, en général relativement simples, qui peuvent être employés pour réaliser les analyses de la variance. En ce qui concerne le présent chapitre, nous donnons au contraire les codes relatifs aux deux exemples, de manière à bien faire apparaître la distinction entre le cas des parcelles divisées et le cas des bandes croisées.

Le contenu du tableau 7.4.2 peut être obtenu à l'aide du code suivant, associé aux commandes ou procédures « *anova* » ou « *glm* » :

$$L10R = V \ B \ V*B \ T \ V*T,$$

et cela tant avec le logiciel Minitab qu'avec le logiciel SAS. Dans ce modèle, L10R désigne les logarithmes décimaux des rendements, B, T et V les facteurs blocs, traitements et variétés, V\*B l'interaction variétés-blocs, qui correspond à la « variation résiduelle 1 », et V\*T l'interaction variétés-traitements.

On peut remarquer que la « variation résiduelle 2 » n'apparaît pas dans le code, cette source de variation étant en fait considérée comme un résidu obtenu par différence. En outre, il y a lieu de préciser chaque fois comment les tests doivent être réalisés, ce qui peut être fait à l'aide d'une instruction « *random* » pour Minitab et « *test* » pour SAS.

Quant au logiciel R, la formulation peut être :

$$L10R \sim V*T + \text{Error}(B + B:V),$$

en relation avec la fonction « *aov* ». L'écriture V\*T désigne ici à la fois les facteurs V et T et leur interaction, tandis que B:V représente la seule interaction de B et V, le terme « Error » étant relatif à la procédure de réalisation des tests.

Il faut noter aussi que, pour les logiciels R et SAS, les symboles B, T et V doivent être définis comme étant des facteurs, et non pas des variables (respectivement par des instructions « *factor* » et « *class* »).

De plus, pour les trois logiciels, d'autres commandes, procédures ou fonctions, liées notamment au modèle linéaire mixte (§ 12.4.4), pourraient aussi être utilisées.

Ces dernières remarques, de même que les remarques relatives à la réalisation des tests, s'appliquent tout autant à d'autres exemples présentés plus loin.

## 7.5 Exemple 2 : expérience en blocs aléatoires complets et bandes croisées

### 7.5.1 Présentation et données

#### 1° Présentation générale

L'exemple que nous envisageons ici est issu d'un projet de coopération entre la Tunisie et la Belgique, dont le but essentiel était l'amélioration de l'élevage

bovin [ANTOINE *et al.*, 1976]. Dans ce cadre, de nombreuses expériences relatives aux cultures fourragères devaient évidemment être réalisées, sans toutefois que ces expériences ne deviennent trop complexes et ne prennent une place trop importante dans l'ensemble des activités.

D'une façon plus particulière, l'objectif de l'expérience que nous prenons en considération est de comparer différents mélanges de plantes fourragères (avoine et vesce), associés à deux doses d'engrais azoté (30 et 60 unités d'azote par hectare).

Les différents mélanges étudiés sont définis dans le tableau 7.5.1, les lettres A, B et C désignant trois variétés différentes d'avoine. On notera que ces mélanges peuvent être considérés comme constituant un ensemble factoriel  $4 \times 2$ , qui fait intervenir d'une part les variétés d'avoine (variétés A, B et C, et mélange A-B), et d'autre part les proportions d'avoine et de vesce (50-50 et 25-75)

**Tableau 7.5.1.** Comparaison de différents mélanges fourragers associés à deux doses d'engrais azoté : définition des objets (pourcentages d'avoine et de vesce).

| Mélanges | Avoine |      |    | Vesce |
|----------|--------|------|----|-------|
|          | A      | B    | C  |       |
| 1        | 50     | –    | –  | 50    |
| 2        | 25     | –    | –  | 75    |
| 3        | –      | 50   | –  | 50    |
| 4        | –      | 25   | –  | 75    |
| 5        | –      | –    | 50 | 50    |
| 6        | –      | –    | 25 | 75    |
| 7        | 25     | 25   | –  | 50    |
| 8        | 12,5   | 12,5 | –  | 75    |

## 2° Dispositif expérimental et données

Les parcelles ont une étendue totale de 8 m sur 20 m, dont une partie seulement est pesée à la récolte.

Dans l'optique de l'organisation d'expériences très simples, deux répétitions sont prévues et les « traitements » (mélanges de semences et engrais) sont appliqués en bandes croisées. À cette fin, chaque répétition est divisée dans un sens en huit bandes, auxquelles sont affectés au hasard les huit mélanges de semences, et dans l'autre sens en deux bandes, auxquelles sont affectées au hasard les deux doses d'engrais.

La figure 7.5.1 donne une représentation schématique du dispositif expérimental qui a été adopté, ainsi que les résultats obtenus, exprimés en tonnes de matière sèche par hectare.

Il faut noter qu'en choisissant un tel dispositif expérimental, on doit savoir avant d'entamer l'expérience, sur la seule base de la répartition des nombres de

|        |      |      |      |      |       |      |      |        |      |      |      |      |      |      |      |
|--------|------|------|------|------|-------|------|------|--------|------|------|------|------|------|------|------|
| 62     | 42   | 12   | 82   | 52   | 72    | 22   | 32   | 71     | 51   | 81   | 11   | 31   | 41   | 61   | 21   |
| 5,79   | 8,67 | 7,97 | 7,61 | 8,69 | 10,61 | 7,72 | 8,78 | 6,68   | 9,61 | 3,55 | 4,83 | 4,32 | 7,25 | 5,30 | 3,89 |
| 61     | 41   | 11   | 81   | 51   | 71    | 21   | 31   | 72     | 52   | 82   | 12   | 32   | 42   | 62   | 22   |
| 6,03   | 7,16 | 4,92 | 4,63 | 7,70 | 6,36  | 6,14 | 5,79 | 5,52   | 5,81 | 5,07 | 8,16 | 9,12 | 8,85 | 5,57 | 6,19 |
| Bloc 1 |      |      |      |      |       |      |      | Bloc 2 |      |      |      |      |      |      |      |

**Figure 7.5.1.** Comparaison de différents mélanges fourragers associés à deux doses d’engrais azoté : plan de l’expérience (numéros des mélanges de semences et des doses d’engrais) et rendements observés, en tonnes par ha.

degrés de liberté, que le facteur engrais sera considéré avec une très faible précision (distribution  $F$  de FISHER-SNEDECOR à 1 et 1 degré de liberté), tandis que le facteur mélanges fourragers et son interaction avec le facteur engrais seront connus dans de meilleures conditions (distribution  $F$  à 7 et 7 degrés de liberté, dans les deux cas).

## 7.5.2 Analyse des résultats<sup>14</sup>

### 1° Examen préliminaire

Une représentation graphique des rendements observés est donnée par la figure 7.5.2. Comme dans l’exemple précédent, cette figure met en évidence la grande variabilité des observations, dont les valeurs extrêmes sont égales à 3,55 et 10,61 t/ha (soit un rapport de 1 à 3), la moyenne générale étant égale à 6,70 t/ha.

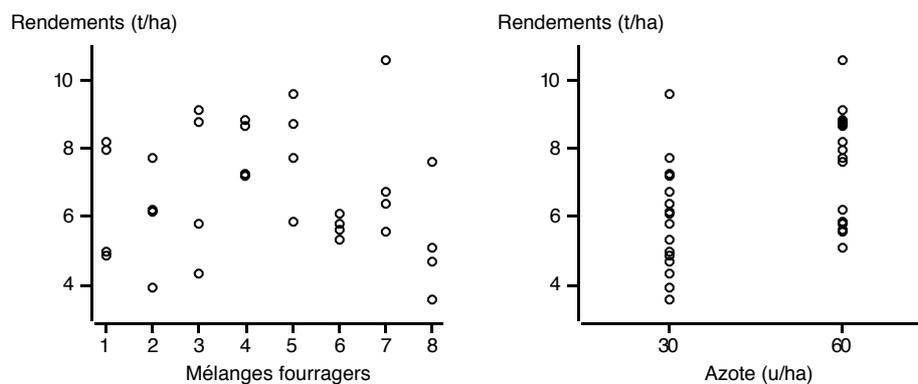
On observe en outre des différences, à première vue difficiles à interpréter, entre les mélanges fourragers, ainsi qu’une certaine influence du facteur fumures.

Comme dans l’exemple précédent également, en fonction notamment de l’hétérogénéité des rendements observés, une transformation logarithmique (logarithmes décimaux) a été appliquée aux données initiales.

### 2° Première analyse de la variance

Les résultats de l’analyse de la variance, présentés comme dans le tableau 7.2.3, sont donnés dans le tableau 7.5.2.

<sup>14</sup> Un traitement complet de cet exemple à l’aide du logiciel R est présenté à l’adresse <[www.dagnelie.be/docexr/exp075/exp075.htm](http://www.dagnelie.be/docexr/exp075/exp075.htm)>.



**Figure 7.5.2.** Comparaison de différents mélanges fourragers associés à deux doses d'engrais azoté : représentation graphique de l'influence des deux facteurs.

**Tableau 7.5.2.** Comparaison de différents mélanges fourragers associés à deux doses d'engrais azoté : tableau d'analyse de la variance.

| Sources de variation | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | $F$    | P     |
|----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|--------|-------|
| Mélanges fourragers  | 7                 | 0,136850                     | 0,019550      | 4,77 * | 0,028 |
| Blocs                | 1                 | 0,037397                     | 0,037397      |        |       |
| Mélanges-blocs       | 7                 | 0,028719                     | 0,004103      |        |       |
| Azote                | 1                 | 0,096953                     | 0,096953      | 28,4   | 0,12  |
| Azote-blocs          | 1                 | 0,003408                     | 0,003408      |        |       |
| Mélanges-azote       | 7                 | 0,090646                     | 0,012949      | 1,91   | 0,21  |
| Mélanges-azote-blocs | 7                 | 0,047413                     | 0,006773      |        |       |
| Totaux               | 31                | 0,441386                     |               |        |       |

Le facteur mélanges fourragers apparaît comme significatif, au niveau de probabilité 0,05, tandis que le facteur azote apparaît comme non significatif, bien que la valeur de la variable  $F$  de FISHER-SNEDECOR soit très élevée, et l'interaction des deux facteurs n'est pas significative non plus.

### 3° Deuxième analyse de la variance

Comme les carrés moyens des trois interactions dans lesquelles intervient le facteur blocs sont du même ordre de grandeur (0,004103, 0,003408 et 0,006773), il peut se justifier de les regrouper en une seule composante de variation « résiduelle ». Cette façon de procéder revient en fait à considérer a posteriori l'expérience comme si elle avait été réalisée en blocs aléatoires complets de manière tout à fait classique. C'est aussi constater que, contrairement au principe général des expériences en

bandes croisées, l'inférence relative aux deux facteurs considérés n'est pas caractérisée ici par une précision ou une puissance moindre que l'interaction des deux facteurs.

D'autre part, il est utile de subdiviser la somme des carrés des écarts du facteur mélanges fourragers, de manière à individualiser ses deux composantes (proportions d'avoine et de vesce et variétés d'avoine) et leur interaction. Une décomposition semblable peut aussi être réalisée pour l'interaction mélanges-azote.

Le tableau 7.5.3 donne les résultats de l'analyse de la variance, tels qu'ils se présentent après ces diverses modifications.

**Tableau 7.5.3.** Comparaison de différents mélanges fourragers associés à deux doses d'engrais azoté : tableau d'analyse de la variance, après regroupement des composantes « résiduelles » et subdivision des composantes mélanges et mélanges-azote.

| Sources de variation | Degrés de liberté | S. des carrés des écarts | Carrés moyens | F        | P      |
|----------------------|-------------------|--------------------------|---------------|----------|--------|
| Mélanges fourragers  | 7                 | 0,136850                 | 0,019550      | 3,69 *   | 0,016  |
| Proportions d'avoine | 1                 | 0,030384                 | 0,030384      | 5,73 *   | 0,030  |
| Variétés d'avoine    | 3                 | 0,040384                 | 0,013461      | 2,54     | 0,096  |
| Proportions-variétés | 3                 | 0,066082                 | 0,022027      | 4,15 *   | 0,025  |
| Azote                | 1                 | 0,096953                 | 0,096953      | 18,3 *** | 0,0007 |
| Mélanges-azote       | 7                 | 0,090646                 | 0,012949      | 2,44     | 0,069  |
| Proportions-azote    | 1                 | 0,000156                 | 0,000156      | 0,03     | 0,87   |
| Variétés-azote       | 3                 | 0,063962                 | 0,021321      | 4,02 *   | 0,028  |
| Prop.-variétés-azote | 3                 | 0,026528                 | 0,008843      | 1,67     | 0,22   |
| Blocs                | 1                 | 0,037397                 | 0,037397      |          |        |
| Variation résiduelle | 15                | 0,079540                 | 0,005303      |          |        |
| Totaux               | 31                | 0,441386                 |               |          |        |

#### 4° Interprétation

L'élément le plus frappant, à l'examen du tableau 7.5.3, est le fait que le facteur azote, qui n'était pas significatif avec une base de comparaison égale à 0,003408 et un degré de liberté (tableau 7.5.2), devient très hautement significatif avec une base de comparaison légèrement supérieure (0,005303) et 15 degrés de liberté. Ceci souligne l'importance qu'il faut toujours accorder à l'existence, dans toute la mesure du possible, d'un nombre suffisant de degrés de liberté pour les carrés moyens qui servent de bases de comparaison.

D'autre part, il apparaît que les différences entre mélanges fourragers sont liées au facteur proportions d'avoine et de vesce et à l'interaction de ce facteur avec le facteur variétés d'avoine. Et en outre, une interaction significative variétés-azote apparaît également.

En ce qui concerne la fumure azotée, en procédant comme au paragraphe 7.4.2.3°, à partir des moyennes relatives aux deux niveaux, on obtient :

$$0,86542 - 0,75533 \pm 2,131 \sqrt{2(0,005303)/16} = 0,11009 \pm 0,05487 \\ = 0,05522 \text{ et } 0,16496.$$

En négligeant la légère interaction variétés-azote, l'accroissement de rendement lié aux 30 unités supplémentaires d'azote par hectare peut donc être estimé globalement à 29 %, avec des limites de confiance égales à 14 et 46 %.

Quant aux facteurs proportions d'avoine et de vesce et variétés, ils s'avèrent plus difficiles à interpréter.

Le tableau 7.5.4 présente les moyennes relatives aux huit mélanges fourragers, en distinguant les deux proportions d'avoine et de vesce et les quatre variétés ou mélange de variétés d'avoine, et cela tant pour les données transformées que pour les données initiales.

**Tableau 7.5.4.** Comparaison de différents mélanges fourragers associés à deux doses d'engrais azoté : moyennes relatives aux différents mélanges fourragers, pour les données transformées (logarithmes décimaux) et pour les données initiales (t/ha).

| Proport. | Variétés |       |       |       |
|----------|----------|-------|-------|-------|
|          | A        | B     | C     | A-B   |
| 50-50    | 0,797    | 0,825 | 0,893 | 0,849 |
| 25-75    | 0,764    | 0,900 | 0,753 | 0,701 |
| 50-50    | 6,47     | 7,00  | 7,95  | 7,29  |
| 25-75    | 5,98     | 7,98  | 5,67  | 5,22  |

Ce tableau montre que l'interaction proportions-variétés résulte largement d'une différence de comportement de la variété B, par comparaison avec les deux autres variétés et avec le mélange A-B (rendement plus élevé de la proportion 25-75 pour la variété B, contrairement aux trois autres cas). Ce tableau montre aussi que le comportement et les rendements du mélange A-B sont loin d'être intermédiaires entre ceux des variétés A et B considérées séparément.

La poursuite éventuelle de l'interprétation de ces résultats devrait être fonction de l'objectif précis qui a été (ou qui aurait dû être) fixé au départ. On peut en effet, par exemple, soit essayer d'approfondir l'analyse des facteurs et de leur interaction, soit rechercher le « meilleur » mélange de semences, au sens notamment de la méthode de GUPTA [STAT2, § 12.3.3].

On pourrait aussi examiner de la même manière l'interaction variétés-azote, qui s'avère légèrement significative.

### ⊖ 5° Codification des modèles d'analyse de la variance

En ce qui concerne la première analyse de la variance (tableau 7.5.2), le code relatif aux logiciels Minitab et SAS (commandes ou procédures « *anova* » ou « *gjm* ») est :

$$L10R = M \ B \ M*B \ A \ A*B \ M*A ,$$

L10R désignant les logarithmes décimaux des rendements, et A, B et M les facteurs azote, blocs et mélanges fourragers.

La distinction par rapport au cas des parcelles divisées (§ 7.4.2.6°) est l'introduction de l'interaction du deuxième facteur (A) et du facteur blocs (B), c'est-à-dire la « variation résiduelle 2 », l'interaction des trois facteurs (« variation résiduelle 3 »), qui doit être calculée par différence, n'apparaissant pas dans le code.

Quant à la deuxième analyse de la variance (tableau 7.5.3), elle peut être réalisée en adoptant l'écriture :

$$L10R = P \ V \ P*V \ A \ P*A \ V*A \ P*V*A \ B ,$$

P et V désignant en outre les proportions et les variétés d'avoine.

En ce qui concerne la fonction « *aov* » du logiciel R, les codes correspondants peuvent être, d'une façon moins explicite, pour la première analyse :

$$L10R \sim M*A + \text{Error}(M*A*B - M*A),$$

et de façon très condensée, pour la deuxième analyse :

$$L10R \sim P*V*A + B .$$

Rappelons en outre que diverses remarques formulées au paragraphe 7.4.2.6° s'appliquent également à cet exemple et à d'autres exemples ultérieurs.

## Chapitre 8

# Les expériences en carré latin et avec permutation des objets (*cross-over*)

### Sommaire

- 8.1 Principes**
  - 8.1.1 Le carré latin
  - 8.1.2 Le dispositif avec permutation des objets (*cross-over*)
- 8.2 Analyse des résultats**
  - 8.2.1 Le carré latin
  - 8.2.2 Le dispositif avec permutation des objets (*cross-over*)
  - ⊖ 8.2.3 Notions complémentaires
- 8.3 Discussion**
- ⊖ **8.4 Quelques cas particuliers et extensions du carré latin**
- 8.5 Exemple 1 : expérience en carré latin**
  - 8.5.1 Présentation et données
  - 8.5.2 Analyse des résultats
- 8.6 Exemple 2 : expérience avec permutation des objets (*cross-over*)**
  - 8.6.1 Présentation et données
  - 8.6.2 Analyse des résultats

## 8.1 Principes

### 8.1.1 Le carré latin

#### 1° Expériences en champ

En ce qui concerne les expériences en champ, toujours au sens large, on appelle *carré latin*<sup>1</sup> un dispositif qui est constitué d'un nombre de parcelles égal à un carré (9, 16, 25, ...), qui comporte autant de lignes de parcelles que de colonnes de parcelles, et au sein duquel chaque objet est présent une et une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne.

La figure 8.1.1 en donne un exemple. Au vu de cette figure, on observe que ni les parcelles, ni l'ensemble du champ d'expérience ne doivent cependant être des carrés.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 4 |
| 1 | 4 | 3 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |

**Figure 8.1.1.** Exemple de carré latin  $4 \times 4$ .

Les *lignes*<sup>2</sup> et les *colonnes*<sup>3</sup> d'un carré latin constituent en quelque sorte un double réseau de blocs complets, perpendiculaires les uns aux autres et conduisant à un double contrôle de l'hétérogénéité du matériel expérimental<sup>4</sup>.

#### 2° Autres situations

Comme dans le cas des blocs aléatoires complets (§ 6.1.2), le contrôle de la variabilité qui concerne le carré latin peut être étendu à de nombreuses situations autres que les expériences en champ.

Ainsi, en expérimentation humaine comme en expérimentation animale, les lignes peuvent correspondre à des périodes différentes et les colonnes à des patients ou à des animaux différents, le dispositif étant tel que chacun des objets (traitements thérapeutiques ou alimentations, par exemple) soit considéré une et une seule fois au cours de chacune des périodes et une et une seule fois pour chacun des patients ou des animaux.

<sup>1</sup> En anglais : *Latin square*.

<sup>2</sup> En anglais : *row*.

<sup>3</sup> En anglais : *column*.

<sup>4</sup> L'utilisation française du mot « contrôle », qui est faite ici et qui est courante en expérimentation, est relativement impropre, dans la mesure où il s'agit bien plus de réduire ou de « maîtriser » que de « contrôler » la variabilité ou l'hétérogénéité du matériel expérimental.

De même, dans une expérience industrielle ou de laboratoire, les lignes et les colonnes peuvent correspondre par exemple à des opérateurs ou des ouvriers, à des appareils de mesure ou des machines, à des périodes de travail, etc., l'expérience étant toujours organisée de telle sorte que chacun des objets soit associé une et une seule fois à chacun des éléments qui correspondent aux lignes et aux colonnes.

D'une manière générale, le carré latin permet ainsi de prendre en considération simultanément trois facteurs. Dans l'exemple fort ancien de CRETTE DE PALLUEL, qui a été évoqué dans l'introduction générale, au facteur essentiel alimentations, étaient associés un facteur races et un facteur dates d'abattage. Les 16 moutons considérés appartenaient en effet à quatre races différentes et, à chacune des quatre dates, étaient abbatu un mouton de chacune des quatre races et un mouton correspondant à chacune des quatre alimentations. La figure 8.1.1 illustre parfaitement cette situation, si on considère par exemple que les lignes sont relatives aux dates d'abattage, les colonnes aux races, et les chiffres 1 à 4 aux alimentations.

On notera toutefois que, dans de telles conditions, le carré latin ne permet pas d'étudier les interactions qui peuvent exister entre les différents facteurs.

En outre, dans un champ d'expérience qui présenterait un gradient de fertilité important dans une seule direction, ou dans un laboratoire où on pourrait craindre que les conditions d'expérience évoluent de façon sensible au cours du temps, ainsi que dans d'autres situations semblables, toutes les unités expérimentales (parcelles, périodes de travail, etc.) peuvent être juxtaposées selon cette seule tendance générale, tout en constituant néanmoins un carré latin. La figure 8.1.2 illustre cette possibilité dans le cas d'une expérience en champ, en reprenant côte à côte les différentes lignes de la figure 8.1.1 et, aussi, en modifiant la forme des parcelles.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 4 | 1 | 4 | 3 | 2 | 4 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 4 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

**Figure 8.1.2.** Exemple de carré latin  $4 \times 4$  dont les unités expérimentales sont disposées de façon linéaire.

Ce dispositif pourrait correspondre également à quatre journées de travail, au cours de chacune desquelles quatre essais ou manipulations sont effectués, de telle sorte que les quatre objets considérés interviennent chacun à leur tour en début de journée, chacun à leur tour en deuxième position, etc. Une telle approche permettrait de tenir compte à la fois des différences entre les journées et des différences qui pourraient exister au cours des différentes journées.

### 3° Randomisation

En particulier, on appelle *carré latin de base*<sup>5</sup> un carré latin dans lequel les objets sont rangés par ordre numérique croissant (ou par ordre alphabétique) dans la première ligne et dans la première colonne.

L'étude des carrés latins sous l'angle de l'analyse combinatoire permet de montrer qu'il n'existe qu'un seul carré latin de base de type  $3 \times 3$ , quatre carrés latins de base distincts de type  $4 \times 4$ , 56 carrés latins de base de type  $5 \times 5$ , etc. Des tables relativement complètes en sont données notamment par FISHER et YATES [1982]. Et en annexe, la table 2 en fournit aussi quelques exemples.

La répartition aléatoire des objets peut se faire ici en choisissant « au hasard » un carré latin de base de la dimension souhaitée, et en permutant ensuite de façon aléatoire, d'une part les différentes lignes, et d'autre part les différentes colonnes.

### 8.1.2 Le dispositif avec permutation des objets (*cross-over*)

Le dispositif expérimental avec *permutation des objets*<sup>6</sup> peut être considéré comme résultant de la juxtaposition de deux ou plusieurs carrés latins, choisis indépendamment l'un de l'autre, et de la permutation aléatoire de l'ensemble des lignes et de l'ensemble des colonnes. La figure 8.1.3 en donne un exemple.

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 3 | 4 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 4 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| 1 | 4 | 2 | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 |

**Figure 8.1.3.** Exemple de dispositif avec permutation des objets.

Dans un tel dispositif, on retrouve chacun des objets une et une seule fois dans chacune des colonnes et un même nombre de fois, supérieur à un, dans chacune des lignes.

Il est évident qu'ici également, les lignes et les colonnes peuvent être tout autre chose que des rangées de parcelles contiguës dans un champ. En particulier, le dispositif avec permutation des objets est largement utilisé en expérimentation humaine et en expérimentation animale, où le nombre de patients ou d'animaux susceptibles d'être pris en considération dépasse en général largement le nombre de traitements qu'on peut appliquer en séquence à chacun d'eux, dans des conditions suffisantes d'homogénéité. Comme ci-dessus, les patients ou les animaux sont alors généralement associés aux colonnes et les périodes aux lignes du dispositif.

<sup>5</sup> En anglais : *standard Latin square*.

<sup>6</sup> En anglais : *cross-over, change-over, switch-over*.

De manière plus particulière encore, le dispositif qui fait intervenir *deux objets et deux périodes*<sup>7</sup> figure parmi les plus employés en expérimentation humaine, pour comparer un traitement à un placebo ou deux traitements entre eux.

La randomisation des expériences avec permutation des objets peut être réalisée comme celle des expériences en carré latin.

## 8.2 Analyse des résultats

### 8.2.1 Le carré latin

#### 1° Analyse de la variance

L'analyse de la variance relative aux expériences en carré latin qui comportent au départ un seul facteur, auquel s'ajoutent un facteur lignes et un facteur colonnes, est une analyse à trois critères de classification d'un type particulier. Ainsi que nous l'avons déjà signalé (§ 8.1.1.2°), le dispositif en question a en effet comme caractéristique d'exclure toute possibilité d'estimation des interactions qui pourraient exister entre les différents facteurs.

Quand on ne dispose que d'une seule observation par parcelle ou par unité expérimentale, l'analyse de la variance ne fait donc intervenir que les trois facteurs et une composante résiduelle. Le tableau 8.2.1 présente la répartition des nombres de degrés de liberté dans le cas général d'un carré latin  $p \times p$  et dans le cas particulier de la figure 8.1.1.

**Tableau 8.2.1.** Schéma de l'analyse de la variance relative aux expériences en carré latin, dans le cas général  $p \times p$  et dans le cas particulier  $4 \times 4$ .

| Sources de variation | Degrés de liberté |    |
|----------------------|-------------------|----|
| Objets               | $p - 1$           | 3  |
| Lignes               | $p - 1$           | 3  |
| Colonnes             | $p - 1$           | 3  |
| Variation résiduelle | $(p - 1)(p - 2)$  | 6  |
| Totaux               | $p^2 - 1$         | 15 |

#### 2° Modèle mathématique et test d'additivité

Le modèle mathématique sous-jacent peut s'écrire [STAT2, § 11.2.3] :

$$X_{ijk} - m_{...} = a_i + b_j + c_k + D_{ijk},$$

<sup>7</sup> En anglais : *two-treatment two-period cross-over*.

$a_i$ ,  $b_j$  et  $c_k$  désignant les effets des trois facteurs, et  $D_{ijk}$  la composante résiduelle ( $i, j$  et  $k = 1, \dots, p$ ). Ce modèle implique l'additivité des effets des trois facteurs.

Par analogie notamment avec le cas des blocs aléatoires complets, quand les facteurs lignes et colonnes sont aléatoires, l'hypothèse d'additivité n'est pas restrictive et le facteur objets peut être testé sans problème par rapport à la variation résiduelle.

Par contre, quand les facteurs lignes et colonnes (ou l'un d'entre eux) sont fixes, l'hypothèse d'additivité est plus contraignante. Cette hypothèse doit alors être vérifiée par la réalisation d'un *test d'additivité* ou *test de TUKEY*<sup>8</sup>, semblable à celui qui peut intervenir aussi dans le cas des expériences en blocs aléatoires complets [STAT2, § 10.3.6].

[ Ce test peut être réalisé en calculant la composante de non-additivité [TUKEY, 1955] :

$$\text{SCE}_{add} = \left( \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p [d_{ijk} (x_{ijk} - d_{ijk})^2] \right)^2 / \text{SCE}_r (x_{ijk} - d_{ijk})^2,$$

dans laquelle  $d_{ijk}$  désigne les résidus de l'analyse de la variance et la quantité  $\text{SCE}_r (x_{ijk} - d_{ijk})^2$  est la somme des carrés des écarts résiduelle de l'analyse de la variance qui peut être réalisée sur les valeurs  $(x_{ijk} - d_{ijk})^2$ . On peut remarquer que la sommation ne porte que sur deux des trois indices, puisque deux indices suffisent pour prendre en considération l'ensemble des  $p^2$  observations.

La somme des carrés des écarts ainsi obtenue, à un degré de liberté, doit être soustraite de la somme des carrés des écarts résiduelle et comparée au carré moyen [ résiduel qui peut alors être recalculé avec  $(p-1)(p-2) - 1$  degrés de liberté.

### ⊖ 3° Carré latin et expériences factorielles fractionnaires

Principalement quand les trois facteurs sont fixes, les expériences en carré latin peuvent être considérées comme étant des expériences factorielles fractionnaires (§ 2.3.3). Il s'agit en effet de fractions  $1/p$  d'expériences  $p^3$ , c'est-à-dire aussi d'expériences de type  $p^{3-1}$ .

Ainsi, dans le cas de la figure 8.1.1, l'expérience qui comporte trois facteurs, chacun à quatre modalités, et qui ne fait intervenir que 16 unités expérimentales, correspond au quart d'une expérience  $4^3$  et est donc de type  $4^{3-1}$ . De telles expériences sont de résolution III (§ 2.3.3.7°), ce qui corrobore le fait que les interactions ne peuvent pas être identifiées.

En supposant que chacun des trois facteurs de la figure 8.1.1 résulte lui-même de la combinaison factorielle de deux facteurs à deux modalités, l'expérience peut aussi être considérée comme étant de type  $2^{6-2}$ , c'est-à-dire comme le quart d'une expérience factorielle  $2^6$ . Cette situation est envisagée notamment par COPELAND et NELSON [2000].

<sup>8</sup> En anglais : *test of additivity*, TUKEY's *test*.

## 8.2.2 Le dispositif avec permutation des objets (*cross-over*)

### 1° Analyse de la variance

Pour le dispositif avec permutation des objets, l'analyse de la variance est une extension de celle qui concerne le carré latin. Le tableau 8.2.2 en donne le schéma dans le cas général de  $p$  lignes et  $k p$  colonnes ou, ce qui est équivalent, de  $p$  objets et  $r$  répétitions ( $r = k p$ ), et dans le cas particulier de la figure 8.1.3.

**Tableau 8.2.2.** Schéma de l'analyse de la variance relative aux expériences avec permutation des objets, dans le cas général  $p \times k p$  (ou  $r$ ) et dans le cas particulier  $4 \times 8$ .

| Sources de variation | Degrés de liberté                      |    |
|----------------------|--|----|
| Objets               | $p - 1$                                | 3  |
| Lignes               | $p - 1$                                | 3  |
| Colonnes             | $k p - 1$ ou $r - 1$                   | 7  |
| Variation résiduelle | $(p - 1)(k p - 2)$ ou $(p - 1)(r - 2)$ | 18 |
| Totaux               | $k p^2 - 1$ ou $p r - 1$               | 31 |

Les mêmes remarques que ci-dessus peuvent être formulées quant aux tests d'hypothèses et aux problèmes d'additivité.

### ⊖ 2° Cas particulier de deux objets

L'analyse des résultats peut être réalisée de façon beaucoup plus simple dans le cas particulier de deux objets et deux lignes (le plus souvent deux périodes). On peut en effet montrer que, dans ces conditions, le test  $F$  de l'analyse de la variance à trois critères de classification qui concerne le facteur objets peut être remplacé par un test  $t$  d'égalité de deux moyennes ou par un test  $F$  d'analyse de la variance à un critère de classification, comparant les deux groupes de colonnes et portant sur les différences entre les lignes (première ligne – deuxième ligne ou deuxième ligne – première ligne).

## ⊖ 8.2.3 Notions complémentaires

### 1° Effets résiduels et interactions entre les objets

Quand différents traitements sont appliqués consécutivement aux mêmes individus, on peut craindre que les résultats de l'expérience soient affectés par l'existence d'éventuels *effets résiduels*<sup>9</sup> des traitements au cours des périodes successives ou par l'existence d'éventuelles interactions entre les traitements successifs.

<sup>9</sup> En anglais : *residual effect, carry-over effect*.

Des difficultés de ce type se présentent principalement dans le cas des expériences avec permutation des objets, mais peuvent aussi intervenir en ce qui concerne les expériences en carré latin.

Au niveau de la planification des expériences, une première précaution consiste à choisir des dispositifs *équilibrés pour les effets résiduels*<sup>10</sup>. On qualifie ainsi les dispositifs dans lesquels chacun des objets est suivi un même nombre de fois par chacun des autres objets.

Tel est le cas pour le plan de la figure 8.1.3, mais il n'en est pas ainsi pour le carré latin de la figure 8.1.1. Ce carré latin pourrait toutefois être rendu équilibré pour les effets résiduels en en permutant les deux dernières lignes.

Les dispositifs équilibrés permettent de séparer les effets directs ou immédiats des différents objets au cours des différentes périodes, des effets résiduels relatifs aux périodes ultérieures. L'analyse de la variance qui fait intervenir à la fois les effets directs et les effets résiduels est toutefois non orthogonale (§ 12.4.1). Le paragraphe 8.6.2 en donne un exemple.

Des dispositifs *presque équilibrés*<sup>11</sup> ont également été proposés pour faire face à certains situations particulières, de même que l'existence d'éventuels effets résiduels multiplicatifs ou proportionnels aux effets directs a aussi été envisagée.

Des informations complémentaires relatives à ces diverses possibilités sont données notamment par BAILEY et KUNERT [2006], BATE et JONES [2008], BOSE et STUFKEN [2007], et PARK *et al.* [2011].

## 2° Autres méthodes d'analyse

D'autres méthodes que l'analyse de la variance classique ont été envisagées pour prendre en compte l'existence d'effets résiduels, d'éventuelles interactions entre les effets directs et les effets résiduels, et les possibles non-indépendances des résidus de l'analyse. Ces méthodes font appel notamment à des concepts tels que l'étude des observations successives et l'analyse de la variance à plusieurs variables (§ 11.2.2 et 12.4.5) [CHEN *et al.*, 2002 ; CHEN et WEI, 2003 ; GOAD et JOHNSON, 2000].

D'autre part, diverses méthodes non paramétriques et robustes ont été proposées pour faire face à des situations qui ne permettraient pas l'utilisation de l'analyse de la variance [ÖHRVIK, 1998 ; PUTT et CHINCHILLI, 2004 ; TARDIF *et al.*, 2005]. En particulier, dans le cas du dispositif avec permutation des objets qui ne fait intervenir que deux modalités, le test *t* et l'analyse de la variance à un critère de classification peuvent être remplacés par les méthodes de MANN et WHITNEY ou de KRUSKAL et WALLIS [STAT2, § 8.4.3 et 9.3.6].

On notera enfin que, d'une manière générale, la littérature relative aux expériences avec permutation des objets est particulièrement abondante. On peut citer

<sup>10</sup> En anglais : *balanced for carry-over effects, uniform-balanced design.*

<sup>11</sup> En anglais : *nearly balanced design.*

notamment certains livres spécialisés, tels ceux de JONES et KENWARD [2003] et SENN [2002b].

## 8.3 Discussion

### 1° Avantages et inconvénients

Du fait de leur double contrôle de la variabilité du matériel expérimental, les expériences en carré latin et avec permutation des objets sont généralement plus efficaces que les expériences complètement aléatoires et en blocs aléatoires complets.

Mais le carré latin souffre de deux limitations relativement importantes. D'une part, pour trois objets, le nombre de degrés de liberté de la variation résiduelle est égal à 2 seulement, ce qui est extrêmement faible, et pour quatre objets, il est égal à 6, ce qui est encore fort peu. D'autre part, le nombre d'objets est nécessairement égal au nombre de répétitions (et au nombre de lignes et de colonnes) et ce nombre dépasse rarement 8 ou 10 dans la majorité des expériences. En conséquence, la gamme d'utilisations possibles du carré latin se limite le plus souvent à 5, 6, 7 ou 8 objets, éventuellement 4 et parfois plus de 8.

Il en résulte que le carré latin est en réalité relativement peu utilisé, alors que le dispositif avec permutation des objets est au contraire largement employé, principalement, comme nous l'avons signalé, dans le domaine de la recherche médicale et relative aux animaux.

### 2° Efficacité relative

Diverses efficacités relatives peuvent être calculées dans le cas du carré latin et du dispositif avec permutation des objets, comme pour les blocs aléatoires complets et les parcelles divisées (§ 6.3.2°, 6.3.3° et 7.3.4°).

Il s'agit ici de deux efficacités relatives par rapport à des expériences en blocs aléatoires complets, si on néglige le facteur lignes *ou* le facteur colonnes, et d'une efficacité relative par rapport au dispositif complètement aléatoire, si on néglige à la fois le facteur lignes *et* le facteur colonnes.

Ces efficacités relatives sont souvent fort élevées, ce qui souligne l'intérêt des dispositifs considérés ici, quand ils sont applicables. GARCIA *et al.* [2004] signalent par exemple des efficacités relatives de l'ordre de 400 à 1.000 %, dans le domaine médical. Ces ordres de grandeur correspondent à ceux qui apparaissent dans les exemples des paragraphes 8.5 et 8.6.

### 3° Données manquantes

Les éventuelles données manquantes peuvent être estimées selon une procédure analogue à celle qui concerne les blocs aléatoires complets [STAT2, § 10.4.3]. Par

extension, on a en effet, pour le carré latin :

$$\hat{x}_{ijk} = [p(X'_{i..} + X'_{.j.} + X'_{..k}) - 2X'_{...}] / [(p-1)(p-2)],$$

et pour le dispositif avec permutation des objets :

$$\hat{x}_{ijk} = [p(X'_{i..} + X'_{.j.}) + kpX'_{..k} - 2X'_{...}] / [(p-1)(kp-2)],$$

$X'_{i..}$ ,  $X'_{.j.}$  et  $X'_{..k}$  étant dans les deux cas les sommes relatives respectivement aux différents objets, aux différentes lignes et aux différentes colonnes, et  $X'_{...}$  étant la somme générale.

Il faut noter aussi que, contrairement aux expériences en blocs aléatoires complets, les expériences en carré latin et avec permutation des objets ne permettent pas d'éliminer un ou plusieurs objets ou une ou plusieurs lignes ou colonnes (ou répétitions) sans modifier la nature même du dispositif expérimental.

## ⊖ 8.4 Quelques cas particuliers et extensions du carré latin

### 1° Carré gréco-latin

Divers cas particuliers et diverses extensions du concept de carré latin, autres que le dispositif avec permutation des objets, ont été définis. On peut citer en premier lieu le *carré gréco-latin*<sup>12</sup>.

La figure 8.4.1 en illustre le principe. Les lettres latines y définissent un carré latin en tout point semblable à celui de la figure 8.1.1. De même, les lettres grecques y présentent un autre carré latin, à première vue indépendant du premier, et toujours semblable à celui de la figure 8.1.1. Mais on peut remarquer en outre que, dans l'ensemble du dispositif, chacune des lettres latines est associée une et une seule fois à chacune des lettres grecques.

|            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
| D $\gamma$ | A $\delta$ | B $\alpha$ | C $\beta$  |
| C $\alpha$ | B $\beta$  | A $\gamma$ | D $\delta$ |
| A $\beta$  | D $\alpha$ | C $\delta$ | B $\gamma$ |
| B $\delta$ | C $\gamma$ | D $\beta$  | A $\alpha$ |

**Figure 8.4.1.** Exemple de carré gréco-latin  $4 \times 4$ .

D'une manière générale, un carré gréco-latin est un dispositif carré, quant au nombre d'unités expérimentales, qui fait intervenir deux facteurs autres que les

<sup>12</sup> En anglais : *Graeco-Latin square*.

lignes et les colonnes, dans lequel chacune des modalités de chacun des deux facteurs est présente une et une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne, et chacune des modalités d'un des facteurs est associée une et une seule fois à chacune des modalités de l'autre facteur.

Les carrés latins qui sont à la base de la constitution d'un carré gréco-latin sont dits *orthogonaux*<sup>13</sup> l'un à l'autre. On a pu démontrer qu'il n'existe pas de carrés latins orthogonaux, et donc pas de carré gréco-latin, de dimension  $6 \times 6$ , cette restriction concernant uniquement cette dimension<sup>14</sup>. On peut consulter notamment, à ce propos, l'article de COLBOURN et DINITZ [2001].

Les possibilités classiques d'utilisation du carré gréco-latin, dans le domaine agronomique, sont plus limitées encore que celles du carré latin, car l'introduction d'un facteur supplémentaire provoque une réduction plus importante du nombre de degrés de liberté de la variation résiduelle (trois degrés de liberté seulement pour un carré gréco-latin  $4 \times 4$  et huit degrés de liberté seulement pour un carré gréco-latin  $5 \times 5$ , par exemple).

Mais au même titre que le carré latin permet d'étudier simultanément trois facteurs quelconques, autres que des lignes et des colonnes de parcelles dans un champ, le carré gréco-latin peut intervenir dans l'étude de quatre facteurs quelconques, pour autant que ceux-ci présentent tous le même nombre de modalités. Dans cette optique, et par extension de ce qui a été dit au paragraphe 8.2.1.3°, un carré gréco-latin de dimension  $4 \times 4$  par exemple, tel que celui de la figure 8.4.1, peut être considéré comme un ensemble factoriel fractionnaire  $4^{4-2}$  ou  $2^{8-4}$ .

## 2° Quelques autres dispositifs carrés

Des carrés latins de divers types particuliers ont été étudiés et parfois utilisés dans certaines circonstances. La figure 8.4.2 en réunit quatre exemples, présentés sans randomisation.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |

**Figure 8.4.2.** Quelques cas particuliers de carré latin : carré latin complet, carré latin auto-orthogonal, carré latin magique et carré de VIK.

<sup>13</sup> En anglais : *orthogonal Latin squares*.

<sup>14</sup> L'absence de carré gréco-latin  $6 \times 6$  est un élément d'une conjecture due à EULER et datant de 1782, mais qui n'a été démontrée qu'en 1960 [BOSE *et al.*, 1960; ULLRICH, 2002].

Le premier exemple s'inscrit dans la ligne des dispositifs équilibrés pour les résidus (§ 8.2.3.1°). Il est tel que chacun des objets est suivi une et une seule fois par chacun des autres objets, non seulement dans les colonnes, mais aussi dans les lignes. Ces carrés latins sont qualifiés de *complets*<sup>15</sup> [FREEMAN, 1979].

Dans l'optique des carrés latins orthogonaux, le deuxième dispositif de la figure 8.4.2 est un carré latin *auto-orthogonal*<sup>16</sup>, c'est-à-dire orthogonal à lui-même, après transposition des lignes et des colonnes [HEDAYAT, 1973, 1975].

Le troisième exemple de la figure 8.4.2 superpose, aux lignes et aux colonnes d'un carré latin, un troisième réseau de blocs, de forme carrée dans le cas considéré. Ces carrés latins sont dits *magiques*<sup>17</sup> [DAGNELIE 1959; FEDERER, 1955].

Enfin, le dernier dispositif de la figure 8.4.2 est tel que chacun des objets est présent une et une seule fois, non seulement dans chaque ligne et dans chaque colonne, mais aussi dans chacune des deux diagonales ou parallèlement à chacune des deux diagonales. Ces dispositifs sont connus sous le nom de *carré de VIK* ou de Knuth VIK<sup>18</sup> [ATKIN *et al.*, 1977]<sup>19 20</sup>.

En plus de ces différents cas particuliers, on peut mentionner diverses extensions du carré latin, dont les *carrés F*<sup>21</sup>, qui sont tels que les différents objets sont présents un même nombre de fois, supérieur à un, dans chacune des lignes et chacune des colonnes du dispositif [HEDAYAT et SEIDEN, 1970], les *cubes latins*<sup>22</sup>, qui peuvent être utiles pour des expériences à réaliser dans des espaces physiquement à trois dimensions (fours, incubateurs, frigos, installations de séchage, etc.) [PREECE *et al.*, 1973], et les *hypercubes latins*<sup>23</sup>.

Le concept d'hypercube latin intervient en particulier dans les expériences qui comportent un nombre important de facteurs, dont les expériences numériques organisées sur ordinateur (§ 2.4.5) [BUTLER, 2001, 2005; STEINBERG et LIN, 2006].

Nous présenterons en outre plus loin les *carrés semi-latins* et différents types de *réseaux carrés* (§ 9.1.3 et 9.1.5).

---

<sup>15</sup> En anglais : *complete Latin square*.

<sup>16</sup> En anglais : *self-orthogonal Latin square*.

<sup>17</sup> En anglais : *magic Latin square*.

<sup>18</sup> En anglais : *VIK's square*.

<sup>19</sup> Chacun de ces types de dispositifs possède bien sûr ses propres propriétés. Ainsi par exemple, les carrés latins magiques n'existent pas pour des nombres d'objets qui sont des nombres premiers, tandis que les carrés de VIK n'existent pas pour des nombres d'objets qui sont des multiples de 2 ou de 3.

<sup>20</sup> Il est amusant de constater que les carrés latins magiques  $9 \times 9$  correspondent exactement aux grilles les plus courantes du jeu de sudoku [DAGNELIE, 2008c], et que les carrés de VIK présentent une disposition des objets qui s'identifie aux déplacements des cavaliers du jeu d'échecs.

<sup>21</sup> En anglais : *frequency square*, *F-square*.

<sup>22</sup> En anglais : *Latin cube*.

<sup>23</sup> En anglais : *Latin hypercube*.

### 3° Quelques dispositifs rectangulaires

Nous envisageons ici différents dispositifs expérimentaux qui, comme le dispositif avec permutation des objets (§ 8.1.2), ne possèdent pas le même nombre de lignes et de colonnes, mais qui se distinguent de telles expériences par le fait que les différents objets ne sont pas tous présents un même nombre de fois dans chacune des lignes et dans chacune des colonnes.

D'une manière générale, ces dispositifs peuvent être qualifiés de *dispositifs en lignes et colonnes*<sup>24</sup>. La figure 8.4.3 en présente trois exemples. Nous y ajouterons ultérieurement divers autres dispositifs, dont les *carrés latins incomplets* ou *carrés de YOUNG*, qui combinent un réseau de blocs complets et un réseau de blocs incomplets (§ 9.1.4).

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 4 |
| 1 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 3 |
| 4 | 2 | 1 | 3 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 |

**Figure 8.4.3.** Quelques exemples d'extensions « rectangulaires » du carré latin et du dispositif avec permutation des objets.

Les exemples de cette figure concernent tous les trois le cas où les lignes correspondent à différentes périodes successives et les colonnes à des individus auxquels différents traitements sont appliqués en séquence (§ 8.1.1.2° et 8.1.2). Le but poursuivi est, dans les trois cas, d'améliorer la connaissance qu'on peut avoir des effets résiduels des traitements. On peut effectivement démontrer que la simple utilisation de dispositifs équilibrés pour les effets résiduels, dont nous avons parlé au paragraphe 8.2.3.1°, conduit à une forte disparité entre la précision obtenue pour les effets directs et la précision obtenue pour les effets résiduels des objets.

Le premier exemple est un *carré latin augmenté*<sup>25</sup>, qui prévoit simplement une répétition supplémentaire de la dernière ligne d'un carré latin classique, ce carré latin étant, dans le cas présent, du type équilibré pour les effets résiduels. Le deuxième exemple est de la même nature, mais dans le cas d'un dispositif avec permutation des objets, et cela pour trois objets seulement.

Enfin, le dernier exemple de la figure 8.4.3 suppose que, pour un dispositif avec permutation des objets, on possède des observations initiales (notées « 0 ») faites avant toute application des traitements, ces observations initiales intervenant ensuite dans l'analyse des résultats.

<sup>24</sup> En anglais : *row-and-column design*, *row-column design*.

<sup>25</sup> En anglais : *augmented Latin square*.

## 8.5 Exemple 1 : expérience en carré latin

### 8.5.1 Présentation et données

#### 1° Présentation générale

Nous considérons comme illustration du concept de carré latin le cas d'une expérience de chauffage du sol réalisée en serre, en Belgique en période hivernale, sur une variété décorative de *Ficus elastica* ROXB.

Les températures du sol prises en considération sont 15, 20, 25 et 30 degrés centigrades, à 12 centimètres de profondeur, toutes les autres conditions de culture étant en principe uniformes [GÉRARD, 1977].

Les unités expérimentales sont des ensembles de neuf plantes, cultivées en pots, ceux-ci étant enfoncés en terre. L'écartement entre les tiges est de 33 cm environ en tout sens, de telle sorte que les « parcelles » de neuf plantes ont une étendue de 1 m<sup>2</sup>.

#### 2° Dispositif expérimental

L'ensemble de l'expérience devant être réalisé dans deux petites serres, de 3 m de largeur sur 6 m de longueur, et des passages devant être prévus, à la fois pour pouvoir effectuer toutes les mensurations nécessaires et pour assurer des zones tampons entre les différentes « parcelles », il a été décidé de considérer quatre répétitions, disposées en carré latin. La figure 8.5.1 donne le plan de l'expérience, à l'échelle de 1/100.

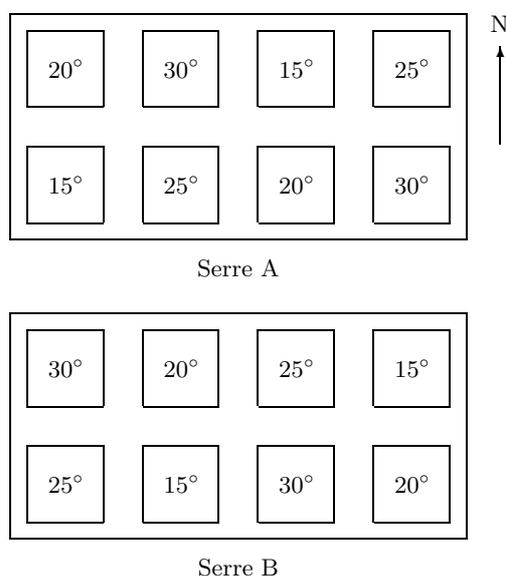
Les serres étant allongées dans le sens ouest-est, le facteur lignes du dispositif en carré latin doit permettre d'éliminer, le cas échéant, les différences entre serres et les différences liées aux expositions nord et sud. De même, le facteur colonnes doit permettre d'éliminer, éventuellement, les différences liées aux expositions ouest (colonnes de gauche) et est (colonnes de droite), ainsi que les différences entre « parcelles » situées aux extrémités des serres (colonnes latérales) et au centre des serres (colonnes centrales)<sup>26</sup>.

#### 3° Données

Les observations, effectuées de deux en deux semaines durant une période de huit mois (de début septembre à fin avril), ont eu trait à la hauteur des plantes, définie comme étant la distance séparant les points d'insertion de la première et

---

<sup>26</sup> On notera qu'en réalité, les deux serres n'étaient pas disposées côte à côte, comme semble l'indiquer la figure 8.5.1, mais bien dans le prolongement l'une de l'autre, la serre A étant située à l'ouest de la serre B. Cette disposition particulière ne modifie en rien la structure générale du carré latin.



**Figure 8.5.1.** Expérience de chauffage du sol sur *Ficus* : plan de l'expérience (températures du sol, en degrés centigrades).

de la dernière feuille, ainsi qu'au nombre de feuilles, aux dimensions (longueur et largeur) des feuilles et, subsidiairement, à la température du sol et de l'air. Ces observations ont permis d'étudier différentes variables dérivées, telles que l'accroissement total en hauteur, la longueur moyenne des entre-nœuds, etc.

Nous ne considérons ici que les accroissements totaux en hauteur, pour l'ensemble de la période de huit mois. Les moyennes de ces accroissements, calculées pour les différentes « parcelles » de neuf plantes, sont données dans le tableau 8.5.1. En vue de faire apparaître clairement la concordance entre ce tableau et la figure 8.5.1, les observations sont classées selon l'ordre croissant des numéros des lignes et des colonnes<sup>27</sup>.

On notera, à titre d'indication, que la hauteur totale moyenne générale était égale à 131 mm en début d'expérience, avec un écart-type résiduel (dans les « parcelles ») égal à 19 mm et un coefficient de variation égal à 15 %, les valeurs correspondantes étant respectivement de 333 mm, 37 mm et 11 % en fin d'expérience.

<sup>27</sup> Nous aurions bien sûr pu présenter les 144 valeurs individuelles et l'analyse relative à ces valeurs, au lieu des 16 moyennes, les résultats obtenus par les deux approches n'étant guère différents.

**Tableau 8.5.1.** Expérience de chauffage du sol sur *Ficus* : accroissements moyens en hauteur par « parcelle », en mm, en fonction des températures du sol, en degrés centigrades, des lignes et des colonnes.

| Temp. | Lignes | Colon. | Haut. |
|-------|--------|--------|-------|
| 20    | 1      | 1      | 185   |
| 30    | 1      | 2      | 242   |
| 15    | 1      | 3      | 177   |
| 25    | 1      | 4      | 214   |
| 15    | 2      | 1      | 117   |
| 25    | 2      | 2      | 229   |
| 20    | 2      | 3      | 209   |
| 30    | 2      | 4      | 238   |
| 30    | 3      | 1      | 200   |
| 20    | 3      | 2      | 200   |
| 25    | 3      | 3      | 222   |
| 15    | 3      | 4      | 154   |
| 25    | 4      | 1      | 218   |
| 15    | 4      | 2      | 174   |
| 30    | 4      | 3      | 247   |
| 20    | 4      | 4      | 205   |

## 8.5.2 Analyse des résultats<sup>28</sup>

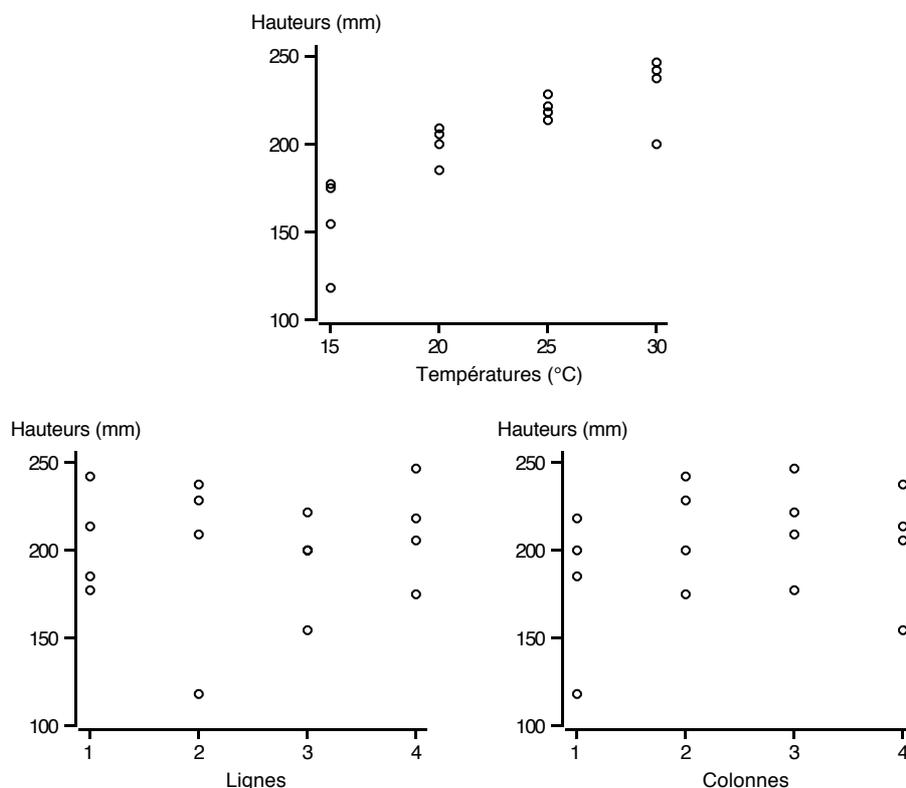
### 1° Examen préliminaire

La figure 8.5.2 donne une représentation graphique de l'influence des trois facteurs considérés. On peut constater que le facteur température du sol joue un rôle prépondérant, que le facteur lignes est à première vue négligeable, et que le facteur colonnes est également assez marqué.

En ce qui concerne le premier facteur, la croissance en hauteur est d'autant plus rapide que la température du sol est plus élevée, et cela selon une relation apparemment curvilinéaire. Quant au facteur colonnes, c'est la différence entre les positions centrales et latérales, dans les deux serres, qui apparaît.

L'examen des différents graphiques qui constituent la figure 8.5.2 met aussi en évidence le fait que la valeur 117 pourrait être considérée comme douteuse. L'application de la méthode de GRUBBS [STAT2, § 3.5.3] aux résidus de l'analyse de la variance dont il est question ci-dessous n'indique cependant pas que cette valeur doit être rejetée, et rien dans les données détaillées, relatives aux neuf plantes considérées, ne semble devoir conduire à une telle conclusion.

<sup>28</sup> Un traitement complet de cet exemple à l'aide du logiciel R est présenté à l'adresse <[www.dagnelie.be/docexr/exp085/exp085.htm](http://www.dagnelie.be/docexr/exp085/exp085.htm)>.



**Figure 8.5.2.** Expérience de chauffage du sol sur *Ficus* : représentation graphique de l'influence des trois facteurs considérés.

D'autre part, un examen de l'ensemble des 144 valeurs initiales montre que les conditions de normalité et d'égalité des variances, sous-jacentes à l'analyse de la variance, sont satisfaites.

## 2° Analyse de la variance et test d'additivité

Le tableau 8.5.2 donne les résultats de l'analyse de la variance, les trois facteurs étant comparés à la variation résiduelle.

Les facteurs lignes et colonnes, liés aux différences entre serres, entre expositions, etc., ne peuvent évidemment pas être considérés comme aléatoires. Pour que les différents tests soient valables, il s'impose donc de vérifier la condition d'additivité du modèle mathématique.

**Tableau 8.5.2.** Expérience de chauffage du sol sur *Ficus* : tableau d'analyse de la variance.

| Sources de variation | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | $F$      | P      |
|----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|----------|--------|
| Températures         | 3                 | 13.616                       | 4.539         | 43,0 *** | 0,0002 |
| Lignes               | 3                 | 661                          | 220           | 2,09     | 0,20   |
| Colonnes             | 3                 | 2.833                        | 944           | 8,95 *   | 0,012  |
| Variation résiduelle | 6                 | 633                          | 105,5         |          |        |
| Totaux               | 15                | 17.743                       |               |          |        |

En appliquant la relation du paragraphe 8.2.1.2°, on obtient, pour le test de TUKEY, la somme des carrés des écarts :

$$SCE_{add} = (-56.449)^2 / 14.053.271 = 227,$$

et un carré moyen résiduel recalculé égal à :

$$(633 - 227) / 5 = 81,2.$$

La valeur  $F$  de FISHER-SNEDECOR est en conséquence égale à 2,80, avec 1 et 5 degrés de liberté, et la probabilité correspondante est égale à 0,16.

L'hypothèse d'additivité ne doit donc pas être rejetée et, sur base du tableau 8.5.2, on peut en conclure qu'il y a bien une influence très hautement significative du facteur températures et une influence significative du facteur colonnes.

### 3° Efficacité relative

Le tableau 8.5.2 montre aussi que, par rapport à une expérience complètement aléatoire, l'efficacité relative de l'expérience en carré latin est, en première approximation, de l'ordre de 330 % :

$$[(661 + 2.833 + 633) / (3 + 3 + 6)] / 105,5 = 343,9 / 105,5 = 3,26 \text{ ou } 326 \text{ \%}.$$

On peut s'interroger en outre quant à l'efficacité relative de l'expérience en carré latin par rapport à une éventuelle expérience en blocs aléatoires complets.

A priori, en tenant compte de l'existence de deux serres et des différences qu'on pouvait attendre entre les expositions nord et sud, on aurait pu imaginer une expérience organisée en quatre blocs aléatoires complets correspondant aux quatre lignes de la figure 8.5.1. Par rapport à une telle expérience, qui n'aurait pas fait intervenir le facteur colonnes, l'efficacité relative du carré latin serait, en première approximation :

$$[(2.833 + 633) / (3 + 6)] / 105,5 = 385,1 / 105,5 = 3,65 \text{ ou } 365 \text{ \%}.$$

L'expérience en carré latin s'avère donc nettement supérieure dans ce cas, à la fois, à l'expérience complètement aléatoire et à l'expérience en blocs aléatoires complets qui aurait pu être envisagée.

#### 4° Interprétation

Pour compléter l'interprétation des résultats, il est utile de poursuivre l'étude du facteur températures et, dans une moindre mesure, des facteurs lignes et colonnes. Cette étude complémentaire peut se faire par une subdivision complète des différentes sommes des carrés des écarts factorielles.

En ce qui concerne le premier facteur, on peut tester le caractère linéaire ou quadratique de la relation entre la croissance en hauteur et la température du sol, par la méthode des polynômes orthogonaux [STAT2, § 12.2.3] ou par régression multiple [STAT2, § 16.2]. Quant au facteur lignes, il peut être décomposé en un facteur serres, un facteur orientations (nord-sud) et une interaction serres-orientations. De même, la somme des carrés des écarts entre colonnes peut donner naissance à un facteur orientations (ouest-est), un facteur positions (centrales ou latérales) et une interaction orientations-positions. Le tableau 8.5.3 présente les résultats de ces différentes décompositions.

**Tableau 8.5.3.** Expérience de chauffage du sol sur *Ficus* : tableau d'analyse de la variance, après subdivision des sommes des carrés des écarts factorielles.

| Sources de variation   | Degrés de liberté | S. des carrés des écarts | Carrés moyens | <i>F</i> | P      |
|------------------------|-------------------|--------------------------|---------------|----------|--------|
| Températures           | 3                 | 13.616                   | 4.539         | 43,0 *** | 0,0002 |
| Régression linéaire    | 1                 | 12.475                   | 12.475        | 118 ***  | 0,0000 |
| Régression quadratique | 1                 | 1.106                    | 1.106         | 10,5 *   | 0,018  |
| Régression cubique     | 1                 | 35                       | 35            | 0,33     | 0,59   |
| Lignes                 | 3                 | 661                      | 220           | 2,09     | 0,20   |
| Serres                 | 1                 | 5                        | 5             | 0,05     | 0,83   |
| Orientations (N-S)     | 1                 | 116                      | 116           | 1,10     | 0,33   |
| Serres-orientations    | 1                 | 540                      | 540           | 5,12     | 0,064  |
| Colonnes               | 3                 | 2.833                    | 944           | 8,95 *   | 0,012  |
| Orientations (O-E)     | 1                 | 638                      | 638           | 6,05 *   | 0,049  |
| Positions              | 1                 | 1.785                    | 1.785         | 16,9 **  | 0,0063 |
| Orientations-positions | 1                 | 410                      | 410           | 3,89     | 0,096  |
| Variation résiduelle   | 6                 | 633                      | 105,5         |          |        |
| Totaux                 | 15                | 17.743                   |               |          |        |

Ce tableau confirme très largement les premières indications que la figure 8.5.2 avait données, à savoir l'importance des facteurs températures et, dans une moindre mesure, positions (centrales ou latérales) dans les serres.

En ce qui concerne le facteur températures, on peut aussi rechercher une équation du second degré, du type :

$$H = a + bT + cT^2,$$

si on désigne la croissance en hauteur par  $H$  et la température par  $T$ . L'ajustement d'une telle équation par la méthode des moindres carrés conduit au résultat suivant [STAT2, § 16.2.2] :

$$H = -68,39 + 19,96T - 0,3325T^2.$$

Le tableau 8.5.4 donne, pour les quatre températures considérées, les moyennes observées et les moyennes « théoriques » déduites de cette équation. On peut constater la très bonne adéquation de la régression du deuxième degré, dans le domaine étudié.

**Tableau 8.5.4.** Expérience de chauffage du sol sur *Ficus* : moyennes observées et théoriques relatives aux différentes températures du sol.

| Températures | Moyennes  |            |
|--------------|-----------|------------|
|              | observées | théoriques |
| 15°          | 156       | 156        |
| 20°          | 200       | 198        |
| 25°          | 221       | 223        |
| 30°          | 232       | 231        |

Enfin, comme au paragraphe 6.5.3 notamment, on pourrait s'efforcer de déterminer une température optimale de culture.

### ⊖ 5° Codification des modèles d'analyse de la variance

Le contenu du tableau 8.5.2 peut être obtenu à l'aide des modèles :

$$H = T L C \quad \text{et} \quad H \sim T + L + C,$$

respectivement pour les logiciels Minitab et SAS d'une part (commandes ou procédures « *anova* » ou « *glm* »), et R d'autre part (fonction « *aov* »),  $H$ ,  $T$ ,  $L$  et  $C$  désignant les accroissements en hauteur et les facteurs températures, lignes et colonnes.

Quant au tableau 8.5.3, une solution consiste à définir une série de variables auxiliaires, relatives aux composantes linéaire, quadratique et cubique du facteur températures, et aux facteurs subsidiaires serres, orientations nord ou sud, positions centrales ou latérales, et orientations est ou ouest.

Les variables auxiliaires relatives au facteur températures peuvent être trois polynômes orthogonaux [STAT2, § 12.2.3]. Il peut s'agir par exemple d'une varia-

ble T1 prenant les valeurs  $-3$ ,  $-1$ ,  $+1$  et  $+3$  respectivement pour  $15$ ,  $20$ ,  $25$  et  $30^\circ$ , en ce qui concerne la composante linéaire, et de même T2 prenant les valeurs  $+1$ ,  $-1$ ,  $-1$  et  $+1$  pour la composante quadratique, et T3 prenant les valeurs  $-1$ ,  $+3$ ,  $-3$  et  $+1$  pour la composante cubique. Les variables auxiliaires relatives aux quatre autres facteurs sont par contre des variables binaires pouvant prendre les valeurs 0 et 1 (ou 1 et 2), et pouvant être désignées respectivement par S (serres), N (nord-sud), P (positions) et E (est-ouest).

Dans ces conditions, le problème peut être traité par une régression multiple classique exprimant les accroissements en hauteur en fonction de ces sept variables et des produits SN et PE, et cela avec les trois logiciels considérés.

Mais, comme dans les différents cas envisagés précédemment, d'autres solutions sont possibles. Ainsi, le modèle :

$$H \sim T1 + T2 + T3 + S*N + P*E,$$

pourrait être utilisé avec la fonction « *avv* » du logiciel R.

## 8.6 Exemple 2 : expérience avec permutation des objets (*cross-over*)

### 8.6.1 Présentation et données

#### 1° Présentation

Nous considérons également à titre d'exemple le cas d'une expérience avec permutation des objets destinée à comparer, sur quelques bovins seulement, trois alimentations différentes. Il s'agit de six vaches laitières, qui ont été suivies individuellement, chacune d'entre elles ayant reçu consécutivement chacune des trois alimentations (A, B et C), selon le dispositif présenté dans le tableau 8.6.1.

**Tableau 8.6.1.** Comparaison de trois alimentations (A, B et C) sur vaches laitières : dispositif expérimental.

| Périodes | Vaches |   |   |   |   |   |
|----------|--------|---|---|---|---|---|
|          | 1      | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1        | B      | C | A | B | A | C |
| 2        | A      | A | B | C | C | B |
| 3        | C      | B | C | A | B | A |

Plus concrètement, l'alimentation A est une alimentation témoin, à laquelle les alimentations B et C doivent être comparées, et les périodes d'observation sont

des périodes de quatre semaines, précédées chacune d'une période d'adaptation de deux semaines. Les principales observations concernent la production laitière.

[ À l'examen du tableau 8.6.1, on peut constater que toutes les permutations des lettres A, B et C, au sens de l'analyse combinatoire, sont prises en considération, [ de telle sorte que le dispositif est équilibré pour les effets résiduels.

### 2° Données

Le tableau 8.6.2 présente les productions journalières moyennes de lait, en kilogrammes, en fonction des alimentations, des périodes et des vaches. Ici également, les observations sont classées dans l'ordre des lignes et des colonnes du dispositif expérimental, et nous définirons ultérieurement le contenu de la colonne « Résid. ».

**Tableau 8.6.2.** Comparaison de trois alimentations sur vaches laitières : productions journalières moyennes de lait, en kg.

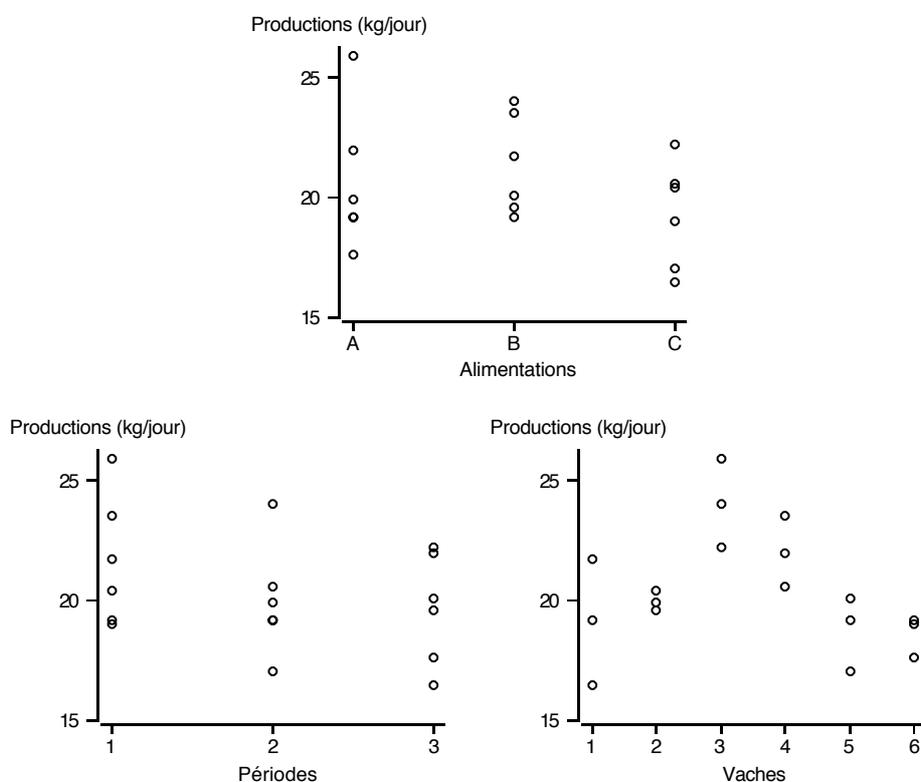
| Aliment. | Périodes | Vaches | Product. | Résid. |
|----------|----------|--------|----------|--------|
| B        | 1        | 1      | 21,7     | 0      |
| C        | 1        | 2      | 20,4     | 0      |
| A        | 1        | 3      | 25,9     | 0      |
| B        | 1        | 4      | 23,5     | 0      |
| A        | 1        | 5      | 19,1     | 0      |
| C        | 1        | 6      | 19,0     | 0      |
| A        | 2        | 1      | 19,1     | B      |
| A        | 2        | 2      | 19,9     | C      |
| B        | 2        | 3      | 24,0     | A      |
| C        | 2        | 4      | 20,5     | B      |
| C        | 2        | 5      | 17,0     | A      |
| B        | 2        | 6      | 19,1     | C      |
| C        | 3        | 1      | 16,4     | A      |
| B        | 3        | 2      | 19,5     | A      |
| C        | 3        | 3      | 22,2     | B      |
| A        | 3        | 4      | 21,9     | C      |
| B        | 3        | 5      | 20,0     | C      |
| A        | 3        | 6      | 17,6     | B      |

## 8.6.2 Analyse des résultats<sup>29</sup>

### 1° Examen préliminaire

La figure 8.6.1 donne une représentation graphique des résultats en fonction des trois facteurs considérés. On observe surtout l'influence du facteur vaches et, dans

<sup>29</sup> Un traitement complet de cet exemple à l'aide du logiciel R est présenté à l'adresse <[www.dagnelie.be/docexr/exp086/exp086.htm](http://www.dagnelie.be/docexr/exp086/exp086.htm)>.



**Figure 8.6.1.** Comparaison de trois alimentations sur vaches laitières : représentation graphique de l'influence des trois facteurs considérés.

une mesure nettement moindre, l'influence des deux autres facteurs (alimentations et périodes).

La moyenne des productions de lait est égale à 20,38 kg/jour, avec des valeurs extrêmes égales à 16,4 et 25,9 kg/jour.

### 2° Analyse de la variance et test d'additivité

Le tableau 8.6.3 contient les résultats de l'analyse de la variance, les trois facteurs étant comparés à la variation résiduelle.

Le facteur périodes ne peut cependant pas être considéré comme aléatoire, dans la mesure où les périodes se présentent évidemment dans un ordre systématique, et aussi, dans la mesure où, toutes choses étant égales par ailleurs, la production laitière est normalement décroissante d'une période à l'autre. Il importe donc de vérifier la condition d'additivité du modèle mathématique.

**Tableau 8.6.3.** Comparaison de trois alimentations sur vaches laitières :  
tableau d'analyse de la variance.

| Sources de variation | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | $F$      | P      |
|----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|----------|--------|
| Alimentations        | 2                 | 12,9878                      | 6,4939        | 10,0 **  | 0,0066 |
| Périodes             | 2                 | 13,7778                      | 6,8889        | 10,6 **  | 0,0056 |
| Vaches               | 5                 | 71,6978                      | 14,3396       | 22,1 *** | 0,0002 |
| Variation résiduelle | 8                 | 5,1878                       | 0,6485        |          |        |
| Totaux               | 17                | 103,6512                     |               |          |        |

Ce contrôle peut être réalisé selon une procédure semblable à celle que nous avons présentée et appliquée dans le cas du carré latin (§ 8.2.1.2° et 8.5.2.2°). On obtient ainsi une somme des carrés des écarts relative à la non-additivité égale à 0,3016, une valeur  $F$  de FISHER-SNEDECOR égale à 0,43, avec 1 et 7 degrés de liberté, et une probabilité égale à 0,53. La conclusion de ce test est donc tout à fait favorable.

### 3° Efficacité relative

Le tableau 8.6.3 confirme tout d'abord l'importance du facteur vaches, auquel correspond la contribution la plus élevée, en termes de sommes des carrés des écarts et de carrés moyens. Mais ce tableau montre aussi que les facteurs alimentations et périodes sont nettement plus marqués que ne semblait l'indiquer la figure 8.6.1.

L'importance des facteurs périodes et vaches conduit d'ailleurs à une valeur particulièrement élevée de l'efficacité relative. Par rapport à une expérience complètement aléatoire, cette efficacité serait en effet, en première approximation :

$$[(13,7778 + 71,6978 + 5,1878)/(2 + 5 + 8)]/0,6485 = 6,0442/0,6485 = 9,32 \text{ ou } 932 \text{ \%}.$$

Dans les conditions considérées, pour atteindre une précision comparable à celle que donnent six vaches observées au cours de trois périodes successives, il faudrait disposer, en une seule période, de trois lots d'au moins 50 bêtes ( $9,32 \times 6 = 56$ ), soit un total d'au moins 150 têtes de bétail.

### 4° Interprétation

Quant au facteur alimentations, qui constitue la raison d'être de l'expérience, l'analyse de la variance montre qu'il doit être considéré comme hautement significatif.

En outre, en vue de répondre à la question posée au départ, les alimentations B et C doivent être comparées à l'alimentation A, considérée comme témoin. Dans l'optique d'identifier une ou des alimentations qui permettent d'obtenir une production supérieure à celle de l'alimentation de référence, cette comparaison peut être réalisée par la méthode de DUNNETT [STAT2, § 12.3.2].

Les moyennes observées sont :

$$\bar{x}_A = 20,58, \quad \bar{x}_B = 21,30 \quad \text{et} \quad \bar{x}_C = 19,25 \text{ kg/jour};$$

et la plus petite différence significative, au sens de DUNNETT, est égale à :

$$2,22 \sqrt{2(0,6485)/6} = 1,03 \text{ kg/jour.}$$

Aucune des deux alimentations B et C ne s'avère donc significativement supérieure à l'alimentation de référence A.

### ⊖ 5° Effets résiduels

Ainsi que nous l'avons signalé, le dispositif expérimental qui a été adopté est équilibré pour les effets résiduels et permet donc de vérifier l'existence éventuelle de tels effets.

En vue d'atteindre cet objectif, il y a lieu d'introduire le facteur supplémentaire à quatre modalités qui figure dans la dernière colonne du tableau 8.6.2. Il s'agit, d'une part, de 0 pour la première période, et d'autre part, des lettres A, B ou C relatives chaque fois à la période antérieure, dans le cas de la deuxième et de la troisième période.

Le tableau 8.6.4 présente les résultats de l'analyse de la variance, non orthogonale, qui fait intervenir ce facteur supplémentaire.

**Tableau 8.6.4.** Comparaison de trois alimentations sur vaches laitières : tableau d'analyse de la variance incluant les éventuels effets résiduels.

| Sources de variation   | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | F    | P     |
|------------------------|-------------------|------------------------------|---------------|------|-------|
| Alimentations          | 2                 | 12,9878                      | 6,4939        |      |       |
| Périodes               | 2                 | 13,7778                      | 6,8889        |      |       |
| Vaches                 | 5                 | 71,6978                      | 14,3396       |      |       |
| Effets résid. (ajust.) | 2                 | 2,8536                       | 1,4268        | 3,67 | 0,091 |
| Variation résiduelle   | 6                 | 2,3342                       | 0,3890        |      |       |
| Totaux                 | 17                | 103,6512                     |               |      |       |

Dans ce tableau, le facteur effets résiduels est un facteur ajusté, qui tient compte de la présence simultanée, ou préalable, des facteurs alimentations, périodes et vaches. La somme des carrés des écarts qui est associée à ce facteur correspond en effet à la réduction de la somme des carrés des écarts résiduelle qui résulte de l'introduction de ce facteur supplémentaire dans le modèle d'analyse de la variance qui contient déjà les trois autres facteurs [STAT2, § 10.4.4 et 16.4.4].

On peut remarquer aussi que, du fait des relations qui existent entre les différents facteurs, le nombre de degrés de liberté relatif aux effets résiduels est égal à 2, alors que ce facteur possède quatre modalités.

Les effets résiduels apparaissent ainsi comme non significatifs, ce qui ne met donc pas en cause l'analyse de la variance du tableau 8.6.3 et l'interprétation qui en a été donnée. Il faut toutefois noter que cette conclusion est sans doute liée dans une large mesure au faible nombre de degrés de liberté de la variation résiduelle, qui est fonction lui-même du petit nombre de bêtes mises en expérience.

### ⊖ 6° Codification des modèles d'analyse de la variance

La codification de l'analyse de la variance initiale (tableau 8.6.3) est particulièrement simple. Elle se présente sous la forme :

$$L = A \ P \ V \quad \text{ou} \quad L \sim A + P + V,$$

respectivement pour les logiciels Minitab et SAS d'une part (commandes ou procédures « *anova* » ou « *glm* »), et R d'autre part (fonction « *aov* »), L, A, P et V désignant les productions laitières et les facteurs alimentations, périodes et vaches.

Quant au tableau 8.6.4, on a de même :

$$L = A \ P \ V \ R \quad \text{ou} \quad L \sim A + P + V + R,$$

R désignant en outre le facteur effets résiduels. On notera qu'en raison du caractère non orthogonal du modèle envisagé ici, le facteur R doit nécessairement être placé en dernière position.

# Chapitre 9

## Les expériences en blocs aléatoires incomplets : expériences non factorielles

### Sommaire

#### 9.1 Principes

9.1.1 Généralités

⊖ 9.1.2 Les blocs incomplets équilibrés

⊖ 9.1.3 Les réseaux carrés équilibrés et les réseaux équilibrés

⊖ 9.1.4 Les carrés latins incomplets

⊖ 9.1.5 Les dispositifs partiellement équilibrés

⊖ 9.1.6 Le cas des surfaces de réponse et des plans optimaux

#### 9.2 Analyse des résultats

⊖ 9.2.1 Les blocs incomplets équilibrés

⊖ 9.2.2 Les réseaux carrés équilibrés et les carrés latins incomplets

#### ⊖ 9.3 Discussion

#### 9.4 Exemple 1 : expérience en blocs incomplets équilibrés

⊖ 9.4.1 Présentation et données

⊖ 9.4.2 Analyse des résultats

#### 9.5 Exemple 2 : expérience en réseau carré équilibré

⊖ 9.5.1 Présentation et données

⊖ 9.5.2 Analyse des résultats

## 9.1 Principes

### 9.1.1 Généralités

Nous avons signalé antérieurement que, bien souvent, le dispositif expérimental en blocs aléatoires complets ne convient pas pour l'étude de grands nombres d'objets (plus de 15 ou 20 objets par exemple) et, parfois aussi, pour l'étude de petits nombres d'objets (§ 6.3.6°). De telles restrictions existent également pour le dispositif en carré latin et, dans une moindre mesure, pour le dispositif avec permutation des objets (§ 8.3.1°).

On est donc fréquemment amené à avoir recours à des dispositifs en *blocs incomplets*<sup>1</sup>, qui sont tels que les différents objets étudiés ne sont pas tous présents dans chacun des blocs. Ces dispositifs sont particulièrement nombreux et diversifiés.

Au cours de ce chapitre, nous présentons un certain nombre de dispositifs relatifs aux expériences non factorielles (expériences à un facteur ou expériences à deux ou plusieurs facteurs qui ne possèdent pas une structure factorielle, au sens du paragraphe 2.3.1.3°). Au cours du chapitre suivant, nous envisagerons le même problème dans le cas des expériences factorielles, complètes ou fractionnaires.

La bibliographie relative aux expériences en blocs incomplets est très abondante. On peut trouver des informations à leur sujet dans la plupart des livres que nous avons cités dans l'introduction générale, et en particulier dans le livre de KUEHL [2000]. L'ouvrage tout à fait classique de COCHRAN et COX [1957] reste aussi un outil de base en la matière, notamment du fait des nombreuses listes de dispositifs qu'il contient.

### ⊖ 9.1.2 Les blocs incomplets équilibrés

#### 1° Présentation

Les *blocs incomplets équilibrés*<sup>2</sup> sont tels que :

- les blocs sont tous de même dimension  $k$ , quant au nombre de parcelles ou d'unités expérimentales qu'ils contiennent, ce nombre étant inférieur au nombre d'objets  $p$ ;
- les  $p$  objets ne sont jamais présents plus d'une fois dans un même bloc ;
- les  $p$  objets sont tous répétés un même nombre de fois  $r$  ;
- chacun des  $p$  objets se trouve associé un même nombre de fois  $\lambda$ , dans les différents blocs, à chacun des  $p - 1$  autres objets<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> En anglais : *incomplete blocks*.

<sup>2</sup> En anglais : *balanced incomplete blocks*, *BIB*.

<sup>3</sup> Dans la littérature relative aux blocs incomplets, le terme *variétés* (en anglais : *varieties*) est souvent utilisé à la place de *traitements* ou *objets*. Ces dispositifs ont en effet été développés très largement en fonction des problèmes rencontrés dans l'étude de grands nombres de variétés de plantes cultivées.

Les deux dernières conditions sont celles qui assurent le caractère équilibré de ces dispositifs.

La figure 9.1.1 présente trois exemples de plans d'expériences qui respectent ces différentes conditions. Dans les trois cas, les blocs, qui correspondent aux lignes de la figure, sont constitués de quatre unités expérimentales.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 5 | 7 |
| 2 | 1 | 7 | 6 |
| 7 | 6 | 3 | 5 |
| 3 | 1 | 2 | 5 |
| 6 | 5 | 4 | 1 |
| 6 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 3 | 4 | 7 |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 8 | 6 | 3 | 1 |
| 7 | 4 | 5 | 2 |
| 7 | 3 | 5 | 1 |
| 6 | 4 | 2 | 8 |
| 5 | 4 | 6 | 3 |
| 7 | 2 | 8 | 1 |
| 7 | 6 | 1 | 4 |
| 2 | 5 | 8 | 3 |
| 5 | 4 | 1 | 8 |
| 6 | 3 | 2 | 7 |
| 6 | 5 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |
| 3 | 7 | 4 | 8 |
| 2 | 5 | 6 | 1 |

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 10 | 6  | 8  |
| 7  | 3  | 8  | 1  |
| 9  | 1  | 4  | 10 |
| 2  | 7  | 10 | 4  |
| 5  | 4  | 8  | 3  |
| 7  | 5  | 6  | 4  |
| 7  | 2  | 8  | 9  |
| 4  | 2  | 1  | 3  |
| 8  | 6  | 4  | 9  |
| 7  | 9  | 5  | 1  |
| 3  | 10 | 9  | 5  |
| 6  | 5  | 2  | 1  |
| 10 | 3  | 6  | 7  |
| 2  | 6  | 3  | 9  |
| 10 | 8  | 5  | 2  |

**Figure 9.1.1.** Exemples de dispositifs en blocs incomplets équilibrés.

Si en plus des notations introduites ci-dessus, on désigne par  $b$  le nombre de blocs, les caractéristiques de ces trois dispositifs sont respectivement :

$$p = 7, \quad k = 4, \quad b = 7, \quad r = 4, \quad \lambda = 2,$$

$$p = 8, \quad k = 4, \quad b = 14, \quad r = 7, \quad \lambda = 3,$$

et 
$$p = 10, \quad k = 4, \quad b = 15, \quad r = 6, \quad \lambda = 2.$$

Les valeurs du paramètre  $\lambda$  indiquent que les différents couples d'objets sont tous présents deux fois dans un même bloc pour le premier et le troisième exemple, et trois fois dans un même bloc pour le deuxième exemple.

On peut aussi remarquer que, dans le deuxième exemple, les blocs incomplets sont réunis par paires, de manière à constituer sept répétitions complètes. Un tel regroupement n'est par contre pas réalisable dans le premier et le troisième exemple, le nombre de blocs  $b$  n'étant pas un multiple du nombre de répétitions  $r$ .

Les dispositifs en blocs incomplets qui, comme le deuxième exemple, sont constitués de répétitions complètes sont parfois qualifiés de dispositifs *en répliques* ou

*résolubles*<sup>4</sup>. Une autre situation particulière, qui peut également se présenter, est l'existence de groupes de répétitions complètes.

Le football, comme d'autres sports, fournit des exemples supplémentaires de blocs incomplets équilibrés. Ainsi, une compétition qui met en jeu quatre équipes peut être considérée comme un ensemble de blocs incomplets équilibrés de paramètres :

$$p = 4, \quad k = 2, \quad b = 6, \quad r = 3 \quad \text{et} \quad \lambda = 1,$$

dès le moment où les quatre équipes sont opposées deux à deux au cours de six matchs, chacune d'entre elles jouant trois fois et rencontrant une fois chacune des autres équipes.

De même aussi, un championnat qui oppose 16 équipes en aller-retour se déroule selon un dispositif semblable, dont les paramètres sont :

$$p = 16, \quad k = 2, \quad b = 240, \quad r = 30 \quad \text{et} \quad \lambda = 2.$$

En outre, les 240 matchs sont en général réunis en 30 journées ou 30 week-ends de huit matchs, qui constituent chacune ou chacun une répétition complète.

## 2° Conditions

On peut facilement démontrer que les conditions suivantes sont nécessaires pour assurer l'existence de blocs incomplets équilibrés :

$$pr = bk \quad \text{et} \quad r(k-1)/(p-1) = \lambda,$$

tous les paramètres étant des nombres entiers positifs.

La première relation permet d'attribuer, pour un total de  $bk$  unités expérimentales, un même nombre  $r$  de répétitions à chacun des  $p$  objets, tandis que la deuxième relation garantit que tous les couples d'objets sont également représentés dans les différents blocs. La formulation de cette deuxième condition provient du fait que, si on considère un objet quelconque et les  $r$  blocs dans lesquels cet objet est présent, les  $r(k-1)$  unités expérimentales qui, dans ces blocs, ne sont pas affectées à l'objet en question doivent pouvoir être réparties uniformément entre les  $p-1$  autres objets.

On notera que ces relations ne sont pas, en général, des conditions suffisantes d'existence de dispositifs en blocs incomplets équilibrés<sup>5</sup>.

<sup>4</sup> En anglais : *resolvable design*.

<sup>5</sup> FISHER et YATES [1982] donnent diverses indications quant aux combinaisons des valeurs  $p$ ,  $k$ ,  $b$ ,  $r$  et  $\lambda$  qui satisfont les conditions énoncées ci-dessus, mais pour lesquelles la non-existence d'un dispositif en blocs incomplets équilibrés a été démontrée, et quant à certains cas qui n'ont pas été résolus. Parmi les combinaisons pour lesquelles aucune solution n'existe, on peut citer notamment :

$$p = 15, \quad k = 5, \quad b = 21, \quad r = 7 \quad \text{et} \quad \lambda = 2.$$

### 3° Dispositifs symétriques et complémentaires

Quand, en plus des propriétés énoncées ci-dessus, on a :

$$p = b \quad \text{et} \quad r = k,$$

le dispositif est dit *symétrique*<sup>6</sup>. Tel est le cas notamment pour le premier exemple de la figure 9.1.1.

D'autre part, deux dispositifs en blocs incomplets équilibrés sont dits *complémentaires*<sup>7</sup> quand chacun des blocs de l'un est constitué des objets qui sont absents dans un bloc de l'autre. Ainsi, l'ensemble complémentaire du premier dispositif de la figure 9.1.1 est formé des blocs suivants :

$$(1, 3, 6), (3, 4, 5), (1, 2, 4), (4, 6, 7), (2, 3, 7), (1, 5, 7) \text{ et } (2, 5, 6).$$

Et le dispositif complémentaire du deuxième exemple de la figure 9.1.1 est ce dispositif lui-même.

On peut démontrer que le complément d'un ensemble de blocs incomplets équilibrés de paramètres  $p, k, b, r$  et  $\lambda$  est lui-même un ensemble de blocs incomplets équilibrés, dont les paramètres sont :

$$p' = p, \quad k' = p - k, \quad b' = b, \quad r' = b - r \quad \text{et} \quad \lambda' = \lambda + b - 2r.$$

Sur cette base, les paramètres du dispositif complémentaire du troisième exemple de la figure 9.1.1 sont :

$$p' = 10, \quad k' = 6, \quad b' = 15, \quad r' = 9 \quad \text{et} \quad \lambda' = 5.$$

### 4° Randomisation

En dehors de la propriété qui vient d'être énoncée en ce qui concerne les dispositifs complémentaires, nous ne donnons pas d'informations particulières relatives à la construction des dispositifs en blocs incomplets équilibrés. Nous renvoyons simplement à l'emploi de certains logiciels ou à la consultation de livres tels que celui de COCHRAN et COX [1957].

Mais on doit bien sûr toujours procéder à la répartition aléatoire des objets. Celle-ci peut être réalisée en attribuant au hasard des numéros d'ordre aux différents objets, en permutant le cas échéant de façon aléatoire les répétitions complètes, en permutant de façon aléatoire les blocs au sein de l'ensemble du dispositif ou éventuellement au sein de chacune des répétitions complètes, et en permutant également de façon aléatoire et indépendamment les objets à l'intérieur de chacun des blocs.

<sup>6</sup> En anglais : *symmetrical design*.

<sup>7</sup> En anglais : *complementary design*.

### 5° Comparaisons avec un ou plusieurs témoins

Diverses extensions du principe des blocs incomplets équilibrés ont été proposées, notamment dans l'optique de la comparaison d'un ensemble d'objets avec un ou plusieurs témoins. La figure 9.1.2 donne trois exemples de dispositifs qui correspondent à cet objectif.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 2 | 5 | 7 |
| 2 | 1 | 0 | 7 | 6 |
| 0 | 7 | 6 | 3 | 5 |
| 3 | 0 | 1 | 2 | 5 |
| 6 | 5 | 4 | 1 | 0 |
| 6 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 1 | 3 | 4 | 0 | 7 |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 1 | 0 |
| 5 | 2 | 0 | 6 |
| 5 | 3 | 4 | 0 |
| 0 | 7 | 3 | 2 |
| 0 | 4 | 1 | 2 |
| 6 | 7 | 4 | 0 |
| 1 | 0 | 6 | 3 |

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 5  | 0  | 11 | 2  |
| 0  | 1  | 12 | 8  |
| 7  | 3  | 4  | 0  |
| 11 | 10 | 0  | 3  |
| 8  | 4  | 2  | 0  |
| 9  | 0  | 1  | 10 |
| 0  | 6  | 5  | 7  |
| 0  | 12 | 6  | 9  |

**Figure 9.1.2.** Exemples de dispositifs en blocs incomplets équilibrés relatifs aux comparaisons avec un témoin.

Le premier exemple est construit à partir du premier schéma de la figure 9.1.1, en ajoutant simplement un témoin (0) de façon aléatoire dans chacun des sept blocs. Les paramètres correspondants sont :

$$p = 8, \quad k = 5, \quad b = 7, \quad r = 3 \text{ ou } 7 \quad \text{et} \quad \lambda = 2 \text{ ou } 4,$$

le nombre de répétitions étant égal à 7 pour le témoin et à 3 pour les autres objets, et le nombre de présences simultanées de deux objets dans un même bloc étant égal à 4 pour les couples d'objets qui associent le témoin à chacun des autres objets et à 2 pour les autres couples d'objets.

Le deuxième exemple de la figure 9.1.2 permet également de comparer sept objets (1 à 7) à un témoin (0), mais cette fois dans un dispositif de dimensions identiques à celles du premier exemple de la figure 9.1.1. Il s'agit en réalité d'un ensemble initial de blocs incomplets équilibrés de paramètres :

$$p = 7, \quad k = 3, \quad b = 7, \quad r = 3 \quad \text{et} \quad \lambda = 1,$$

dans lequel un témoin a été inséré au hasard dans chacun des blocs. Les paramètres du dispositif résultant sont en conséquence :

$$p = 8, \quad k = 4, \quad b = 7, \quad r = 3 \text{ ou } 4 \quad \text{et} \quad \lambda = 1 \text{ ou } 3.$$

Par comparaison avec le premier exemple de la figure 9.1.1, chacun des objets à comparer au témoin s'est vu priver ici d'une répétition, pour faire place au témoin.

Enfin, le troisième exemple de la figure 9.1.2 a pour but de comparer 12 objets (1 à 12) à un témoin (0). Ses paramètres sont :

$$p = 13, \quad k = 4, \quad b = 8, \quad r = 2 \text{ ou } 8 \quad \text{et} \quad \lambda = 0, 1 \text{ ou } 2,$$

24 des 66 couples d'objets autres que le témoin se trouvant une et une seule fois dans un même bloc et les 42 autres couples de tels objets n'étant jamais présents.

On remarquera que les deux premiers dispositifs sont non seulement équilibrés en ce qui concerne les comparaisons avec le témoin, mais aussi équilibrés pour les comparaisons entre les objets autres que le témoin. Tel n'est par contre pas le cas pour le troisième exemple.

On peut bien sûr envisager aussi d'introduire dans chacun des blocs deux ou plusieurs témoins ou deux ou plusieurs répétitions d'un même témoin, et éventuellement même de ne considérer qu'une seule répétition de chacun des objets autres que le ou les témoins. Dans le dernier dispositif de la figure 9.1.2, il pourrait s'agir par exemple d'une seule répétition de 24 objets, qui seraient associés trois par trois au témoin dans les différents blocs.

Ces diverses possibilités s'inscrivent dans la ligne de ce qui a été dit antérieurement quant à l'opportunité d'accroître le nombre de répétitions du ou des témoins, par rapport au nombre de répétitions des différents objets qui leur sont comparés (§ 2.2.2.2°).

De tels dispositifs sont parfois qualifiés d'*augmentés*<sup>8</sup>. On peut trouver des informations complémentaires à leur sujet dans les articles de BECHHOFFER et TAMHANE [1981], FEDERER et RAGHAVARAO [1975], et JACROUX [1989].

### ⊖ 9.1.3 Les réseaux carrés équilibrés et les réseaux équilibrés

#### 1° Réseaux carrés équilibrés

Les *réseaux carrés équilibrés*, aussi appelés parfois *treillis carrés équilibrés*<sup>9</sup>, sont des dispositifs expérimentaux constitués à la fois de répétitions complètes et d'un double réseau de blocs incomplets, croisés les uns par rapport aux autres et qui correspondent aux lignes et aux colonnes des répétitions complètes.

La figure 9.1.3 en donne un exemple, pour 16 objets, cinq répétitions, 20 lignes et 20 colonnes de quatre unités expérimentales (quatre blocs-lignes et quatre blocs-colonnes de quatre unités expérimentales dans chacune des cinq répétitions). À l'intérieur des différentes répétitions complètes, tous les couples d'objets sont présents une et une seule fois dans une même ligne, et une et une seule fois dans une même colonne.

<sup>8</sup> En anglais : *augmented incomplete blocks*.

<sup>9</sup> En anglais : *balanced lattice square*.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |   |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|---|----|----|----|----|----|
| 9  | 1  | 13 | 5  | 7  | 16 | 9  | 2  | 10 | 16 | 5  | 3  | 8 | 9  | 3 | 14 | 2  | 1  | 4  | 3  |
| 16 | 8  | 12 | 4  | 1  | 10 | 15 | 8  | 7  | 1  | 12 | 14 | 5 | 12 | 2 | 15 | 10 | 9  | 12 | 11 |
| 2  | 10 | 6  | 14 | 14 | 5  | 4  | 11 | 4  | 6  | 15 | 9  | 6 | 11 | 1 | 16 | 14 | 13 | 16 | 15 |
| 7  | 15 | 3  | 11 | 12 | 3  | 6  | 13 | 13 | 11 | 2  | 8  | 7 | 10 | 4 | 13 | 6  | 5  | 8  | 7  |

**Figure 9.1.3.** Exemple de réseau carré équilibré.

### 2° Conditions

De tels dispositifs n'existent évidemment que quand le nombre d'objets est un carré ( $p = 9, 16, 25, \dots$ ), le nombre d'unités expérimentales par bloc  $k$  et le nombre de répétitions  $r$  étant tels que :

$$k = \sqrt{p} \text{ ou } p = k^2 \text{ et } r = k + 1.$$

Dans le cas de la figure 9.1.3, les paramètres du dispositif sont :

$$p = 16, \quad k = 4, \quad b = 2 \times 20, \quad r = 5 \quad \text{et} \quad \lambda = 2 \times 1,$$

les mentions  $2 \times 20$  et  $2 \times 1$  indiquant qu'il y a deux systèmes de 20 blocs (20 lignes et 20 colonnes), et que les différents couples d'objets sont présents une et une seule fois dans chacun de ces deux systèmes de blocs.

On notera toutefois que ces dispositifs n'existent pas pour tout nombre d'objets égal à un carré. Il a été démontré par exemple que le cas  $p = 36$  n'existe pas.

D'autre part, quand  $k$  est un nombre impair ( $p = 9, 25, 49, \dots$ ), il est possible de diminuer de moitié le nombre de répétitions, en considérant que tous les couples d'objets doivent être présents une et une seule fois dans une même ligne *ou* dans une même colonne. Les différents paramètres sont alors tels que :

$$k = \sqrt{p} \text{ ou } p = k^2 \text{ et } r = (k + 1)/2.$$

La figure 9.1.4 présente le cas de 25 objets, trois répétitions, 15 blocs-lignes et 15 blocs-colonnes de cinq unités expérimentales, pour lequel on a :

$$p = 25, \quad k = 5, \quad b = 2 \times 15, \quad r = 3 \quad \text{et} \quad \lambda = 1.$$

### 3° Randomisation

Des réseaux carrés équilibrés peuvent être générés et randomisés par ordinateur à l'aide de divers logiciels, et des tables de tels dispositifs sont données notamment par COCHRAN et COX [1957].

Dans tous les cas, on doit attribuer au hasard des numéros d'ordre aux différents objets, et on doit procéder aussi à une permutation aléatoire des répétitions, et une permutation aléatoire des lignes d'une part, et des colonnes d'autre part, indépendamment au sein de chacune des répétitions.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 18 | 24 | 5  | 4  | 6  | 17 | 1  | 5  | 16 | 19 | 7  | 14 | 8  | 5  | 23 |
| 21 | 1  | 9  | 14 | 25 | 13 | 23 | 25 | 12 | 4  | 20 | 6  | 17 | 12 | 9  |
| 19 | 12 | 11 | 15 | 7  | 7  | 2  | 10 | 18 | 9  | 4  | 10 | 11 | 21 | 16 |
| 23 | 10 | 3  | 17 | 22 | 21 | 6  | 15 | 3  | 8  | 1  | 13 | 18 | 22 | 15 |
| 20 | 8  | 13 | 2  | 16 | 24 | 11 | 20 | 14 | 22 | 3  | 19 | 25 | 2  | 24 |

**Figure 9.1.4.** Exemple de demi-réseau carré équilibré.

#### 4° Réseaux équilibrés

Les *réseaux équilibrés* ou *treillis équilibrés*<sup>10</sup> sont des dispositifs analogues aux réseaux carrés équilibrés, qui ne font intervenir, à l'intérieur des répétitions, qu'un seul système de blocs (lignes ou colonnes). Ils existent dans les mêmes conditions que les réseaux carrés équilibrés et peuvent être déduits de ces derniers.

Pour 16 objets par exemple, un dispositif en réseau équilibré peut être établi à partir du schéma de la figure 9.1.3, en permutant de façon aléatoire et indépendamment les quatre unités expérimentales de chacune des 20 colonnes (et non pas les quatre lignes de quatre unités de chacune des cinq répétitions complètes). Ce dispositif comporte alors 20 blocs incomplets de quatre unités, correspondant aux colonnes et groupés en cinq répétitions.

### ⊖ 9.1.4 Les carrés latins incomplets

#### 1° Présentation

Les *carrés latins incomplets*, aussi appelés *carrés de YOUNDEN*<sup>11</sup>, sont des dispositifs expérimentaux équilibrés qui peuvent être obtenus en éliminant, dans certaines conditions, une ou plusieurs lignes ou une ou plusieurs colonnes des carrés latins classiques (§ 8.1.1). La figure 9.1.5 en donne un exemple, pour 13 objets et quatre répétitions, le nombre de lignes étant égal au nombre d'objets et le nombre de colonnes étant égal au nombre de répétitions.

Comme les carrés latins classiques et les dispositifs avec permutation des objets et comme les réseaux carrés équilibrés, les carrés latins incomplets assurent un double contrôle de la variabilité du matériel expérimental. Ils superposent en effet un ensemble de blocs complets (colonnes de la figure 9.1.5) et un ensemble de blocs incomplets équilibrés (lignes de la figure 9.1.5).

En permutant les lignes et les colonnes du dispositif de la figure 9.1.5, on obtient aussi un schéma tout à fait comparable aux dispositifs avec permutation des objets,

<sup>10</sup> En anglais : *balanced lattice*.

<sup>11</sup> En anglais : *incomplete Latin square, YOUNDEN's square*.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 12 | 4  | 3  | 6  |
| 2  | 7  | 6  | 9  |
| 10 | 2  | 1  | 4  |
| 5  | 10 | 9  | 12 |
| 4  | 9  | 8  | 11 |
| 9  | 1  | 13 | 3  |
| 7  | 12 | 11 | 1  |
| 1  | 6  | 5  | 8  |
| 3  | 8  | 7  | 10 |
| 13 | 5  | 4  | 7  |
| 11 | 3  | 2  | 5  |
| 6  | 11 | 10 | 13 |
| 8  | 13 | 12 | 2  |

**Figure 9.1.5.** Exemple de carré latin incomplet.

tel que celui de la figure 8.1.3. Dans le cas présent, il s'agirait d'un dispositif équilibré qui permettrait de comparer 13 objets sur 13 individus, avec quatre répétitions, au cours de quatre périodes consécutives.

### 2° Conditions

Les conditions d'existence des carrés latins incomplets sont les mêmes que celles des blocs incomplets équilibrés, avec en outre les restrictions suivantes :

$$p = b \quad \text{et} \quad k = r.$$

Les carrés latins incomplets sont donc des dispositifs symétriques, au sens du paragraphe 9.1.2.3°.

En particulier, pour l'exemple de la figure 9.1.5, les paramètres sont :

$$p = b = 13, \quad k = r = 4 \quad \text{et} \quad \lambda = 1.$$

On notera que certains dispositifs en blocs incomplets équilibrés peuvent être construits à partir de carrés latins incomplets, par une permutation aléatoire des objets à l'intérieur des lignes. Ainsi, le premier dispositif de la figure 9.1.1 pourrait être obtenu à partir d'un carré latin incomplet constitué de sept lignes et quatre colonnes.

### 3° Randomisation

Comme pour les autres dispositifs, des carrés latins incomplets peuvent être générés par ordinateur et des listes figurent dans des livres tels que celui de COCHRAN et COX [1957].

La répartition aléatoire des objets se fait en attribuant au hasard des numéros d'ordre aux différents objets, et en permutant de façon aléatoire, d'une part les lignes, et d'autre part les colonnes du dispositif choisi.

Dans la construction des carrés latins incomplets, on peut aussi appliquer la propriété de complémentarité présentée au paragraphe 9.1.2.3°, en ce qui concerne les dispositifs en blocs incomplets équilibrés. Cette propriété permet notamment d'affirmer qu'au dispositif de la figure 9.1.5 correspond un carré latin incomplet complémentaire de 13 lignes et 9 colonnes, dont les paramètres sont :

$$p' = b' = 13, \quad k' = r' = 9 \quad \text{et} \quad \lambda' = 6.$$

## ⊖ 9.1.5 Les dispositifs partiellement équilibrés

### 1° Généralités

Parallèlement aux différents dispositifs équilibrés que nous avons présentés ci-dessus, existent des dispositifs *partiellement équilibrés*<sup>12</sup>. D'une manière générale, ceux-ci sont tels que tous les objets y possèdent le même nombre de répétitions, mais tous les couples d'objets n'y sont pas présents un même nombre de fois. La dernière condition du début du paragraphe 9.1.2.1° n'est donc pas remplie, de telle sorte que toutes les comparaisons entre objets ne sont pas également précises ou également puissantes.

Dans les dispositifs les plus classiques, les différents couples d'objets sont divisés en deux catégories. Certains couples sont tous représentés un même nombre de fois, tandis que les autres couples sont tous caractérisés par un autre nombre de présences communes.

D'une manière générale, des informations relatives à ces dispositifs peuvent être trouvées dans différents livres, tels que ceux de COCHRAN et COX [1957], et KUEHL [2000].

### 2° Blocs incomplets partiellement équilibrés

La figure 9.1.6 donne un exemple de dispositif en *blocs incomplets partiellement équilibrés*<sup>13</sup>, qui présente les caractéristiques dont il vient d'être question. Les paramètres de ce dispositif sont :

$$p = 8, \quad k = 3, \quad b = 8, \quad r = 3 \quad \text{et} \quad \lambda = 0 \text{ ou } 1.$$

Un examen attentif de cette figure montre que les couples 1-3, 2-6, 4-7 et 5-8 sont absents de ce dispositif ( $\lambda = 0$ ), et que les 24 autres couples d'objets y sont tous présents une fois ( $\lambda = 1$ ).

<sup>12</sup> En anglais : *partially balanced design*.

<sup>13</sup> En anglais : *partially balanced incomplete blocks, PBIB*.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 7 |
| 6 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 3 |
| 8 | 2 | 1 |
| 4 | 1 | 5 |
| 4 | 6 | 8 |
| 7 | 2 | 5 |
| 1 | 6 | 7 |

**Figure 9.1.6.** Exemple de dispositif en blocs incomplets partiellement équilibrés.

Ce dispositif peut être comparé au deuxième exemple de la figure 9.1.1, dans la mesure où il permet aussi d'étudier huit objets, mais ici en blocs de trois unités expérimentales, au lieu de quatre.

Comme au paragraphe 9.1.2.5°, on pourrait bien sûr envisager aussi d'insérer dans un tel dispositif un ou plusieurs témoins répétés plus fréquemment que les autres objets.

Des tables particulières relatives aux blocs incomplets partiellement équilibrés ont été publiées par BOSE *et al.* [1954] et CLATHWORTHY [1973]. L'utilisation de tables cède toutefois largement la place au recours à des logiciels ou des algorithmes, dont traitent notamment NGUYEN [1994] et VENABLES et ECCLESTON [1993]. On peut mentionner aussi d'autres travaux, tels que ceux de BOFILL et TORRAS [2004], et RECK et MORGAN [2005].

### 3° Réseaux rectangulaires

Les *réseaux rectangulaires*<sup>14</sup> sont des dispositifs comparables aux réseaux équilibrés du paragraphe 9.1.3.4°. Comme les réseaux carrés équilibrés et les réseaux équilibrés, ils sont constitués de répétitions complètes, mais ils sont tels que le nombre d'objets  $p$  est lié à la dimension des blocs  $k$  par la relation :

$$p = k(k + 1).$$

Avec des nombres d'objets égaux à 12, 20, 30, ..., ces dispositifs se situent donc presque à mi-chemin entre les nombres d'objets des réseaux carrés équilibrés et des réseaux équilibrés ( $p = 9, 16, 25, \dots$ ).

La figure 9.1.7 présente un réseau rectangulaire de paramètres :

$$p = 20, \quad k = 4, \quad b = 15, \quad r = 3 \quad \text{et} \quad \lambda = 0 \text{ ou } 1.$$

Pour 20 objets, ce dispositif comporte 15 blocs de quatre unités expérimentales, constituant trois répétitions complètes.

<sup>14</sup> En anglais : *rectangular lattice*.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 5  | 16 | 20 | 11 | 18 | 19 | 16 | 10 | 3  | 20 | 6  |
| 10 | 12 | 11 | 9  | 12 | 20 | 13 | 2  | 14 | 1  | 18 | 12 |
| 8  | 3  | 18 | 4  | 7  | 10 | 14 | 8  | 19 | 5  | 13 | 8  |
| 2  | 6  | 19 | 7  | 9  | 3  | 17 | 5  | 9  | 7  | 16 | 15 |
| 15 | 13 | 14 | 17 | 6  | 4  | 15 | 1  | 2  | 11 | 4  | 17 |

**Figure 9.1.7.** Exemple de réseau rectangulaire.

Les 15 blocs de quatre parcelles permettent de faire apparaître 90 couples d'objets ( $15 \times 4 \times 3/2 = 90$ ), alors que le nombre total de couples d'objets est égal à 190 ( $20 \times 19/2 = 190$ ). Effectivement, 100 couples d'objets sont absents du dispositif ( $\lambda = 0$ ), et 90 couples y sont présents chacun une fois ( $\lambda = 1$ ).

Avec ses 20 objets, ce dispositif peut être considéré comme se situant à mi-chemin entre le réseau carré équilibré de la figure 9.1.3 (16 objets) et le demi-réseau carré équilibré de la figure 9.1.4 (25 objets). Par son nombre de répétitions, il est aussi plus proche de ce dernier.

#### 4° Réseaux généralisés, $\alpha$ -plans et carrés semi-latins

On qualifie parfois de *réseaux généralisés*<sup>15</sup> l'ensemble des dispositifs en blocs incomplets pour lesquels le nombre d'objets  $p$  est un multiple du nombre d'unités expérimentales par bloc  $k$ , tandis que le nombre de blocs  $b$  est le même multiple du nombre de répétitions  $r$  :

$$p = ck \quad \text{et} \quad b = cr,$$

$c$  étant une constante entière positive. Ces dispositifs sont tels que les blocs incomplets peuvent toujours être groupés en répétitions complètes.

On retrouve, parmi ces dispositifs, certains cas particuliers de blocs incomplets équilibrés, tel que le deuxième exemple de la figure 9.1.1, les réseaux carrés équilibrés et les réseaux équilibrés (§ 9.1.3), pour lesquels le facteur multiplicatif  $c$  est égal à  $k$ , et les réseaux rectangulaires que nous avons évoqués au paragraphe précédent, pour lesquels le facteur  $c$  est égal à  $k + 1$ .

Mais les réseaux généralisés comprennent également d'autres ensembles de dispositifs non équilibrés, tels que les  $\alpha$ -plans (*alpha-plans*)<sup>16</sup>, les  $\alpha$ -plans latinisés<sup>17</sup>, les carrés semi-latins<sup>18</sup>, et les carrés troyens<sup>19</sup> [BAILEY, 1992; EDMONDSON, 1998; PATTERSON et WILLIAMS, 1976; PATTERSON *et al.*, 1978; PREECE et FREEMAN, 1983].

<sup>15</sup> En anglais : *generalized lattice*.

<sup>16</sup> En anglais :  *$\alpha$ -design, alpha-design*.

<sup>17</sup> En anglais : *Latinized  $\alpha$ -design*.

<sup>18</sup> En anglais : *semi-Latin square*.

<sup>19</sup> En anglais : *Trojan square*.

Le plus souvent, dans ces différents dispositifs, le nombre  $\lambda$  de présences simultanées des différents couples d'objets est égal à 0 ou 1, comme dans le cas des blocs incomplets partiellement équilibrés et des réseaux rectangulaires. Parfois cependant, le paramètre  $\lambda$  peut prendre les valeurs 0, 1 et 2.

Dans certains cas également, on utilise des blocs de deux dimensions différentes, la différence étant d'une unité seulement et les nombres d'unités expérimentales par bloc pouvant donc être désignés par  $k$  et  $k + 1$ .

La figure 9.1.8 présente, à titre d'illustration de ces différentes possibilités, un carré semi-latin relatif à 12 objets et quatre répétitions, de paramètres [ITCF, 2001] :

$$p = 12, \quad k = 3, \quad b = 16, \quad r = 4 \quad \text{et} \quad \lambda = 0 \text{ ou } 1.$$

|   |    |    |   |    |    |   |   |    |   |    |   |
|---|----|----|---|----|----|---|---|----|---|----|---|
| 8 | 12 | 4  | 1 | 6  | 10 | 2 | 5 | 11 | 3 | 7  | 9 |
| 3 | 11 | 6  | 9 | 8  | 2  | 1 | 7 | 12 | 5 | 10 | 4 |
| 1 | 5  | 9  | 4 | 11 | 7  | 8 | 3 | 10 | 6 | 12 | 2 |
| 2 | 7  | 10 | 5 | 3  | 12 | 4 | 9 | 6  | 1 | 11 | 8 |

**Figure 9.1.8.** Exemple de carré semi-latin.

Dans cet exemple, les 12 objets sont présents une et une seule fois dans chacune des quatre lignes de 12 unités, et de même, une et une seule fois dans chacun des ensembles de quatre blocs incomplets qui constituent les répétitions complètes. Cette disposition assure, comme les carrés latins notamment (§ 8.1.1), un double contrôle de la variabilité expérimentale, ce qui justifie la dénomination de carré semi-latin. D'autre part, on peut constater aussi que les 16 blocs incomplets de trois unités expérimentales réunissent 48 des 66 couples d'objets ( $\lambda = 1$ ), les 18 autres couples d'objets étant absents ( $\lambda = 0$ ).

L'ensemble des dispositifs dont il est question ici a l'avantage de couvrir une très large gamme de valeurs possibles pour le nombre d'objets  $p$ , le nombre de répétitions  $r$ , et le nombre d'unités expérimentales par bloc  $k$ , ce qui peut s'avérer particulièrement utile en présence de grands nombres d'objets.

Des algorithmes de construction sont présentés notamment par NGUYEN et WILLIAMS [1993] et VENABLES et ECCLESTON [1993], et des généralisations ont été introduites entre autres par EDMONDSON [2002], JOHN *et al.* [2002], et SINHA *et al.* [2002].

### 5° Autres dispositifs

Au-delà des dispositifs équilibrés et partiellement équilibrés classiques, certains auteurs préconisent d'utiliser des blocs incomplets de dimensions inégales, tels qu'ils se présentent naturellement [JOHNSTONE, 2003; MEAD, 1988, 1990; PEARCE, 1964]. Il peut s'agir par exemple de portées d'animaux d'effectifs inégaux,

au sein desquelles on s'efforce de répartir un certain nombre d'objets de manière aussi équilibrée que possible, sans imposer aucune restriction quant à la dimension des blocs.

D'autre part, des dispositifs en lignes et colonnes relatifs aux comparaisons avec un ou plusieurs témoins ont aussi été décrits par FEDERER [2002], TURE [1994], et WILLIAMS et JOHN [2003], notamment dans le cas où seuls le ou les témoins sont l'objet de répétitions.

## ⊖ 9.1.6 Le cas des surfaces de réponse et des plans optimaux

### 1° Surfaces de réponse

L'utilisation de dispositifs expérimentaux en blocs incomplets, au sens large, intervient également dans l'étude des surfaces de réponse, y compris les problèmes de mélanges (§ 2.4.1 et 2.4.2).

Comme premier exemple, on peut envisager le cas du plan composite centré à deux facteurs, qui comporte neuf objets et qui est illustré dans la partie gauche de la figure 2.4.1, en supposant que les contraintes d'organisation de l'expérience imposent de ne faire qu'une seule répétition des huit points périphériques et un nombre très limité de répétitions du point central. L'expérience peut alors être organisée notamment en deux blocs de six unités expérimentales, constitués de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & (-1, -1), \quad (-1, +1), \quad (+1, -1), \quad (+1, +1), \quad (0, 0), \quad (0, 0) \\ \text{et} \quad & (-\sqrt{2}, 0), \quad (+\sqrt{2}, 0), \quad (0, -\sqrt{2}), \quad (0, +\sqrt{2}), \quad (0, 0), \quad (0, 0). \end{aligned}$$

Le premier bloc réunit les quatre points factoriels du plan composite et deux répétitions du point central, tandis que le deuxième bloc regroupe les quatre points radiaux du plan composite et deux autres répétitions du point central.

De même, dans le cas du plan composite centré à trois facteurs, qui comporte 15 objets et qui correspond à la partie droite de la figure 2.4.1, on peut envisager de travailler en deux blocs de six unités et un bloc de huit unités expérimentales. Les blocs de six unités doivent alors réunir chacun quatre des huit points factoriels et deux répétitions du point central, tandis que le bloc de huit unités comprend les six points radiaux et deux répétitions supplémentaires du point central.

On dispose ainsi d'une seule répétition de l'ensemble des points périphériques et de six répétitions du point central. La répartition des huit points factoriels en deux groupes de quatre points doit être réalisée autant que possible comme dans le cas des blocs incomplets relatifs aux expériences factorielles (§ 10.1.2). En outre, pour des raisons d'orthogonalité, on peut montrer qu'il y a éventuellement intérêt à modifier quelque peu les valeurs  $\pm 1,682$  qui figurent dans les coordonnées des points radiaux (§ 2.4.1.3°).

Des informations complémentaires peuvent être trouvées à ce sujet dans les ouvrages généraux à orientation industrielle que nous avons cités antérieurement, ainsi que dans les travaux de GOOS et DONEV [2006a], PARK et KIM [2002], et TRINCA et GILMOUR [2000, 2002] pour les surfaces de réponse classiques, et de GOOS et DONEV [2006b, 2007], et PRESCOTT et DRAPER [1998] pour les mélanges.

### 2° Plans optimaux

Enfin, des dispositifs expérimentaux en blocs incomplets peuvent être associés également aux plans optimaux qui ont été présentés au paragraphe 2.4.3. Mais les critères d'optimalité interviennent ici, non pas uniquement dans le choix des traitements ou des objets, mais aussi dans la recherche des dispositifs expérimentaux eux-mêmes.

De tels critères apparaissent en effet dans certaines des publications que nous avons citées au cours des paragraphes précédents, et on peut y ajouter plus globalement le livre de GOOS [2002], ainsi que la discussion de PAGÈS et PÉRINEL [2007].

## 9.2 Analyse des résultats

### ⊖ 9.2.1 Les blocs incomplets équilibrés

#### 1° Analyse de la variance

Le tableau 9.2.1 présente le schéma de l'analyse de la variance relative aux expériences en blocs incomplets équilibrés, tant d'une manière générale que pour le premier exemple de la figure 9.1.1.

**Tableau 9.2.1.** Schéma de l'analyse de la variance relative aux expériences en blocs incomplets équilibrés, dans le cas général et dans le cas particulier  $p = b = 7$  et  $k = r = 4$ .

| Sources de variation | Degrés de liberté |    |
|----------------------|-------------------|----|
| Objets (ajustés)     | $p - 1$           | 6  |
| Blocs                | $b - 1$           | 6  |
| Variation résiduelle | $pr - p - b + 1$  | 15 |
| Totaux               | $pr - 1$          | 27 |

Il s'agit d'une analyse à deux critères de classification (objets et blocs), sans distinction entre une éventuelle interaction et la réelle variation résiduelle. Mais il faut noter que cette analyse est non orthogonale, puisque tous les objets ne sont pas présents dans tous les blocs (§ 12.4.1).

La somme des carrés des écarts totale et la somme des carrés des écarts relative au facteur blocs peuvent être calculées de manière tout à fait classique, tandis que la somme des carrés des écarts relative au facteur objets doit être ajustée, de façon à tenir compte de la présence simultanée du facteur blocs dans l'analyse. Enfin, la somme des carrés des écarts « résiduelle » peut être obtenue par différence.

De telles analyses peuvent être réalisées sans problème à l'aide des différents logiciels qui permettent de traiter les cas non orthogonaux d'analyse de la variance. Nous en exposons néanmoins le principe de manière assez détaillée, de telle sorte que le lecteur qui le souhaite puisse comprendre les fondements de ces analyses.

### 2° Effets principaux et moyennes ajustées

Dans le cas des blocs aléatoires complets, les effets principaux relatifs aux différentes modalités du facteur objets peuvent être estimés de la manière suivante [STAT2, § 10.2.5 et 10.3.6] :

$$\hat{a}_i = \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..},$$

$\bar{x}_{i.}$  désignant les moyennes relatives aux différentes modalités ( $i = 1, \dots, p$ ) et  $\bar{x}_{..}$  étant la moyenne générale de toutes les observations. Les moyennes estimées relatives aux différentes modalités sont aussi :

$$\hat{m}_i = \bar{x}_{i.} \quad \text{ou} \quad \hat{m}_i = \bar{x}_{..} + \hat{a}_i.$$

Dans le cas des blocs incomplets par contre, les effets principaux ne peuvent pas être estimés en comparant les moyennes par modalité  $\bar{x}_{i.}$  avec la moyenne générale de toutes les observations, mais bien en comparant chacune des moyennes  $\bar{x}_{i.}$  avec une moyenne calculée uniquement à partir des observations des blocs dans lesquels la modalité considérée est présente.

Ainsi, pour le premier exemple de la figure 9.1.1, la moyenne  $\bar{x}_{1.}$ , qui est relative à la première modalité et qui est calculée à partir des quatre unités expérimentales « 1 », doit être comparée à une « moyenne générale » déterminée en fonction uniquement des observations du deuxième, du quatrième, du cinquième et du septième bloc.

Mais cette « moyenne générale », qui doit servir de base de comparaison, n'est pas simplement la moyenne arithmétique des 16 observations des quatre blocs en question, car cette dernière moyenne est en réalité une moyenne pondérée, dans laquelle la première modalité intervient quatre fois ( $r = 4$ ), et chacune des six autres modalités deux fois seulement ( $\lambda = 2$ ).

Une moyenne générale non pondérée doit donc être calculée pour chacune des modalités, en fonction chaque fois des seuls blocs concernés. On peut démontrer que ces différentes moyennes non pondérées sont :

$$[(r + \lambda p - \lambda) \bar{x}'_{i.} - (r - \lambda) \bar{x}_{i.}] / (\lambda p),$$

si on désigne par  $\bar{x}_i$  la moyenne des  $r$  observations relatives à la modalité  $i$ , et par  $\bar{x}'_i$  la moyenne des  $kr$  observations relatives aux  $r$  blocs dans lesquels la modalité  $i$  est présente.

On peut en déduire que les effets principaux estimés sont :

$$\hat{a}_i = \frac{k(p-1)}{(k-1)p} (\bar{x}_i - \bar{x}'_i),$$

et des *moyennes ajustées*<sup>20</sup> peuvent alors être calculées à l'aide de la même relation que ci-dessus, pour les différentes modalités :

$$\hat{m}_i = \bar{x}_{..} + \hat{a}_i.$$

On peut démontrer aussi, sur la même base, que la somme des carrés des écarts ajustée relative au facteur objets est :

$$\text{SCE}'_a = \frac{k(p-1)r}{(k-1)p} \sum_{i=1}^p (\bar{x}_i - \bar{x}'_i)^2 = \frac{(k-1)pr}{k(p-1)} \sum_{i=1}^p \hat{a}_i^2,$$

alors que la somme des carrés des écarts correspondante est, pour  $r$  blocs complets :

$$\text{SCE}_a = r \sum_{i=1}^p (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2 = r \sum_{i=1}^p \hat{a}_i^2.$$

De même, l'erreur standard de toute différence de deux moyennes ajustées est :

$$\sqrt{\frac{2k(p-1)}{(k-1)pr}} \text{CM}_r,$$

au lieu de, classiquement pour  $r$  blocs complets :

$$\sqrt{2\text{CM}_r/r}.$$

### 3° Blocs incomplets en répétitions complètes

L'analyse de la variance est quelque peu différente quand les blocs incomplets sont groupés en répétitions complètes, comme l'illustre notamment le deuxième exemple de la figure 9.1.1. Le tableau 9.2.2 donne le schéma de l'analyse qui correspond à cette situation et, en particulier, à l'exemple en question.

La seule différence est le fait que la composante « blocs », à  $b-1$  degrés de liberté (tableau 9.2.1), est divisée en une composante « répétitions », à  $r-1$  degrés de liberté, et une composante « blocs (dans répétitions) », à  $b-r$  degrés de liberté.

### 4° Information intra-blocs et inter-blocs

Nous n'avons envisagé jusqu'à présent que l'étude des comparaisons entre objets qui sont réalisées à l'intérieur des blocs, c'est-à-dire l'étude de l'*information*

<sup>20</sup> En anglais : *adjusted mean*.

**Tableau 9.2.2.** Schéma de l'analyse de la variance relative aux expériences en blocs incomplets équilibrés avec répétitions complètes, dans le cas général et dans le cas particulier  $p = 8$ ,  $k = 4$ ,  $b = 14$  et  $r = 7$ .

| Sources de variation     | Degrés de liberté |    |
|--------------------------|-------------------|----|
| Objets (ajustés)         | $p - 1$           | 7  |
| Répétitions              | $r - 1$           | 6  |
| Blocs (dans répétitions) | $b - r$           | 7  |
| Variation résiduelle     | $pr - p - b + 1$  | 35 |
| Totaux                   | $pr - 1$          | 55 |

*intra-blocs*<sup>21</sup>. Quand le nombre de blocs est important (au moins 10 à 15 blocs), et que le nombre d'objets et le nombre d'unités expérimentales par bloc sont relativement faibles, une information complémentaire utile relative aux différences entre objets peut être déduite des différences entre blocs. On peut alors procéder éventuellement à une certaine *récupération*<sup>22</sup> de cette information, dite *inter-blocs*<sup>23</sup>.

Dans le dispositif qui sera présenté au paragraphe 9.4.1.1° par exemple (tableau 9.4.1), on peut remarquer que la différence entre les deux premiers blocs (feuilles 1 et 2) se confond en réalité avec la différence entre les objets 4 et 5, et il en est de même pour les différences entre les blocs 3 et 8 d'une part, et 5 et 9 d'autre part. Il en est de même aussi, de manière équilibrée, pour les différences entre d'autres couples de blocs et les différences entre les autres couples d'objets.

Il apparaît donc bien que la comparaison des blocs peut fournir une certaine information relative aux différences entre objets.

## ⊖ 9.2.2 Les réseaux carrés équilibrés et les carrés latins incomplets

### 1° Analyse de la variance

Nous ne présentons pas de façon détaillée les modalités d'analyse des résultats pour tous les types de dispositifs que nous avons introduits au paragraphe 9.1. Mais nous donnons toutefois, dans les tableaux 9.2.3 et 9.2.4, les schémas des analyses de la variance qui concernent les réseaux carrés équilibrés et les carrés latins incomplets (§ 9.1.3 et 9.1.4), et cela chaque fois dans le cas général et pour les exemples que nous avons envisagés (figures 9.1.3 et 9.1.5).

Dans un cas comme dans l'autre, il s'agit d'analyses de la variance non orthogonales, dans lesquelles le facteur objets doit être ajusté en fonction des autres

<sup>21</sup> En anglais : *intra-block information*.

<sup>22</sup> En anglais : *recovery*.

<sup>23</sup> En anglais : *inter-block information*.

**Tableau 9.2.3.** Schéma de l'analyse de la variance relative aux expériences en réseaux carrés équilibrés, dans le cas général et dans le cas particulier  $p = 16$ ,  $k = 4$ ,  $b = 2 \times 20$  et  $r = 5$ .

| Sources de variation        | Degrés de liberté      |    |
|-----------------------------|------------------------|----|
| Objets (ajustés)            | $p - 1$                | 15 |
| Répétitions                 | $r - 1$                | 4  |
| Lignes (dans répétitions)   | $r(k - 1)$             | 15 |
| Colonnes (dans répétitions) | $r(k - 1)$             | 15 |
| Variation résiduelle        | $pr - p - 2rk + r + 1$ | 30 |
| Totaux                      | $pr - 1$               | 79 |

**Tableau 9.2.4.** Schéma de l'analyse de la variance relative aux expériences en carrés latins incomplets, dans le cas général et dans le cas particulier  $p = b = 13$  et  $k = r = 4$ .

| Sources de variation | Degrés de liberté |    |
|----------------------|-------------------|----|
| Objets (ajustés)     | $p - 1$           | 12 |
| Lignes               | $p - 1$           | 12 |
| Colonnes             | $r - 1$           | 3  |
| Variation résiduelle | $(p - 1)(r - 2)$  | 24 |
| Totaux               | $pr - 1$          | 51 |

facteurs. Il en est de même d'ailleurs, d'une manière générale, pour les autres dispositifs que nous avons présentés antérieurement et que nous ne reprenons pas en considération ici.

On notera aussi que, pour les réseaux carrés équilibrés (tableau 9.2.3), les nombres de degrés de liberté peuvent être exprimés comme suit en fonction du seul paramètre  $k$  :

$$k^2 - 1, \quad k, \quad k^2 - 1, \quad k^2 - 1, \quad (k^2 - 1)(k - 2) \quad \text{et} \quad k^3 + k^2 - 1.$$

## 2° Effets principaux et moyennes ajustées

Des ajustements semblables à ceux que nous avons présentés au paragraphe 9.2.1 doivent également intervenir dans l'estimation des effets principaux, dans l'estimation des moyennes et dans la détermination des erreurs standards relatives aux différences de moyennes. Ces ajustements doivent évidemment être adaptés dans chaque cas au type de dispositif considéré.

Nous envisageons le cas des réseaux carrés équilibrés au paragraphe 9.5.2.3° et d'autres informations peuvent être trouvées à ce sujet dans certains des ouvrages généraux que nous avons cités, dont celui de KUEHL [2000].

## ⊖ 9.3 Discussion

### 1° Avantages et inconvénients

Les dispositifs en blocs incomplets, au sens large, permettent tout d'abord de faire face aux situations dans lesquelles l'emploi de blocs de très petites dimensions s'impose (blocs de deux unités expérimentales par exemple). D'autre part, le recours à ces dispositifs permet souvent d'augmenter la précision des résultats quand le nombre d'objets à étudier est élevé ou très élevé (plus de 15 ou 20 objets par exemple).

L'utilisation des dispositifs en blocs incomplets implique toutefois quelques difficultés supplémentaires, de calcul et d'interprétation, parmi lesquelles on peut citer la réalisation d'analyses de la variance non orthogonales et l'emploi de moyennes ajustées.

### 2° Utilisation

En raison sans doute de ces difficultés, les dispositifs en blocs incomplets étaient traditionnellement peu utilisés. En matière agronomique par exemple, différentes sources d'informations relatives à un large éventail de pays et de conditions montrent qu'environ 60 % des expériences réalisées dans les stations de recherche faisaient appel uniquement au principe des blocs aléatoires complets (chapitre 6), environ 30 % des expériences étaient constituées de blocs aléatoires complets avec parcelles divisées, de carrés latins et de dispositifs apparentés (chapitres 7 et 8), et environ 10 % des expériences faisaient intervenir des blocs incomplets, avec confusion d'effets dans le cas des expériences factorielles (chapitres 9 et 10) [CLAUSTRIAUX, 1977 ; COX, 1950 ; KHOSLA *et al.*, 1973 ; OGER, 1980].

Sans qu'on puisse se référer à des informations très générales à ce propos, on peut penser que la situation a sensiblement évolué au cours du temps, du fait notamment du développement des moyens de calcul mis à la disposition des chercheurs. En particulier, les réseaux carrés et rectangulaires et les  $\alpha$ -plans ou, d'une manière plus large, les réseaux généralisés (§ 9.1.5) seraient très fréquemment utilisés dans les expériences de comparaison de variétés de plantes cultivées [ITCF, 2001 ; OGER et ROISIN, 1992 ; PATERSON, 1988].

### 3° Choix

Dans le choix d'un dispositif en blocs incomplets, il y a lieu de privilégier dans la mesure du possible deux propriétés essentielles, qui ne sont pas toujours conciliables, à savoir le caractère équilibré du dispositif et le fait que les blocs puissent être groupés en répétitions complètes.

Le caractère équilibré du dispositif se justifie bien sûr pleinement quand tous les éléments pris en considération doivent être comparés sur pied d'égalité. Quant au groupement des blocs incomplets en répétitions complètes, il permet éventuel-

lement de traiter les résultats, de façon quelque peu abusive sans doute, comme s'il s'agissait de blocs complets, notamment quand un nombre important de données sont manquantes ou quand un certain nombre d'objets ou un certain nombre de blocs doivent être écartés de l'analyse.

Le tableau 9.3.1 permet d'orienter le choix en fonction de ces principes. Ce tableau donne en effet une liste de dispositifs en blocs incomplets équilibrés, au sens large, en faisant la distinction entre les blocs incomplets équilibrés proprement dits, avec répétitions complètes (B1) et sans répétitions complètes (B2), les carrés latins incomplets (C) et les réseaux carrés équilibrés (R). On se rappellera à ce propos, d'une part, que tous les carrés latins incomplets (C) peuvent être considérés aussi comme des blocs incomplets équilibrés sans répétitions complètes (B2), et d'autre part, que tous les dispositifs affectés d'une des mentions B1, C ou R comprennent, sous une forme ou sous une autre, des répétitions complètes.

Il est bon de noter également que l'existence de dispositifs équilibrés pour certains nombres d'objets seulement n'est pas un inconvénient aussi contraignant qu'on pourrait le croire à première vue, dans la mesure où il est souvent possible, et même parfois souhaitable, de répéter un plus grand nombre de fois certains objets de référence (§ 2.2.2.2°). Le dispositif en réseau carré équilibré  $5 \times 5$  ( $p = 25$  et  $k = 5$ ), avec trois, six ou neuf répétitions complètes, peut ainsi être utilisé par exemple dans le cas d'expériences destinées à comparer 20, 21 ou 22 nouvelles variétés avec une variété témoin, pour autant que le nombre de répétitions de celle-ci soit multiplié par 5, par 4 ou par 3.

Dans la mesure du possible, il est souhaitable enfin de donner la préférence aux dispositifs qui assurent un double contrôle de la variabilité expérimentale (dispositifs « en lignes et colonnes »), à savoir les carrés latins incomplets, les réseaux carrés équilibrés, et parmi les dispositifs non équilibrés, les carrés semi-latins et les  $\alpha$ -plans latinisés notamment.

#### 4° Efficacité relative

Comme pour les autres dispositifs (§ 6.3.2°, 6.3.3°, etc.), l'efficacité relative des expériences en blocs incomplets peut être calculée a posteriori dans tous les cas, par rapport à l'expérience complètement aléatoire correspondante. L'efficacité relative peut aussi être calculée par rapport à une expérience en blocs aléatoires complets, quand les blocs incomplets peuvent être groupés en répétitions complètes.

D'autre part, le quotient  $[k(p-1)]/[(k-1)p]$ , qui intervient notamment dans l'erreur standard de la différence de deux moyennes ajustées (§ 9.2.1.2°), peut être considéré comme une efficacité relative a priori.

Ainsi que nous l'avons signalé au paragraphe 6.3.6°, LIN et BINNS [1984] et PATTERSON et HUNTER [1983] donnent diverses indications quant à l'efficacité relative des expériences en blocs incomplets, par rapport aux expériences en blocs complets, et quant aux dimensions à donner aux blocs.

**Tableau 9.3.1.** Dispositifs en blocs incomplets équilibrés, en carrés latins incomplets et en réseaux équilibrés : nombres d'objets  $p$  ( $< 100$ ), nombres d'unités expérimentales par bloc  $k$ , nombres de répétitions  $r$  ( $\leq 10$ ) et types de dispositifs (B1 = blocs incomplets équilibrés avec répétitions complètes ; B2 = blocs incomplets équilibrés sans répétitions complètes ; C = carrés latins incomplets ; R = réseaux carrés équilibrés).

| $p$ | $k$ | $r$         | Type | $p$ | $k$ | $r$   | Type | $p$ | $k$ | $r$     | Type |
|-----|-----|-------------|------|-----|-----|-------|------|-----|-----|---------|------|
| 3   | 2   | 4, 6, 8, 10 | C    | 10  | 2   | 9     | B1   | 21  | 3   | 10      | B1   |
| 4   | 2   | 3, 6, 9     | R    |     | 3   | 9     | C    |     | 5   | 5, 10   | C    |
|     | 3   | 3, 6, 9     | C    |     | 4   | 6     | B2   |     | 7   | 10      | B2   |
| 5   | 2   | 4, 8        | C    |     | 5   | 9     | B2   | 25  | 4   | 8       | C    |
|     | 3   | 6           | C    |     | 6   | 9     | B2   |     | 5   | 3, 6, 9 | R    |
|     | 4   | 4, 8        | C    |     | 9   | 9     | C    |     | 9   | 9       | C    |
| 6   | 2   | 5, 10       | B1   | 11  | 2   | 10    | C    | 28  | 4   | 9       | B1   |
|     | 3   | 5, 10       | *    |     | 5   | 5, 10 | C    |     | 7   | 9       | B2   |
|     | 4   | 10          | B2   |     | 6   | 6     | C    | 31  | 6   | 6       | C    |
|     | 5   | 5, 10       | C    |     | 10  | 10    | C    |     | 10  | 10      | C    |
| 7   | 2   | 6           | C    | 13  | 3   | 6     | C    | 37  | 9   | 9       | C    |
|     | 3   | 3, 6, 9     | C    |     | 4   | 4, 8  | C    | 41  | 5   | 10      | C    |
|     | 4   | 4, 8        | C    |     | 9   | 9     | C    | 49  | 7   | 4, 8    | R    |
|     | 6   | 6           | C    | 15  | 3   | 7     | B1   | 57  | 8   | 8       | C    |
| 8   | 2   | 7           | B1   |     | 7   | 7     | C    | 64  | 8   | 9       | R    |
|     | 4   | 7           | B1   |     | 8   | 8     | C    | 73  | 9   | 9       | C    |
|     | 7   | 7           | C    | 16  | 4   | 5, 10 | R    | 81  | 9   | 5, 10   | R    |
| 9   | 2   | 8           | C    |     | 6   | 6     | C    | 91  | 10  | 10      | C    |
|     | 3   | 4, 6, 8, 10 | R    |     | 6   | 9     | B2   |     |     |         |      |
|     | 4   | 8           | C    |     | 10  | 10    | C    |     |     |         |      |
|     | 5   | 10          | C    | 19  | 3   | 9     | C    |     |     |         |      |
|     | 6   | 8           | B2   |     | 9   | 9     | C    |     |     |         |      |
|     | 8   | 8           | C    |     | 10  | 10    | C    |     |     |         |      |

\* B2 pour 5 répétitions et B1 pour 10 répétitions.

## 9.4 Exemple 1 : expérience en blocs incomplets équilibrés

### ⊖ 9.4.1 Présentation et données

#### 1° Présentation

Nous illustrons le cas des expériences en blocs incomplets équilibrés en considérant une partie des données de l'exemple initial de YATES [1936]. L'étude en

question était destinée à comparer cinq traitements de lutte contre la mosaïque du tabac (maladie virale du tabac).

Le schéma de l'expérience est présenté dans la deuxième et la quatrième colonne du tableau 9.4.1, par les chiffres 1 à 5 qui y désignent les différents traitements.

**Tableau 9.4.1.** Étude de la mosaïque du tabac : numéros des traitements et nombres de lésions par demi-feuille.

| Fe. | Moitié gauche |    | Moitié droite |    |
|-----|---------------|----|---------------|----|
| 1   | 5             | 26 | 2             | 40 |
| 2   | 4             | 16 | 2             | 26 |
| 3   | 3             | 21 | 5             | 14 |
| 4   | 2             | 11 | 3             | 16 |
| 5   | 5             | 12 | 1             | 12 |
| 6   | 2             | 34 | 1             | 49 |
| 7   | 3             | 69 | 1             | 68 |
| 8   | 3             | 42 | 4             | 35 |
| 9   | 1             | 22 | 4             | 31 |
| 10  | 5             | 19 | 4             | 25 |

Il s'agit en fait de 10 feuilles de tabac dont la moitié gauche a été l'objet dans chaque cas d'un premier traitement et la moitié droite d'un autre traitement. La première feuille, par exemple, s'est vu affecter les traitements 5 et 2, la deuxième feuille les traitements 4 et 2, etc.

Chacune des feuilles constitue ainsi un bloc de deux unités expérimentales, de telle sorte que les paramètres du dispositif considéré sont :

$$p = 5, \quad k = 2, \quad b = 10, \quad r = 4 \quad \text{et} \quad \lambda = 1,$$

les 10 couples de traitements (1-2, 1-3, ...) apparaissant bien chacun une fois dans le dispositif<sup>24</sup>.

## 2° Données

Les données récoltées sont relatives aux nombres de lésions de mosaïque observés sur chaque demi-feuille. Ces données figurent dans la troisième et la cinquième colonne du tableau 9.4.1, en regard des numéros des traitements.

<sup>24</sup> Les données considérées par YATES concernaient en réalité, non pas 10 feuilles, mais bien 30 feuilles (ou 30 blocs), les paramètres du dispositif étant :

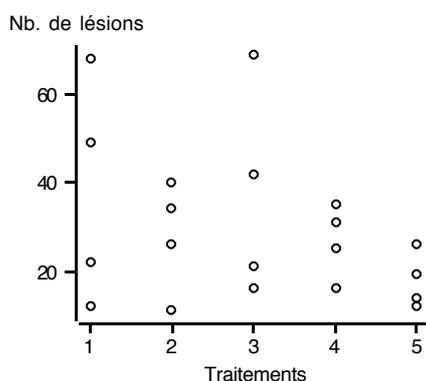
$$p = 5, \quad k = 2, \quad b = 30, \quad r = 12 \quad \text{et} \quad \lambda = 3.$$

Le fait de n'étudier ici que 10 feuilles doit permettre au lecteur qui le souhaite de suivre plus facilement la procédure de calcul, à partir d'un nombre très limité d'observations (20 observations).

## ⊖ 9.4.2 Analyse des résultats

### 1° Examen préliminaire

Un examen même rapide du tableau 9.4.1 met clairement en évidence la grande variabilité des résultats obtenus (valeurs extrêmes égales à 11 et 69, avec une moyenne égale à 29,4 lésions par demi-feuille). En raison notamment de cette variabilité, la représentation graphique des observations en fonction des différents traitements ne fournit guère d'indications précises (figure 9.4.1).



**Figure 9.4.1.** Étude de la mosaïque du tabac : représentation graphique de l'influence des différents traitements.

La variabilité des résultats et le type d'observations considéré (nombre de lésions) pourraient suggérer l'emploi d'une transformation racine carrée [STAT2, § 4.3.2]. Dans l'optique d'une présentation permettant de suivre éventuellement de façon détaillée la marche des calculs, nous préférons toutefois nous abstenir de procéder à un tel changement de variable.

### 2° Analyse de la variance

Le tableau 9.4.2 donne les résultats de l'analyse de la variance non orthogonale, la somme des carrés des écarts relative aux traitements étant ajustée en fonction des blocs, comme nous l'avons signalé au paragraphe 9.2.1.1°.

Ce tableau montre que les différences entre traitements ne sont pas significatives, et aussi que les différences entre blocs, c'est-à-dire entre feuilles, sont très importantes, ce qui apparaissait déjà à l'examen du tableau 9.4.1.

L'analyse de la variance à un critère de classification qui serait réalisée en tenant compte uniquement du facteur traitements est caractérisée par un carré moyen résiduel égal à 299,53, de telle sorte que l'efficacité relative du dispositif

**Tableau 9.4.2.** Étude de la mosaïque du tabac : tableau d'analyse de la variance.

| Sources de variation  | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | $F$  | $P$  |
|-----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|------|------|
| Traitements (ajust.). | 4                 | 117,40                       | 29,35         | 0,67 | 0,64 |
| Blocs                 | 9                 | 5.203,80                     | 578,20        |      |      |
| Variation résiduelle  | 6                 | 263,60                       | 43,93         |      |      |
| Totaux                | 19                | 5.584,80                     |               |      |      |

en blocs incomplets, par rapport à une expérience complètement aléatoire, est en première approximation :

$$299,53/43,93 = 6,82 \text{ ou } 682 \text{ \%}.$$

Pour atteindre la même précision que l'expérience en blocs incomplets basée sur 20 observations, soit quatre répétitions, il aurait donc été nécessaire de traiter et d'examiner environ 140 feuilles, soit 25 à 30 répétitions, dans le cadre d'une expérience complètement aléatoire.

### 3° Moyennes ajustées

Bien qu'on n'observe pas de différences significatives, et qu'aucune comparaison particulière de moyennes ne s'impose donc, nous présentons les valeurs des moyennes ajustées relatives aux différents traitements et leur procédure de calcul dans le tableau 9.4.3.

**Tableau 9.4.3.** Étude de la mosaïque du tabac : calcul des moyennes ajustées.

| $i$ | $\bar{x}_i$ | $\bar{x}'_i$ | $\hat{a}_i$ | $\hat{m}_i$ |
|-----|-------------|--------------|-------------|-------------|
| 1   | 37,75       | 37,125       | 1,0         | 30,4        |
| 2   | 27,75       | 27,250       | 0,8         | 30,2        |
| 3   | 37,00       | 34,500       | 4,0         | 33,4        |
| 4   | 26,75       | 27,000       | -0,4        | 29,0        |
| 5   | 17,75       | 21,125       | -5,4        | 24,0        |

Les valeurs  $\bar{x}_i$  sont les moyennes classiques des ensembles de quatre observations (12, 49, 68 et 22 pour  $\bar{x}_1$ , par exemple), tandis que les quantités  $\bar{x}'_i$  sont des moyennes de huit observations (12, 12, 34, 49, 69, 68, 22 et 31 pour  $\bar{x}'_1$ ). Quant aux effets principaux estimés  $\hat{a}_i$  et aux moyennes ajustées  $\hat{m}_i$ , leurs valeurs sont obtenues en appliquant les relations du paragraphe 9.2.1.2°.

On peut constater que certaines des moyennes ajustées sont très différentes des moyennes observées correspondantes. On peut vérifier aussi que la somme des

carrés des écarts ajustée relative aux traitements est liée de la manière suivante aux effets principaux estimés :

$$SCE'_a = 2,5 (1,0^2 + 0,8^2 + 4,0^2 + 0,4^2 + 5,4^2) = 117,40.$$

Enfin, l'erreur standard des différences de moyennes est :

$$\sqrt{0,8 (43,93)} = 5,93.$$

#### 4° Codification du modèle d'analyse de la variance

En vue d'obtenir le tableau 9.4.2, le modèle d'analyse de la variance peut être présenté de la manière suivante :

$$N = B \ T \quad \text{et} \quad N \sim B + T,$$

respectivement pour les logiciels Minitab et SAS d'une part (commande ou procédure « *glm* »), et R d'autre part (fonction « *aov* »), N, B et T désignant les nombres de lésions et les facteurs blocs (feuilles) et traitements.

On notera que l'ordre « B suivi de T » doit être respecté, pour que les résultats relatifs au facteur traitements soient ajustés en fonction de l'existence du facteur blocs.

## 9.5 Exemple 2 : expérience en réseau carré équilibré

### ⊖ 9.5.1 Présentation et données

#### 1° Présentation générale

Une expérience destinée à comparer différentes variétés de betterave sucrière, réalisée dans le cadre de l'Institut belge pour l'Amélioration de la Betterave, à Tirlemont, constitue une deuxième illustration des dispositifs en blocs incomplets, au sens large. Les variétés étudiées sont au nombre de 13, y compris une variété témoin.

Les parcelles ont une surface utile de 6,75 m<sup>2</sup>, abstraction faite des bordures, et comportent normalement 50 à 60 betteraves (trois lignes de 5 m de longueur, espacées de 45 cm).

Les observations réalisées concernent le nombre de betteraves par parcelle, le rendement en betteraves par parcelle et la teneur en sucre (ou richesse saccharine) des betteraves, cette dernière caractéristique étant déterminée à partir d'échantillons de betteraves prélevés dans les productions des différentes parcelles. Les trois variables ainsi observées permettent de calculer d'autres données, telles que le poids moyen des betteraves, le rendement en betteraves par hectare, le rendement en sucre par parcelle et par hectare, et la valeur financière de la récolte.

### 2° Dispositif expérimental

En vue d'augmenter au maximum la précision des comparaisons entre les nouvelles variétés et la variété témoin, il a été décidé de multiplier par trois ou par quatre le nombre de répétitions du témoin (§ 2.2.2.2°). D'autre part, afin d'assurer le meilleur contrôle possible de l'hétérogénéité du champ d'expérience, un dispositif en réseau carré équilibré a été adopté.

En considérant les 12 nouvelles variétés et quatre fois la variété témoin, soit au total 16 « objets », et avec cinq répétitions, un réseau carré équilibré permet de disposer à la fois de cinq répétitions de chacune des 12 nouvelles variétés et de 20 répétitions de la variété témoin.

La figure 9.1.3, qui nous a servi à introduire la notion d'expérience en réseau carré équilibré (§ 9.1.3), présente en fait le dispositif qui a été choisi pour l'expérience dont il est question ici, sans respecter toutefois la forme exacte des parcelles et sans faire état des sentiers et des chemins d'accès.

Les numéros d'ordre des « objets » ont été tirés au hasard, la variété témoin se voyant affecter les numéros 3, 5, 9 et 16, et les autres numéros étant attribués aux 12 nouvelles variétés.

### 3° Données

Nous considérons à titre d'exemple les teneurs en sucre, exprimées en pourcentages. Les valeurs observées pour cette variable figurent dans le tableau 9.5.1.

## ⊖ 9.5.2 Analyse des résultats

### 1° Examen préliminaire

La figure 9.5.1 donne une représentation graphique des teneurs en sucre relatives aux différentes « variétés », celles-ci étant rangées dans l'ordre croissant de leurs moyennes (tableau 9.5.1). On remarquera que les numéros 3, 5, 9 et 16 ont été remplacés par la lettre T, en vue de rappeler qu'il s'agit de quatre répétitions d'un même témoin.

Aucune tendance très nette n'apparaît dans la figure en question, les moyennes par « variété » étant peu différentes les unes des autres, avec des valeurs extrêmes égales à 16,28 et 17,30 %, respectivement pour un des témoins (n° 16) et pour la variété n° 8. On peut toutefois observer que les quatre témoins se situent dans la partie inférieure du graphique, leur moyenne générale étant égale à 16,495 %.

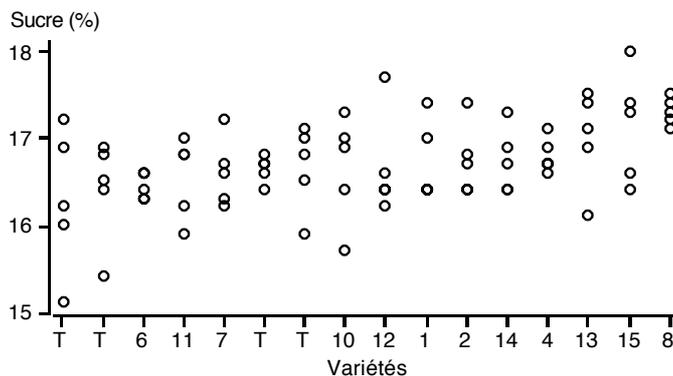
En outre, la figure 9.5.1 ne met en évidence aucune anomalie particulière.

### 2° Analyse de la variance

Le tableau 9.5.2 présente les résultats de l'analyse de la variance, réalisée sans transformation de variable, les valeurs observées étant des pourcentages allant de

**Tableau 9.5.1.** Comparaison de variétés de betterave sucrière : teneurs en sucre, moyennes observées et différentes valeurs dérivées, en pourcentages.

| Var. | Répétitions |      |      |      |      | Moy. obs. | Moyennes        |                  | Effets princ. | Moy. ajust. |
|------|-------------|------|------|------|------|-----------|-----------------|------------------|---------------|-------------|
|      | 1           | 2    | 3    | 4    | 5    |           | $\bar{x}'_{i.}$ | $\bar{x}''_{i.}$ |               |             |
| 1    | 17,4        | 16,4 | 16,4 | 17,0 | 16,4 | 16,72     | 16,645          | 16,790           | -0,012        | 16,695      |
| 2    | 16,7        | 16,4 | 17,4 | 16,8 | 16,4 | 16,74     | 16,730          | 16,795           | -0,129        | 16,578      |
| 3    | 17,1        | 16,8 | 15,9 | 17,0 | 16,5 | 16,66     | 16,660          | 16,615           | 0,154         | 16,862      |
| 4    | 16,7        | 16,7 | 16,6 | 16,9 | 17,1 | 16,80     | 16,765          | 16,740           | 0,004         | 16,712      |
| 5    | 16,5        | 16,9 | 15,4 | 16,4 | 16,8 | 16,40     | 16,450          | 16,640           | 0,029         | 16,737      |
| 6    | 16,6        | 16,6 | 16,3 | 16,3 | 16,4 | 16,44     | 16,850          | 16,505           | -0,346        | 16,362      |
| 7    | 17,2        | 16,7 | 16,3 | 16,6 | 16,2 | 16,60     | 16,690          | 16,720           | -0,171        | 16,537      |
| 8    | 17,1        | 17,2 | 17,5 | 17,4 | 17,3 | 17,30     | 16,870          | 16,875           | 0,438         | 17,145      |
| 9    | 16,7        | 16,7 | 16,4 | 16,6 | 16,8 | 16,64     | 16,695          | 16,765           | -0,187        | 16,520      |
| 10   | 17,3        | 16,4 | 15,7 | 16,9 | 17,0 | 16,66     | 16,590          | 16,765           | 0,021         | 16,728      |
| 11   | 16,2        | 16,8 | 15,9 | 17,0 | 16,8 | 16,54     | 16,915          | 16,570           | -0,396        | 16,312      |
| 12   | 16,4        | 17,7 | 16,2 | 16,6 | 16,4 | 16,66     | 16,720          | 16,720           | -0,121        | 16,587      |
| 13   | 16,1        | 17,4 | 17,5 | 17,1 | 16,9 | 17,00     | 16,855          | 16,705           | 0,246         | 16,953      |
| 14   | 17,3        | 16,9 | 16,4 | 16,7 | 16,4 | 16,74     | 16,715          | 16,695           | 0,062         | 16,770      |
| 15   | 18,0        | 17,3 | 17,4 | 16,4 | 16,6 | 17,14     | 16,740          | 16,835           | 0,454         | 17,162      |
| 16   | 17,2        | 16,0 | 15,1 | 16,9 | 16,2 | 16,28     | 16,430          | 16,585           | -0,046        | 16,662      |

**Figure 9.5.1.** Comparaison de variétés de betterave sucrière : représentation graphique des observations relatives aux différentes variétés<sup>25</sup>.

15,1 à 18,0 %. Cette analyse montre que les différences entre les variétés ne sont pas significatives.

<sup>25</sup> Certains points correspondent en fait à deux ou trois valeurs identiques, de telle sorte que certaines variétés ne sont représentées que par quatre ou même trois points seulement.

**Tableau 9.5.2.** Comparaison de variétés de betterave sucrière :  
tableau d'analyse de la variance.

| Sources de variation | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | F    | P    |
|----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|------|------|
| Variétés (ajust.)    | 15                | 2,584                        | 0,1723        | 1,22 | 0,31 |
| Répétitions          | 4                 | 2,482                        | 0,6205        |      |      |
| Lignes (dans rép.)   | 15                | 7,009                        | 0,4673        |      |      |
| Colonnes (dans rép.) | 15                | 3,874                        | 0,2583        |      |      |
| Variation résiduelle | 30                | 4,227                        | 0,1409        |      |      |
| Totaux               | 79                | 20,176                       |               |      |      |

Le tableau 9.5.2 indique aussi que le facteur répétitions joue un rôle relativement prépondérant, et que les différences entre les lignes et entre les colonnes (dans les répétitions) ne sont pas négligeables non plus.

Plus concrètement, l'analyse de la variance à deux critères de classification qui ne ferait intervenir que les facteurs variétés et répétitions, à l'exclusion des lignes et des colonnes, est caractérisée par un carré moyen résiduel égal à 0,2087, de telle sorte que l'efficacité relative du dispositif en réseau carré équilibré, par rapport à une expérience en blocs aléatoires complets, est en première approximation :

$$0,2087/0,1409 = 1,48 \text{ ou } 148 \text{ \%}.$$

De même, on peut montrer que l'efficacité relative de ce dernier dispositif par rapport à une expérience complètement aléatoire est :

$$0,2344/0,2087 = 1,12 \text{ ou } 112 \text{ \%}.$$

L'introduction des facteurs lignes et colonnes s'avère donc particulièrement justifiée dans le cas envisagé.

### 3° Moyennes ajustées

Comme au paragraphe 9.4.2.3°, bien que les différences observées ne soient pas significatives, nous effectuons à titre indicatif le calcul des moyennes ajustées.

Dans cette optique, les dernières colonnes du tableau 9.5.1 contiennent successivement les moyennes observées  $\bar{x}_{i..}$ , les moyennes  $\bar{x}'_{i.}$  des différentes lignes dans lesquelles se trouve chacune des variétés, les moyennes  $\bar{x}''_{i.}$  des différentes colonnes dans lesquelles se trouve chacune des variétés, les effets principaux estimés  $\hat{a}_i$  et les moyennes ajustées  $\hat{m}_i$ . Ces derniers résultats peuvent être obtenus à l'aide des relations :

$$\hat{a}_i = (5/3) (\bar{x}_{i.} - \bar{x}'_{i.} - \bar{x}''_{i.} + \bar{x}_{..}) \quad \text{et} \quad \hat{m}_i = \bar{x}_{..} + \hat{a}_i,$$

le facteur 5/3 correspondant à  $(k+1)/(k-1)$  et le symbole  $\bar{x}_{..}$  désignant la moyenne générale de toutes les observations, égale à 16,7075 %.

On peut vérifier en outre que la quantité :

$$SCE'_a = (k - 1) \sum_{i=1}^p \hat{a}_i^2,$$

correspond bien à la somme des carrés des écarts ajustée relative aux variétés.

Enfin, si les différences entre variétés avaient été significatives, on aurait pu comparer les 12 nouvelles variétés à la variété témoin à l'aide du test de DUNNETT [STAT2, § 12.3.2].

À cet égard, on peut noter que l'erreur standard des différences entre la moyenne de l'ensemble des résultats ajustés relatifs à la variété témoin, égale à 16,495 %, et les moyennes ajustées relatives aux autres variétés est :

$$\sqrt{\frac{5}{3} \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \right)} 0,1409 = 0,242 \text{ \%}.$$

De même, l'erreur standard des différences entre les moyennes ajustées relatives à d'autres variétés que la variété témoin est :

$$\sqrt{\frac{5}{3} \frac{2}{5}} 0,1409 = 0,306 \text{ \%}.$$

#### 4° Codification du modèle d'analyse de la variance

Le contenu du tableau 9.5.2 peut être obtenu à l'aide des expressions :

$$S = R \ L(R) \ C(R) \ V \quad \text{et} \quad S = R \ L|R \ C|R \ V,$$

respectivement pour les logiciels Minitab et SAS (commande ou procédure « *glm* »), S désignant les teneurs en sucre et R, L, C et V les facteurs répétitions, lignes, colonnes et variétés.

Quant au logiciel R (fonction « *ao*v »), la forme suivante peut être adoptée :

$$S \sim R + L + C + V,$$

à condition de numéroter les lignes et les colonnes (L et C) de 1 à 20, globalement pour l'ensemble des cinq répétitions.

Comme dans les autres cas d'analyse de la variance non orthogonale (§ 9.4.2.4° notamment), l'ordre de présentation des variables doit être respecté.



# Chapitre 10

## Les expériences en blocs aléatoires incomplets : expériences factorielles

### Sommaire

- 10.1 Principes**
  - 10.1.1 Généralités
  - ⊖ 10.1.2 La confusion complète
  - ⊖ 10.1.3 La confusion partielle
  - ⊖ 10.1.4 Les expériences factorielles fractionnaires et à répétition unique
  - ⊖ 10.1.5 Quelques principes de construction
- ⊖ **10.2 Analyse des résultats**
- ⊖ **10.3 Discussion**
- 10.4 Exemple : expérience avec confusion complète**
  - ⊖ 10.4.1 Présentation et données
  - ⊖ 10.4.2 Analyse des résultats

## 10.1 Principes

### 10.1.1 Généralités

Les problèmes que pose la prise en considération d'objets en nombre plus élevé que le nombre d'unités expérimentales par bloc se présentent également pour les expériences factorielles, complètes ou fractionnaires. Les nombres d'objets augmentent en effet très rapidement avec le nombre de facteurs étudiés, dans le cas de ces expériences (§ 2.3.1.3°).

Le principe de la *confusion d'effets*<sup>1</sup> permet de remédier à ces difficultés. Ce principe conduit à constituer des blocs incomplets, parfois réunis en répétitions complètes, de telle sorte que les différences entre blocs soient confondues avec certaines interactions, auxquelles on ne s'intéresse pas particulièrement ou qu'on peut négliger lors de l'interprétation des résultats.

On notera que les dispositifs présentés au chapitre 9, en faisant allusion uniquement aux expériences non factorielles, peuvent en réalité être utilisés également pour les expériences factorielles. Dans ce dernier cas toutefois, le recours à la confusion d'effets, présentée ici, est en général plus adéquat.

Enfin, la notion de confusion d'effets permet aussi d'explicitier certains concepts relatifs à la structure des objets, dans le cas des expériences factorielles fractionnaires (§ 2.3.3).

### ⊖ 10.1.2 La confusion complète

#### 1° Exemple

La figure 10.1.1 indique ce que peut être, par confusion d'effets, la disposition des huit objets d'une expérience  $2^3$  organisée en blocs de quatre unités expérimentales, avec trois répétitions. Chaque ligne de cette figure constitue un bloc de quatre unités, et chaque groupe de deux lignes constitue une répétition complète des huit objets.

On peut remarquer qu'indépendamment de la répartition aléatoire des blocs au sein des répétitions et des objets au sein des blocs, les huit combinaisons des lettres a, b et c sont toujours groupées de la même manière : (1), ab, ac et bc d'une part, a, b, c et abc d'autre part. On peut démontrer que l'interaction des trois facteurs est ainsi confondue avec les éventuelles différences aléatoires qui peuvent exister entre les blocs, dans les répétitions, du fait de l'hétérogénéité du matériel expérimental.

On notera aussi l'analogie qui existe entre ce dispositif et le deuxième exemple de la figure 9.1.1, relatif à une expérience non factorielle qui comportait également huit objets réunis en blocs de quatre unités expérimentales.

<sup>1</sup> En anglais : *confounding*.

|    |     |     |     |
|----|-----|-----|-----|
| ac | bc  | ab  | (1) |
| b  | a   | abc | c   |
| a  | abc | c   | b   |
| bc | (1) | ac  | ab  |
| c  | a   | b   | abc |
| bc | ab  | (1) | ac  |

**Figure 10.1.1.** Exemple de confusion complète.

## 2° Démonstration

La démonstration du fait que le dispositif présenté ci-dessus « confond » les différences entre blocs avec l'interaction des trois facteurs peut être réalisée assez simplement en se basant, comme au paragraphe 2.3.3.3°, sur le modèle mathématique de l'analyse de la variance à trois critères de classification [STAT2, § 11.2.3] :

$$X_{ijkl} = m_{...} + a_i + b_j + c_k + (ab)_{ij} + (ac)_{ik} + (bc)_{jk} + (abc)_{ijk} + D_{ijkl}.$$

Dans ce modèle, le terme d'interaction des trois facteurs est défini de la manière suivante, en fonction des différentes moyennes théoriques :

$$(abc)_{ijk} = m_{ijk} - m_{ij.} - m_{i.k} - m_{.jk} + m_{i..} + m_{.j.} + m_{..k} - m_{...}.$$

Pour des facteurs possédant chacun deux modalités seulement, ce terme est, en valeur absolue, indépendant des valeurs des indices  $i$ ,  $j$  et  $k$ , et est donc toujours égal à  $\pm (abc)_{111}$ . De plus, ce dernier terme est alors :

$$\begin{aligned} (abc)_{111} &= m_{111} - (m_{111} + m_{112})/2 - (m_{111} + m_{121})/2 - (m_{111} + m_{211})/2 \\ &\quad + (m_{111} + m_{112} + m_{121} + m_{122})/4 + (m_{111} + m_{112} + m_{211} + m_{212})/4 \\ &\quad + (m_{111} + m_{121} + m_{211} + m_{221})/4 \\ &\quad - (m_{111} + m_{112} + m_{121} + m_{122} + m_{211} + m_{212} + m_{221} + m_{222})/8, \end{aligned}$$

ou encore, après réduction au même dénominateur et simplification :

$$(abc)_{111} = [(m_{111} + m_{122} + m_{212} + m_{221}) - (m_{112} + m_{121} + m_{211} + m_{222})]/8.$$

En tenant compte de l'équivalence entre les différentes notations relatives aux expériences factorielles (§ 2.3.2), cette relation peut aussi s'écrire :

$$(abc)_{111} = [(m_{(1)} + m_{bc} + m_{ac} + m_{ab}) - (m_c + m_b + m_a + m_{abc})]/8.$$

Cette formulation met bien en évidence la distinction entre les deux groupes d'objets (1), ab, ac et bc d'une part, a, b, c et abc d'autre part. Les différences

de moyennes qui existeraient éventuellement entre ces deux groupes d'objets sont donc effectivement intégrées aux termes d'interaction des trois facteurs.

### 3° Randomisation

Des listes de dispositifs relatifs aux expériences factorielles et basés sur le principe de la confusion d'effets figurent dans différents ouvrages classiques, tels que celui de COCHRAN et COX [1957]. Et de tels dispositifs peuvent être générés aussi à l'aide de certains des logiciels que nous avons mentionnés dans l'introduction générale.

Dans tous les cas, la répartition au hasard doit se faire par une permutation aléatoire éventuelle des répétitions et une permutation aléatoire des blocs au sein des répétitions et des objets au sein des blocs.

## ⊖ 10.1.3 La confusion partielle

### 1° Confusion complète et partielle

Dans l'exemple qui vient d'être présenté de manière détaillée, la même interaction (interaction des trois facteurs) est confondue dans toutes les répétitions avec les différences entre blocs. Une telle confusion est dite *complète*<sup>2</sup>.

Dans d'autres cas, plusieurs composantes (interactions ou même facteurs principaux) sont confondues avec les différences entre blocs, ces composantes variant d'une répétition à l'autre. La confusion est alors dite *partielle*<sup>3</sup>.

### 2° Cas 2<sup>2</sup>

Pour une expérience 2<sup>2</sup> en blocs de deux unités expérimentales, on peut adopter par exemple le dispositif de la figure 10.1.2, qui comprend six répétitions complètes.

|       |       |        |       |        |       |
|-------|-------|--------|-------|--------|-------|
| b (1) | b ab  | ab (1) | a (1) | (1) ab | a ab  |
| a ab  | (1) a | a b    | ab b  | a b    | (1) b |

**Figure 10.1.2.** Exemple de confusion partielle.

Dans la première et la dernière répétition, les objets (1) et b forment un premier bloc et les objets a et ab un deuxième bloc : les différences entre blocs sont ainsi confondues avec l'influence du premier facteur (A). De même, dans la deuxième et la quatrième répétition, les objets (1) et a sont réunis dans un bloc et les objets b et ab dans l'autre, les différences entre blocs étant confondues avec l'influence du deuxième facteur (B). Enfin, dans la troisième et la cinquième répétition, on

<sup>2</sup> En anglais : *complete confounding*.

<sup>3</sup> En anglais : *partial confounding*.

retrouve d'une part les objets (1) et ab et d'autre part les objets a et b : les différences entre blocs sont alors confondues avec l'interaction des deux facteurs.

Au total, les trois sources de variation (deux facteurs principaux et interaction des deux facteurs) sont donc confondues un même nombre de fois avec les différences entre blocs.

### 3° Cas $3^3$

La figure 10.1.3 présente aussi le schéma d'une expérience  $3^3$ , comportant 27 objets et organisée en blocs de neuf unités expérimentales, avec deux répétitions. Ce cas est dans une certaine mesure intermédiaire entre la confusion complète et la confusion partielle.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 321 | 313 | 233 | 222 | 131 | 112 | 211 | 332 | 123 |
| 331 | 111 | 323 | 232 | 122 | 221 | 213 | 133 | 312 |
| 311 | 132 | 121 | 113 | 333 | 322 | 212 | 231 | 223 |
| 132 | 321 | 312 | 213 | 123 | 222 | 231 | 111 | 333 |
| 311 | 212 | 131 | 233 | 122 | 323 | 332 | 113 | 221 |
| 223 | 112 | 232 | 331 | 121 | 133 | 211 | 313 | 322 |

**Figure 10.1.3.** Exemple de confusion d'effets dans le cas  $3^3$ .

L'interaction des trois facteurs, avec huit degrés de liberté, peut en effet être décomposée en huit contrastes orthogonaux. Et on peut démontrer que deux de ces huit contrastes sont confondus avec les différences entre blocs dans la première répétition (trois premières lignes de la figure 10.1.3), tandis que deux autres composantes de cette interaction sont confondues avec les différences entre blocs dans la deuxième répétition (trois dernières lignes de la figure 10.1.3).

Des éléments distincts sont donc confondus avec les différences entre blocs dans les différentes répétitions, mais ces éléments appartiennent tous à la même interaction.

### 4° Confusion d'effets et expériences en parcelles divisées

Il est intéressant de signaler que les expériences en blocs aléatoires complets avec parcelles divisées (*split-plot*) peuvent être considérées aussi, dans une certaine mesure, comme des cas particuliers de confusion complète.

Dans le cas le plus courant de deux facteurs, si on admet que les grandes parcelles du paragraphe 7.1.1.1° correspondent aux blocs dont il est question ici, l'élément confondu avec le facteur blocs est le facteur principal associé à ces grandes parcelles, et cette confusion d'effets intervient de la même manière dans les différentes répétitions. Il s'agit donc bien d'une confusion complète, relative à un des deux facteurs principaux.

### ⊖ 10.1.4 Les expériences factorielles fractionnaires et à répétition unique

#### 1° Confusion d'effets et expériences factorielles fractionnaires

Les expériences factorielles fractionnaires, auxquelles est consacré le paragraphe 2.3.3, sont étroitement liées à la notion de confusion d'effets. Les sous-ensembles d'objets qui sont pris en considération dans ces expériences correspondent en fait aux blocs incomplets qui sont définis ici.

Ainsi, les sous-ensembles (1), ab, ac et bc, et a, b, c et abc de la figure 10.1.1 sont identiquement ceux qui ont été envisagés au paragraphe 2.3.3.2°.

Mais les expériences factorielles fractionnaires peuvent aussi être organisées elles-mêmes en blocs incomplets. Le principe de la confusion d'effets intervient alors à la fois dans la définition du sous-ensemble d'objets qui est considéré, et dans la constitution des blocs.

#### 2° Exemple

Pour une demi-répétition d'une expérience  $2^6$  par exemple, c'est-à-dire pour une expérience de type  $2^{6-1}$ , on peut répartir les 32 objets étudiés en deux blocs de 16 unités expérimentales, sans perdre aucune information en ce qui concerne les six facteurs principaux et les 15 interactions de deux facteurs. La répartition peut être notamment celle qui est présentée à la figure 10.1.4.

|        |      |      |      |      |      |      |      |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|
| bc     | acde | de   | ab   | bcd  | (1)  | acdf | abde |
| bcef   | ef   | acef | abef | abdf | bcde | df   | ac   |
| abcdef | ae   | abcd | ad   | af   | abce | cf   | bf   |
| be     | ce   | cdef | adef | cd   | bdef | bd   | abcf |

**Figure 10.1.4.** Exemple d'expérience factorielle fractionnaire en blocs incomplets avec confusion d'effets.

Une répartition en blocs de quatre ou de huit unités expérimentales pourrait aussi être envisagée, mais on peut démontrer que certaines interactions de deux facteurs doivent alors être nécessairement confondues avec les différences entre blocs.

#### 3° Répétition unique

Le principe de la confusion d'effets peut également être appliqué aux expériences factorielles qui ne comportent qu'une seule répétition (§ 2.3.2.8°). La figure 10.1.5 illustre le cas de cinq facteurs qui seraient étudiés en quatre blocs de huit unités expérimentales, sans perte d'information au sujet des facteurs principaux et des interactions de deux facteurs.

|      |     |       |      |     |    |      |      |
|------|-----|-------|------|-----|----|------|------|
| bc   | abd | abe   | (1)  | acd | de | bcde | ace  |
| acde | bce | ab    | ac   | bcd | e  | abde | d    |
| bde  | ae  | cde   | abce | ad  | b  | c    | abcd |
| be   | ce  | abcde | a    | abc | cd | bd   | ade  |

**Figure 10.1.5.** Exemple d'expérience factorielle à répétition unique en blocs incomplets avec confusion d'effets.

Un autre exemple est fourni par la première moitié ou la deuxième moitié de la figure 10.1.3, si on envisage d'étudier trois facteurs présentant chacun trois modalités en une seule répétition, constituée de trois blocs de neuf unités expérimentales.

## ⊖ 10.1.5 Quelques principes de construction

### 1° Expériences $2^k$ en deux blocs

Les différents exemples qui ont été présentés ci-dessus permettent d'introduire de façon intuitive quelques principes relatifs aux modalités de construction des dispositifs en blocs incomplets avec confusion d'effets, dans le cas des expériences factorielles  $2^k$ .

Quand une ou plusieurs répétitions complètes doivent être divisées chacune en deux blocs, on confond généralement avec les différences entre blocs l'interaction qui fait intervenir tous les facteurs. Tel est le cas notamment pour l'exemple de la figure 10.1.1.

Tous les objets définis par un nombre impair de lettres (a, b, ..., abc, etc.) sont alors réunis dans un bloc, tandis que tous les objets définis par un nombre pair de lettres (ab, ac, etc.), y compris l'objet (1), constituent l'autre bloc. Nous avons vu qu'il en est ainsi également dans la constitution de demi-répétitions d'expériences factorielles  $2^k$  (§ 2.3.3).

### 2° Expériences $2^k$ en quatre blocs

Quand une ou plusieurs répétitions complètes doivent être divisées chacune en quatre blocs, on doit choisir deux interactions à confondre avec les différences entre blocs. Ce choix implique nécessairement le choix d'une troisième interaction qui est également confondue avec les différences entre blocs.

Ainsi, dans l'exemple de la figure 10.1.5, les interactions qui ont été choisies pour constituer les blocs sont ABC et ADE, et l'interaction BCDE en découle. Cette dernière peut être obtenue par une multiplication symbolique des deux premières, en considérant que  $A^2$  (ou, d'une façon plus générale,  $A^2, B^2, C^2, \dots$ ) est égal à 1 :

$$(ABC)(ADE) = A^2BCDE = BCDE.$$

Les trois interactions en question constituent les *contrastes* ou *mots de définition*<sup>4</sup> des blocs, auxquels correspondent les trois degrés de liberté qui sont associés aux différences existant entre les quatre blocs.

On notera qu'il est indispensable de partir ici d'interactions de trois facteurs, au risque sinon de voir figurer, parmi les contrastes de définition, une interaction de deux facteurs, telle que par exemple AE en partant de ABCD et BCDE, puisque :

$$(ABCD)(BCDE) = AB^2C^2D^2E = AE.$$

### 3° Constitution des blocs

Les contrastes de définition des blocs étant choisis, on peut procéder à la constitution des blocs eux-mêmes selon les principes suivants, illustrés encore à l'aide de l'exemple de la figure 10.1.5.

Si seule l'interaction ABC devait être confondue avec les différences entre blocs, le premier bloc devrait contenir les objets :

(1), ab, ac, bc, d, abd, acd, bcd, e, abe, ace, bce, de, abde, acde, bcde,

et le deuxième bloc, les objets :

a, b, c, abc, ad, bd, cd, abcd, ae, be, ce, abce, ade, bde, cde, abcde.

Ce résultat peut être obtenu en partant des objets qui constituent les deux blocs associés à l'interaction ABC dans le cas  $2^3$  (figure 10.1.1), et en ajoutant à ces objets ceux dont le symbole contient en outre les deux lettres restantes, soit séparément (d ou e), soit conjointement (d et e).

De la même façon, on peut établir que, si seule l'interaction ADE devait être confondue avec les différences entre blocs, les deux blocs seraient, d'une part :

(1), ad, ae, de, b, abd, abe, bde, c, acd, ace, cde, bc, abcd, abce, bcde,

et d'autre part :

a, d, e, ade, ab, bd, be, abde, ac, cd, ce, acde, abc, bcd, bce, abcde.

Pour que les deux interactions soient simultanément confondues avec les différences entre blocs, dans une répétition alors divisée en quatre blocs, il faut par exemple que le premier des quatre blocs réunisse les objets communs au premier bloc relatif à ABC et au premier bloc relatif à ADE :

(1), bc, de, abd, abe, acd, ace, bcde;

---

<sup>4</sup> En anglais : *defining contrast*.

que le deuxième bloc réunisse les objets communs au premier bloc relatif à ABC et au deuxième bloc relatif à ADE :

$$d, e, ab, ac, bcd, bce, abde, acde;$$

que le troisième bloc réunisse les objets communs au deuxième bloc relatif à ABC et au premier bloc relatif à ADE :

$$b, c, ad, ae, bde, cde, abcd, abce;$$

et que le quatrième bloc réunisse les objets communs au deuxième bloc relatif à ABC et au deuxième bloc relatif à ADE :

$$a, bd, be, cd, ce, abc, ade, abcde.$$

Tel est bien le contenu de la figure 10.1.5.

#### 4° Relations entre les blocs

On peut remarquer que les quatre blocs ainsi définis sont aussi liés les uns aux autres par des relations de multiplication. Pour établir de telles relations, il faut adopter la convention :

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = 1,$$

qui est analogue à celle utilisée ci-dessus pour les lettres majuscules.

Les objets du deuxième bloc peuvent alors être obtenus par une multiplication symbolique des objets du premier bloc par d ou par e :

$$(bc)d = bcd, (abd)d = ab, \text{ etc.} \quad \text{et} \quad (bc)e = bce, (abd)e = abde, \text{ etc.},$$

et vice-versa :

$$(acde)d = ace, (bce)d = bcde, \text{ etc.} \quad \text{et} \quad (acde)e = acd, (bce)e = bc, \text{ etc.}$$

De même, le premier et le troisième bloc sont liés par une multiplication symbolique par b ou par c :

$$(bc)b = c, (abd)b = ad, \text{ etc.} \quad \text{et} \quad (bc)c = b, (abd)c = abcd, \text{ etc.},$$

$$(bde)b = de, (ae)b = abe, \text{ etc.} \quad \text{et} \quad (bde)c = bcde, (ae)c = ace, \text{ etc.},$$

le premier et le quatrième bloc par une multiplication par a, le deuxième et le troisième bloc par une multiplication par a également, le deuxième et le quatrième bloc par une multiplication par b ou par c, et enfin, le troisième et le quatrième bloc par une multiplication par d ou par e.

Ces propriétés peuvent simplifier la construction des blocs et permettent d'effectuer dans certains cas d'utiles vérifications.

### 5° Compléments

Les principes qui viennent d'être présentés s'appliquent également au cas des expériences factorielles fractionnaires, tant en ce qui concerne le choix des sous-ensembles d'objets que la constitution des blocs.

Dans le cas  $2^6$  qui est envisagé à la figure 10.1.4 par exemple, les contrastes de définition qui sont utilisés sont les interactions ABC, DEF et ABCDEF, et seuls deux des quatre blocs qui peuvent être définis à l'aide de ces contrastes ont été retenus. De plus, dans les deux sens, le passage d'un bloc à l'autre peut être réalisé par une multiplication symbolique des objets par ad.

Tous ces principes peuvent être facilement étendus à n'importe quelle expérience factorielle du type  $2^k$ , et peuvent être adaptés à d'autres types d'expériences, telle que la série  $3^k$ . On trouvera des informations complémentaires à ce sujet notamment dans les livres de COCHRAN et COX [1957], FINNEY [1960] et KUEHL [2000], et dans les articles de COLLINGS [1989], FRANKLIN [1985], et GHOSH et BAGUI [1998].

On peut mentionner aussi d'autres publications, telles que celles de CHEN *et al.* [2006], CHENG et WU [2002], KERR [2006], et XU et LAU [2006]. Ces travaux associent parfois, aux blocs incomplets, certains critères d'optimalité (§ 2.4.3), de même que des notions de parcelles divisées (§ 7.1 et 7.3), en raison du fait que les modalités des différents facteurs pris en considération peuvent être plus ou moins difficiles à modifier (§ 5.3.3°).

## ⊖ 10.2 Analyse des résultats

### 1° Analyse de la variance

Une fois encore, l'analyse de la variance est ici très souvent à la base de l'interprétation des résultats des expériences.

Dans le cas de la confusion complète, le calcul des effets principaux et des interactions non confondues avec le facteur blocs doit être réalisé selon les principes habituels. Il en est de même pour les différences entre répétitions et entre blocs dans les répétitions.

Dans le cas de la confusion partielle par contre, des techniques particulières doivent être utilisées pour « récupérer » les éléments d'information qui restent disponibles au sujet des interactions et, éventuellement, des facteurs principaux qui sont confondus avec les différences entre blocs.

D'autres méthodes que l'analyse de la variance peuvent cependant aussi être utilisées. On peut penser notamment à l'étude des diagrammes ou des demi-diagrammes de probabilité, et aux méthodes qui sont parfois associées à ces diagrammes, dont la méthode LENTH (§ 5.2.5°) [LOEPPKY et SITTE, 2002].

## 2° Exemples

À titre d'illustrations des quelques principes qui viennent d'être exposés, les tableaux 10.2.1, 10.2.2 et 10.2.3 donnent les schémas des analyses de la variance qui correspondent aux différentes situations envisagées aux paragraphes 10.1.2 et 10.1.3, et cela tant d'une manière générale que pour les différents exemples considérés.

**Tableau 10.2.1.** Schéma de l'analyse de la variance relative à une expérience  $2^3$  en blocs de quatre unités expérimentales, avec confusion complète, dans le cas général et dans le cas particulier de trois répétitions.

| Sources de variation                           | Degrés de liberté |    |
|--|-------------------|----|
| Facteur A                                      | 1                 | 1  |
| Facteur B                                      | 1                 | 1  |
| Facteur C                                      | 1                 | 1  |
| Interaction AB                                 | 1                 | 1  |
| Interaction AC                                 | 1                 | 1  |
| Interaction BC                                 | 1                 | 1  |
| Répétitions                                    | $r - 1$           | 2  |
| Blocs (dans répétitions)<br>et interaction ABC | $r$               | 3  |
| Variation résiduelle                           | $6(r - 1)$        | 12 |
| Totaux   | $8r - 1$          | 23 |

**Tableau 10.2.2.** Schéma de l'analyse de la variance relative à une expérience  $2^2$  en blocs de deux unités expérimentales, avec confusion partielle, dans le cas général ( $r \geq 3$ ) et dans le cas particulier de six répétitions.

| Sources de variation     | Degrés de liberté |    |
|--------------------------|-------------------|----|
| Facteur A                | 1                 | 1  |
| Facteur B                | 1                 | 1  |
| Interaction AB           | 1                 | 1  |
| Répétitions              | $r - 1$           | 5  |
| Blocs (dans répétitions) | $r$               | 6  |
| Variation résiduelle     | $2r - 3$          | 9  |
| Totaux                   | $4r - 1$          | 23 |

Aucun problème particulier ne se pose dans le premier cas (tableau 10.2.1). Dans le deuxième cas au contraire (tableau 10.2.2), il ne faut pas perdre de vue le fait que les deux facteurs principaux et leur interaction sont partiellement confondus avec le facteur blocs.

**Tableau 10.2.3.** Schéma de l'analyse de la variance relative à une expérience  $3^3$  en blocs de neuf unités expérimentales, avec confusion partielle, dans le cas général ( $1 \leq r \leq 4$ ) et dans le cas particulier de deux répétitions.

| Sources de variation                           | Degrés de liberté |    |
|--|-------------------|----|
| Facteur A                                      | 2                 | 2  |
| Facteur B                                      | 2                 | 2  |
| Facteur C                                      | 2                 | 2  |
| Interaction AB                                 | 4                 | 4  |
| Interaction AC                                 | 4                 | 4  |
| Interaction BC                                 | 4                 | 4  |
| Interaction ABC                                | $2(4 - r)$        | 4  |
| Répétitions                                    | $r - 1$           | 1  |
| Blocs (dans répétitions)<br>et interaction ABC | $2r$              | 4  |
| Variation résiduelle                           | $26(r - 1)$       | 26 |
| Totaux   | $27r - 1$         | 53 |

Dans le troisième cas enfin (tableau 10.2.3), l'analyse qui est présentée suppose que les différences entre blocs sont confondues, dans les différentes répétitions, avec des composantes différentes de l'interaction des trois facteurs. La ligne « Interaction ABC » est alors relative aux composantes de l'interaction des trois facteurs qui ne sont pas confondues avec le facteur blocs, tandis que la ligne « Blocs (dans répétitions) et interaction ABC » concerne les composantes de l'interaction qui sont confondues avec le facteur blocs.

Dans ce dernier cas, pour une répétition unique, la ligne « Variation résiduelle » disparaîtrait, et on pourrait envisager d'effectuer les tests relatifs aux trois facteurs et à leurs interactions simples par rapport à la composante « Interaction ABC », avec six degrés de liberté.

## ⊖ 10.3 Discussion

Des commentaires analogues à ceux qui ont été formulés au paragraphe 9.3 peuvent être émis au sujet de la confusion d'effets, en ce qui concerne tant les avantages et les inconvénients des dispositifs envisagés, que leurs possibilités d'utilisation et le calcul d'efficacités relatives.

On peut ajouter que, comme dans le cas des expériences non factorielles (§ 9.1.3 et 9.1.4), des dispositifs en réseaux qui font intervenir à la fois des lignes et des colonnes ont été proposés pour les expériences factorielles [CHENG et MUKERJEE,

2003; JOHN et LEWIS, 1983; WILLIAMS et JOHN, 1996]. Parmi ceux-ci, figurent notamment des dispositifs appelés *carrés quasi latins*<sup>5</sup>.

## 10.4 Exemple : expérience avec confusion complète

### ⊖ 10.4.1 Présentation et données

#### 1° Présentation générale

En ce qui concerne la confusion d'effets, nous considérons comme exemple le cas d'une expérience factorielle  $2^4$  réalisée sur cotonnier au Congo (RDC) [VAN RENTERGHEM et DAGNELIE, 1963]. Le but de cette expérience est de comparer l'effet de quatre engrais (nitrate d'ammonium, phosphate bicalcique, sulfate de potassium et sulfate de magnésium) sur le rendement en coton-graine. Chacun des quatre engrais est soit non appliqué, soit appliqué à une certaine dose, l'ensemble constituant un schéma factoriel complet comportant 16 objets.

Sans spécifier exactement les doses utilisées, qui figurent dans le travail original cité ci-dessus, nous représentons comme suit les différents objets :

$$(1), n, p, k, m_g, np, nk, nm_g, pk, pm_g, km_g, \\ npk, npm_g, nkm_g, pkm_g, npkm_g,$$

les symboles  $n, p, k$  et  $m_g$  étant simplement, en minuscules, les symboles chimiques classiques relatifs à l'azote, au phosphore, au potassium et au magnésium.

Les unités expérimentales sont des parcelles d'un are et l'expérience comporte deux répétitions, soit un total de 32 parcelles.

Les observations principales sont, comme il a été dit ci-dessus, le rendement en coton-graine.

#### 2° Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est constitué de répétitions complètes avec, dans chacune des deux répétitions, confusion de l'interaction des quatre facteurs (NPKMg) et du facteur blocs. Ce dispositif permet de réduire la dimension des blocs à huit unités expérimentales, au lieu de 16.

Le schéma adopté est esquissé à la figure 10.4.1, ici également sans en donner tous les détails (bordures, sentiers, etc.).

#### 3° Données

Les rendements observés, exprimés en quintaux par hectare, sont présentés dans le tableau 10.4.1, en fonction des différents éléments fertilisants (codés en 1 et 2), des répétitions et des blocs.

<sup>5</sup> En anglais : *quasi-Latin square*.

|                  |                  |                   |     |                   |                 |                  |                  |
|------------------|------------------|-------------------|-----|-------------------|-----------------|------------------|------------------|
| pkm <sub>g</sub> | k                | km <sub>g</sub>   | np  | np                | km <sub>g</sub> | npm <sub>g</sub> | n                |
| n                | npk              | npkm <sub>g</sub> | (1) | nm <sub>g</sub>   | pk              | pkm <sub>g</sub> | nkm <sub>g</sub> |
| m <sub>g</sub>   | p                | pm <sub>g</sub>   | nk  | (1)               | nk              | p                | k                |
| npm <sub>g</sub> | nkm <sub>g</sub> | nm <sub>g</sub>   | pk  | npkm <sub>g</sub> | pm <sub>g</sub> | mg               | npk              |
| Bloc 1           |                  | Bloc 2            |     | Bloc 1            |                 | Bloc 2           |                  |
| Répétition 1     |                  |                   |     | Répétition 2      |                 |                  |                  |

**Figure 10.4.1.** Comparaison de fumures sur cotonnier : plan schématique de l'expérience.

**Tableau 10.4.1.** Comparaison de fumures sur cotonnier : rendements observés, en quintaux par hectare.

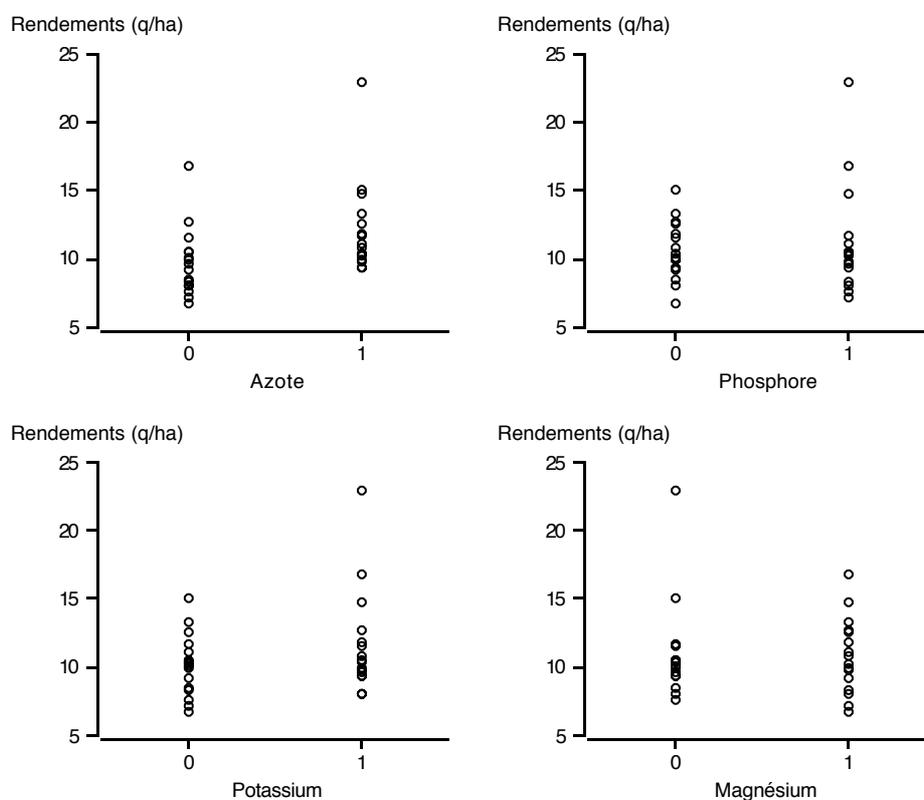
| N | P | K | Mg | Rép. | Bl. | Rdt   | N | P | K | Mg | Rép. | Bl. | Rdt   |
|---|---|---|----|------|-----|-------|---|---|---|----|------|-----|-------|
| 1 | 1 | 1 | 1  | 1    | 2   | 8,43  | 2 | 1 | 1 | 1  | 1    | 1   | 9,84  |
| 1 | 1 | 1 | 1  | 2    | 1   | 9,95  | 2 | 1 | 1 | 1  | 2    | 2   | 14,94 |
| 1 | 1 | 1 | 2  | 1    | 1   | 6,57  | 2 | 1 | 1 | 2  | 1    | 2   | 12,46 |
| 1 | 1 | 1 | 2  | 2    | 2   | 9,16  | 2 | 1 | 1 | 2  | 2    | 1   | 13,30 |
| 1 | 1 | 2 | 1  | 1    | 1   | 7,93  | 2 | 1 | 2 | 1  | 1    | 2   | 9,29  |
| 1 | 1 | 2 | 1  | 2    | 2   | 11,53 | 2 | 1 | 2 | 1  | 2    | 1   | 10,24 |
| 1 | 1 | 2 | 2  | 1    | 2   | 9,83  | 2 | 1 | 2 | 2  | 1    | 1   | 10,74 |
| 1 | 1 | 2 | 2  | 2    | 1   | 12,64 | 2 | 1 | 2 | 2  | 2    | 2   | 11,70 |
| 1 | 2 | 1 | 1  | 1    | 1   | 7,52  | 2 | 2 | 1 | 1  | 1    | 2   | 10,35 |
| 1 | 2 | 1 | 1  | 2    | 2   | 10,41 | 2 | 2 | 1 | 1  | 2    | 1   | 11,63 |
| 1 | 2 | 1 | 2  | 1    | 2   | 8,22  | 2 | 2 | 1 | 2  | 1    | 1   | 10,12 |
| 1 | 2 | 1 | 2  | 2    | 1   | 7,10  | 2 | 2 | 1 | 2  | 2    | 2   | 11,06 |
| 1 | 2 | 2 | 1  | 1    | 2   | 10,49 | 2 | 2 | 2 | 1  | 1    | 1   | 9,21  |
| 1 | 2 | 2 | 1  | 2    | 1   | 9,52  | 2 | 2 | 2 | 1  | 2    | 2   | 22,88 |
| 1 | 2 | 2 | 2  | 1    | 1   | 7,90  | 2 | 2 | 2 | 2  | 1    | 2   | 9,69  |
| 1 | 2 | 2 | 2  | 2    | 2   | 16,77 | 2 | 2 | 2 | 2  | 2    | 1   | 14,77 |

## ⊖ 10.4.2 Analyse des résultats

### 1° Examen préliminaire

La représentation graphique des données en fonction des différents facteurs étudiés (figure 10.4.2) met tout d'abord en évidence la présence d'une valeur particulièrement élevée (22,88). Cette représentation graphique suggère également l'existence d'un effet possible de la fumure azotée et de la fumure potassique.

La grande variabilité des observations, allant de 6,57 à 22,88 (avec une moyenne générale égale à 10,82 q/ha), pourrait justifier à elle seule l'application d'une trans-



**Figure 10.4.2.** Comparaison de fumures sur cotonnier : représentation graphique de l'influence des différents facteurs considérés<sup>6</sup>.

formation logarithmique. Mais cette transformation s'impose surtout en raison du fait que l'expérience qui est considérée ici s'insère dans un ensemble plus vaste d'expériences établies en plusieurs endroits et au cours de plusieurs années, qu'on souhaite étudier globalement, alors que les moyennes relatives à ces expériences varient de 1,04 à 12,18 q/ha, avec des écarts-types pratiquement proportionnels aux moyennes. L'étude de l'ensemble des expériences en question est d'ailleurs l'objet de l'exemple du paragraphe 11.4.

## 2° Analyse de la variance

Les logarithmes décimaux des rendements ont été soumis à une analyse de la variance à six critères de classification, y compris les facteurs répétitions et blocs.

<sup>6</sup> Les valeurs 0 et 1, qui remplacent les indices 1 et 2 du tableau 10.4.1, désignent respectivement l'absence et la présence de chacun des éléments fertilisants.

Les résultats de cette analyse sont donnés dans le tableau 10.4.2. On peut remarquer que 14 degrés de liberté seulement, au lieu de 15 normalement, sont affectés aux 16 objets et que la décomposition en effets principaux et en interactions ne fait pas apparaître l'interaction NPKMg, qui est confondue avec le facteur blocs.

**Tableau 10.4.2.** Comparaison de fumures sur cotonnier : tableau d'analyse de la variance.

| Sources de variation | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | <i>F</i> | P      |
|----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|----------|--------|
| Facteur N            | 1                 | 0,073460                     | 0,073460      | 13,3 **  | 0,0027 |
| Facteur P            | 1                 | 0,000877                     | 0,000877      | 0,16     | 0,70   |
| Facteur K            | 1                 | 0,022835                     | 0,022835      | 4,13     | 0,062  |
| Facteur Mg           | 1                 | 0,000056                     | 0,000056      | 0,01     | 0,92   |
| Interaction NP       | 1                 | 0,000464                     | 0,000464      | 0,08     | 0,78   |
| Interaction NK       | 1                 | 0,018688                     | 0,018688      | 3,38     | 0,087  |
| Interaction NMg      | 1                 | 0,000004                     | 0,000004      | 0,00     | 0,98   |
| Interaction PK       | 1                 | 0,018463                     | 0,018463      | 3,34     | 0,089  |
| Interaction PMg      | 1                 | 0,004193                     | 0,004193      | 0,76     | 0,40   |
| Interaction KMg      | 1                 | 0,006615                     | 0,006615      | 1,20     | 0,29   |
| Interaction NPK      | 1                 | 0,009443                     | 0,009443      | 1,71     | 0,21   |
| Interaction NPMg     | 1                 | 0,004482                     | 0,004482      | 0,81     | 0,38   |
| Interaction NKMg     | 1                 | 0,011073                     | 0,011073      | 2,00     | 0,18   |
| Interaction PKMg     | 1                 | 0,001687                     | 0,001687      | 0,31     | 0,59   |
| Répétitions          | 1                 | 0,102048                     | 0,102048      |          |        |
| Blocs (dans rép.)    | 2                 | 0,035287                     | 0,017643      |          |        |
| Variation résiduelle | 14                | 0,077459                     | 0,005533      |          |        |
| Totaux               | 31                | 0,387134                     |               |          |        |

L'analyse ainsi réalisée montre que seul le facteur azote présente une contribution significative et qu'aucune des interactions n'est significative. L'examen des résidus de cette analyse révèle également que la valeur initiale 22,88 ne doit pas être considérée comme anormale.

D'autre part, le tableau 10.4.2 indique que l'efficacité relative de l'expérience avec confusion d'effets par rapport à une expérience en blocs aléatoires complets classique est, en première approximation :

$$[(0,035387 + 0,077459)/(2 + 14)]/0,005533 = 0,007047/0,005533 = 1,27 \text{ ou } 127 \%,$$

tandis que l'efficacité de ce dernier dispositif par rapport à une expérience complètement aléatoire peut être estimée à :

$$\begin{aligned} [(0,102048 + 0,035387 + 0,077459)/(1 + 2 + 14)]/0,007047 &= 0,012635/0,007047 \\ &= 1,79 \text{ ou } 179 \%. \end{aligned}$$

Comme le montrent aussi les carrés moyens correspondants, la composante répétitions joue donc un rôle beaucoup plus important que la composante « blocs (dans répétitions) ».

Dans la mesure où aucune interaction n'est significative, on peut envisager de regrouper les sommes des carrés des écarts qui les concernent avec la somme des carrés des écarts de la variation résiduelle, de manière à augmenter le nombre de degrés de liberté de cette dernière (tableau 10.4.3). Ce regroupement ne modifie cependant pas les conclusions de l'analyse.

**Tableau 10.4.3.** Comparaison de fumures sur cotonnier : tableau d'analyse de la variance, après regroupement de différentes composantes.

| Sources de variation | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | F       | P      |
|----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|---------|--------|
| Facteur N            | 1                 | 0,073460                     | 0,073460      | 11,6 ** | 0,0024 |
| Facteur P            | 1                 | 0,000877                     | 0,000877      | 0,14    | 0,71   |
| Facteur K            | 1                 | 0,022835                     | 0,022835      | 3,59    | 0,070  |
| Facteur Mg           | 1                 | 0,000056                     | 0,000056      | 0,01    | 0,93   |
| Répétitions          | 1                 | 0,102048                     | 0,102048      |         |        |
| Blocs (dans rép.)    | 2                 | 0,035287                     | 0,017643      |         |        |
| Variation résiduelle | 24                | 0,152571                     | 0,006357      |         |        |
| Totaux               | 31                | 0,387134                     |               |         |        |

### 3° Interprétation

Comme au paragraphe 7.4.2.3°, on peut chiffrer l'importance du facteur azote par l'intermédiaire des logarithmes décimaux.

Les moyennes des logarithmes des rendements des 16 parcelles sans azote et des 16 parcelles avec azote étant respectivement 0,97124 et 1,06707, la valeur estimée et l'intervalle de confiance relatifs à l'influence de la fumure azotée peuvent être déterminés comme suit :

$$1,06707 - 0,97124 \pm 2,145 \sqrt{2(0,005533)/16} = 0,09583 \pm 0,05641 \\ = 0,03942 \text{ et } 0,15224.$$

Le retour aux valeurs initiales met donc en évidence un accroissement moyen de rendement estimé à 25 %, avec des limites de confiance égales à 10 et 42 %.

Il faut signaler enfin que l'étude des quatre facteurs et de leurs interactions aurait pu être réalisée également en utilisant d'autres méthodes que l'analyse de la variance, comme dans le cas de l'exemple du paragraphe 5.5 (demi-diagramme de probabilité et régression multiple).

#### 4° Codification des modèles d'analyse de la variance

En ce qui concerne le logiciel SAS (procédure « *anova* » ou « *glm* »), le contenu des tableaux 10.4.2 et 10.4.3 peut être obtenu à l'aide des modèles :

$$\begin{aligned} L10R = N \ P \ K \ Mg \ N^*P \ N^*K \ N^*Mg \ P^*K \ P^*Mg \ K^*Mg \\ N^*P^*K \ N^*P^*Mg \ N^*K^*Mg \ P^*K^*Mg \ R \ B|R, \end{aligned}$$

et 
$$L10R = N \ P \ K \ Mg \ R \ B|R,$$

si on désigne par L10R les logarithmes décimaux des rendements, par N, P, K et Mg les quatre éléments fertilisants, et par R et B les répétitions et les blocs.

En ce qui concerne Minitab (commande « *glm* »), les mentions « B|R » doivent être remplacées par « B(R) », et le symbole K doit éventuellement être remplacé par exemple par Ka (Kalium), la lettre K ne pouvant pas être utilisée seule comme symbole de variable, au moins pour certaines versions de ce logiciel.

Quant au logiciel R (fonction « *aov* »), on peut utiliser, dans le premier cas (tableau 10.4.2), le modèle :

$$\begin{aligned} L10R \sim N + P + K + Mg + N:P + N:K + N:Mg + P:K + P:Mg + K:Mg \\ + N:P:K + N:P:Mg + N:K:Mg + P:K:Mg + R + B, \end{aligned}$$

ou la forme simplifiée :

$$L10R \sim N^*P^*K^*Mg - N:P:K:Mg + R + B,$$

et dans le deuxième cas (tableau 10.4.3), le modèle :

$$L10R \sim N + P + K + Mg + R + B.$$

Ces trois formulations supposent toutefois que les blocs ont été numérotés de 1 à 4, pour l'ensemble des deux répétitions.

# Chapitre 11

## Les facteurs lieux et temps

### Sommaire

- 11.1 Les expériences répétées dans l'espace et/ou dans le temps**
  - 11.1.1 Principes
  - 11.1.2 Analyse des résultats
  - 11.1.3 Discussion
- 11.2 Les mesures répétées à différents moments sur les mêmes unités expérimentales**
  - 11.2.1 Principes
  - 11.2.2 Analyse des résultats
  - ⊖ 11.2.3 L'étude des successions de cultures ou rotations
- 11.3 Exemple 1 : expériences répétées en plusieurs endroits**
  - 11.3.1 Présentation et données
  - 11.3.2 Analyse des résultats
- 11.4 Exemple 2 : expériences répétées en plusieurs endroits et au cours de plusieurs années**
  - ⊖ 11.4.1 Présentation et données
  - ⊖ 11.4.2 Analyse des résultats
- 11.5 Exemple 3 : mesures répétées à différents moments**
  - ⊖ 11.5.1 Présentation et données
  - ⊖ 11.5.2 Analyse des résultats
- 11.6 Exemple 4 : comparaison de successions de cultures**
  - ⊖ 11.6.1 Présentation
  - ⊖ 11.6.2 Analyse des résultats

## 11.1 Les expériences répétées dans l'espace et/ou dans le temps

### 11.1.1 Principes

#### 1° Domaine agronomique

En introduisant la notion de stratégie ou de programme expérimental (§ 1.2.2), nous avons implicitement mis en évidence le fait que les facteurs lieux et temps peuvent occuper une place importante en matière d'expérimentation.

Dans le domaine agronomique notamment, les conclusions des programmes de recherche sont très souvent destinées à être appliquées dans l'ensemble d'une région ou d'un territoire donné et durant un certain temps. Il importe donc que les résultats observés dans des conditions bien définies, souvent relativement artificielles, soient vérifiés dans des conditions pratiques aussi diversifiées que possible. Ainsi, les conclusions obtenues « en station », au sens du paragraphe 1.2.1.2°, et souvent au cours d'une seule saison de culture doivent être vérifiées autant que possible « hors station » et durant plusieurs années ou plusieurs saisons de culture.

D'une manière générale, une place non négligeable doit donc être consacrée à des groupes d'expériences répétées, souvent qualifiées de *multilocales*<sup>1</sup> et/ou *pluri-annuelles*<sup>2</sup>.

#### 2° Modalités d'organisation

Dans toute la mesure du possible, les différentes expériences d'un même ensemble doivent être organisées selon des modalités identiques : mêmes objets, mêmes unités expérimentales, mêmes types d'observations, mêmes dispositifs expérimentaux, mêmes nombres de répétitions, etc. Il faut néanmoins que la randomisation soit réalisée de façon indépendante pour chacune des expériences individuelles.

D'autre part, le bon sens indique que, pour obtenir une représentation aussi diversifiée que possible de l'ensemble du domaine considéré, il y a intérêt à augmenter autant que faire se peut le nombre d'expériences, en réduisant, même de façon drastique si cela s'avère nécessaire, le nombre de répétitions au sein de chacune d'entre elles. La méthodologie qui intervient au cours de l'analyse des résultats confirme d'ailleurs ce principe (§ 11.1.3.1°).

Enfin, il faut évidemment que les endroits choisis pour établir les différentes expériences soient bien représentatifs de l'ensemble de la région ou du territoire étudié. Pour autant que cela soit possible, ces endroits seront eux-mêmes choisis de façon aléatoire.

---

<sup>1</sup> En anglais : *multi-location experiment, multi-environment experiment.*

<sup>2</sup> En anglais : *multi-annual experiment.*

### 3° Domaine médical et méta-analyse

Des principes semblables s'appliquent au domaine médical, où on parle plus volontiers d'expériences *multicentres* ou *multicentriques*<sup>3</sup>. Les différentes implantations sont alors généralement différents centres hospitaliers et, très souvent aussi, les programmes de recherche sont organisés à une échelle internationale.

De plus, sous le nom de *méta-analyse*<sup>4</sup>, on procède fréquemment à l'analyse a posteriori des résultats d'ensembles d'expériences qui n'ont pas été conçues initialement comme formant un tout, mais qui poursuivent néanmoins un même objectif ou des objectifs très semblables. On peut trouver des informations à ce sujet dans certains livres spécialisés, tels que ceux de CUCHERAT *et al.* [1997], SUTTON *et al.* [2000], et WHITEHEAD [2002], ou dans certains articles généraux, dont ceux de COOK *et al.* [1995], NORMAND [1999], et SUTTON et HIGGINS [2008].

L'utilisation de la méta-analyse a également été envisagée dans le domaine agronomique [JAGGARD *et al.*, 2009; SAUVANT *et al.*, 2005].

## 11.1.2 Analyse des résultats

### 1° Expériences complètement aléatoires

Dans le cas d'un ensemble d'expériences complètement aléatoires organisées en différents endroits *ou* au cours de plusieurs années ou périodes différentes, et pour un seul facteur initial, l'analyse de la variance globale est une analyse à deux critères de classification tout à fait classique [STAT2, § 10.2 et 10.3]. Le schéma d'une telle analyse est donné dans le tableau 11.1.1, pour  $p$  objets,  $q$  lieux et un même nombre  $n$  de répétitions pour chacun des objets en chacun des lieux.

**Tableau 11.1.1.** Schéma de l'analyse de la variance relative à un ensemble d'expériences complètement aléatoires réalisées en différents lieux.

| Sources de variation     | Degrés de liberté |
|--------------------------|-------------------|
| Objets                   | $p - 1$           |
| Lieux                    | $q - 1$           |
| Interaction objets-lieux | $(p - 1)(q - 1)$  |
| Variation résiduelle     | $pq(n - 1)$       |
| Totaux                   | $pqn - 1$         |

L'analyse reste relativement simple quand les effectifs  $n$  diffèrent d'un endroit à l'autre, ou éventuellement d'un objet à l'autre, mais elle est non orthogonale quand les effectifs varient à la fois en fonction des objets et des lieux (§ 12.4.1).

<sup>3</sup> En anglais : *multi-centre experiment*.

<sup>4</sup> En anglais : *meta-analysis*.

### 2° Expériences en blocs aléatoires complets

De même, l'analyse de la variance relative à un seul facteur initial et à un ensemble d'expériences en blocs aléatoires complets organisées en différents endroits *ou* au cours de plusieurs années ou plusieurs périodes est une analyse à trois critères de classification, de type partiellement hiérarchisé [STAT2, § 11.3.1 et 11.3.3]. Les facteurs lieux (ou années ou périodes) et blocs sont en effet croisés avec le facteur objets, tandis que les facteurs lieux (ou années ou périodes) et blocs sont hiérarchisés l'un par rapport à l'autre.

Le schéma d'une telle analyse est donné dans le tableau 11.1.2, pour  $p$  objets,  $q$  lieux et un même nombre  $r$  de blocs en chacun des lieux, et en supposant qu'on ne dispose que d'une seule observation pour chacune des unités expérimentales (chacune des combinaisons objet-lieu-bloc).

**Tableau 11.1.2.** Schéma de l'analyse de la variance relative à un ensemble d'expériences en blocs aléatoires complets réalisées en différents lieux.

| Sources de variation                  | Degrés de liberté |
|---------------------------------------|-------------------|
| Objets                                | $p - 1$           |
| Lieux                                 | $q - 1$           |
| Interaction objets-lieux              | $(p - 1)(q - 1)$  |
| Blocs (dans lieux)                    | $p(r - 1)$        |
| Interaction objets-blocs (dans lieux) | $p(q - 1)(r - 1)$ |
| Totaux                                | $pqr - 1$         |

Ici également, l'analyse de la variance ne se complique guère quand le nombre de répétitions (nombre de blocs) diffère d'un endroit à l'autre (ou d'une année ou d'une période à l'autre).

### 3° Conditions

Les analyses de la variance dont nous venons de parler ne peuvent être réalisées que moyennant certaines conditions, auxquelles il y a lieu d'être très attentif.

Il faut rappeler tout d'abord que les différentes expériences qui sont prises en considération doivent toujours être indépendantes les unes des autres, par leur randomisation notamment. En particulier, dans le cas d'expériences répétées à différents moments, il ne peut s'agir d'expériences consécutives portant sur les mêmes unités expérimentales (mêmes parcelles, mêmes arbres, mêmes animaux, etc.).

D'autre part, la condition d'égalité des variances, qui s'applique normalement à chacune des expériences individuellement, doit s'appliquer aussi à l'ensemble des expériences. Dans le cas des expériences complètement aléatoires (tableau 11.1.1), cette condition concerne les variations résiduelles relatives aux différentes

expériences, tandis que dans le cas des expériences en blocs aléatoires complets (tableau 11.1.2), la condition d'égalité des variances concerne les interactions objets-blocs (dans lieux ou temps) des différentes expériences.

Le contrôle de cette condition implique que toute analyse globale d'un ensemble d'expériences doit être précédée d'analyses individuelles relatives à chacune d'entre elles. Des transformations de variables, réalisées selon les principes habituels [STAT2, § 4.4], permettent souvent de remédier à d'éventuelles inégalités des variances.

Le caractère fixe ou aléatoire du facteur lieux ou du facteur temps est également un élément important, qui détermine la manière dont le facteur objets doit être testé [STAT2, § 10.3.5 et 11.3.3].

Le plus souvent, le facteur lieux est considéré comme aléatoire, les différents emplacements auxquels correspondent les expériences étant représentatifs d'une région ou de tout autre territoire plus ou moins vaste. Il en est souvent de même pour le facteur années ou périodes, bien que cette vision des choses soit plus sujette à caution dans ce cas. Le facteur objets doit alors être testé par rapport à son interaction avec le facteur lieux ou temps.

Dans certaines circonstances cependant, le facteur lieux ou le facteur temps doit être considéré comme fixe. Tel peut être le cas par exemple quand les différentes expériences sont réalisées sur différents types de sols, choisis de manière délibérée. Le facteur objets doit alors être testé par rapport à la variation résiduelle pour les expériences complètement aléatoires (tableau 11.1.1), et par rapport à l'interaction objets-blocs (dans lieux ou temps) pour les expériences en blocs aléatoires complets (tableau 11.1.2).

[ Des informations sont données à ce sujet par BASFORD *et al.* [2004] et VAN [ EEUWIJK [2007].

#### 4° Interaction objets-lieux (ou temps)

L'interaction objets-lieux (ou temps) mérite de retenir tout spécialement l'attention. Cette interaction peut en effet indiquer que le facteur principal considéré au départ (facteur objets) n'intervient pas de la même manière aux différents endroits (ou au cours des différentes années ou périodes). Une telle situation peut avoir pour conséquence de devoir formuler des conclusions différentes pour les différents lieux (ou années ou périodes) ou pour certains sous-ensembles de lieux (ou années ou périodes).

En particulier, dans le domaine agronomique, en ce qui concerne les expériences destinées à comparer différentes variétés en différents endroits, cette interaction est souvent appelée interaction *génotype-environnement* ou *variété-environnement*<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> En anglais : *genotype-environment interaction, variety-environment interaction*.

Une première approche de l'étude de l'interaction objets-lieux (ou temps), parfois qualifiée de *structuration*<sup>6</sup> de l'interaction, consiste à subdiviser l'ensemble des expériences considérées, lorsqu'elles présentent une interaction importante, en deux ou plusieurs sous-ensembles au sein desquels l'interaction est beaucoup plus limitée. Une telle subdivision peut être réalisée soit en fonction d'une ou plusieurs caractéristiques relatives aux différents lieux ou aux différentes années ou périodes (types de sols, altitude, climat, etc.), soit en fonction des résultats des différentes expériences (rendements faibles et rendements élevés, résidus de l'analyse de la variance, etc.).

[ La «structuration» de l'interaction peut aussi consister en une subdivision de l'ensemble des objets, ou de l'ensemble des objets et des lieux (ou années ou périodes), par l'une ou l'autre méthode de classification numérique [ADUGNA et LABUSCHAGNE, 2003; CORSTEN et DENIS, 1990; DENIS, 1979].

### 5° Autres interactions

Quand des facteurs lieux *et* temps sont simultanément présents, d'autres interactions doivent éventuellement être prises en considération : interactions objets-temps, lieux-temps et objets-lieux-temps.

Dans le cas d'expériences complètement aléatoires relatives à un seul facteur initial, l'analyse de la variance est alors une analyse à trois critères de classification. Il s'agit d'un modèle croisé s'il y a correspondance, d'une année ou d'une période à l'autre, entre les endroits où sont réalisées les différentes expériences [STAT2, § 11.2], et d'un modèle partiellement hiérarchisé quand une telle correspondance n'existe pas, le facteur lieu étant subordonné dans ce cas au facteur temps [STAT2, § 11.3.1 et 11.3.3].

Dans les mêmes conditions, l'analyse de la variance relative à un ensemble d'expériences en blocs aléatoires complets est une analyse à quatre critères de classification, de type partiellement hiérarchisé [STAT2, § 11.4.3]. Deux formes de hiérarchisations doivent être prises en considération, selon que le facteur lieu est ou n'est pas subordonné au facteur temps, le facteur blocs étant toujours subordonné aux facteurs lieux et temps.

### 6° Compléments

Les principes que nous avons développés jusqu'à présent peuvent évidemment être appliqués aussi à d'autres dispositifs expérimentaux que les expériences complètement aléatoires et en blocs aléatoires complets. Tel est le cas par exemple pour les dispositifs en carré latin et avec permutation des objets (*cross-over*), dont il a été question au chapitre 8. Pour ces dispositifs, le nombre de critères de classification de l'analyse de la variance est augmenté d'une unité, par rapport au cas des expériences en blocs aléatoires complets, et il y a lieu d'être particulièrement

---

<sup>6</sup> En anglais : *structuring*.

attentif aux différentes hiérarchisations possibles des divers critères de classification.

D'autre part, nous avons supposé jusqu'à présent que toutes les expériences considérées réunissent les mêmes objets, sans données manquantes ou sans nombres importants de données manquantes. Il est évident cependant que, souvent, des objets partiellement différents apparaissent d'une expérience à l'autre, que certains objets peuvent être manquants dans certaines expériences, ou encore que certaines combinaisons lieux-temps n'existent pas. Dans un programme pluriannuel de comparaison de variétés par exemple, d'anciennes variétés sont normalement progressivement abandonnées, et de nouvelles variétés progressivement introduites dans les expériences, au fil du temps.

[ Les analyses de la variance qui doivent être réalisées sont alors non orthogonales et peuvent faire appel à des méthodes d'estimation particulières, telles que le *maximum de vraisemblance restreint* ou *résiduel*<sup>7</sup> [STAT2, § 16.4.5]. PATTERSON et NABUGOMU [1992] et TALBOT [1992] en donnent des exemples.

D'autres approches, plus ou moins liées les unes aux autres, ont aussi été proposées. On peut citer notamment l'utilisation de modèles multiplicatifs d'analyse de la variance, dont les *modèles additifs pour les facteurs principaux et multiplicatifs pour les interactions*<sup>8</sup> [EBDON et GAUCH, 2002; GAUCH, 1988; OMAN, 1991; SMITH *et al.*, 2001], et le recours à diverses méthodes d'analyse statistique à plusieurs variables : *analyse canonique* ou *des variables canoniques*<sup>9</sup>, *analyse des composantes*<sup>10</sup> ou *analyse factorielle*<sup>11</sup>, et *régression par les moindres carrés partiels*<sup>12</sup> [AASTVEIT et MARTENS, 1986; ADUGNA et LABUSCHAGNE, 2003; CALÍŃSKI *et al.*, 1995a, 1995b; VARGAS *et al.*, 2001].

### 11.1.3 Discussion

#### 1° Nombres d'observations

L'examen des schémas d'analyse de la variance que nous avons considérés au paragraphe 11.1.2 permet de formuler diverses recommandations quant à l'organisation de groupes d'expériences, en particulier en ce qui concerne les nombres de répétitions ou d'observations à prévoir aux différents niveaux.

À titre d'illustration, nous considérons le cas d'un ensemble d'expériences en blocs aléatoires complets qui seraient mises sur pied en différents endroits choisis de façon aléatoire au sein d'une même région (tableau 11.1.2), mais le raisonnement proposé peut être appliqué aussi à d'autres situations. On pourrait par exemple

<sup>7</sup> En anglais : *restricted maximum likelihood, REML*.

<sup>8</sup> En anglais : *additive main effects and multiplicative interaction, AMMI*.

<sup>9</sup> En anglais : *canonical analysis, canonical variate analysis*.

<sup>10</sup> En anglais : *component analysis, principal component analysis, PCA*.

<sup>11</sup> En anglais : *factor analysis*.

<sup>12</sup> En anglais : *partial least squares, PLS*.

remplacer le facteur lieux par un facteur temps ou, en se basant sur un modèle quelque peu plus complexe, considérer simultanément des facteurs lieux *et* temps.

Dans le cas envisagé, le principe de base est de toujours augmenter au maximum le nombre de lieux (ou d'expériences individuelles), en réduisant le nombre de répétitions, c'est-à-dire le nombre de blocs, en chacun des lieux. En pratique, pour pouvoir disposer d'une estimation locale de la variabilité, le nombre de répétitions par expérience individuelle, c'est-à-dire le nombre de blocs par expérience, est souvent fixé à 2.

On notera que ce principe est aussi celui qui intervient dans tout échantillonnage à deux degrés [STAT2, § 9.4.4].

[ On peut justifier ce principe en considérant, dans le cas d'une seule observation par unité expérimentale, le modèle d'analyse de la variance [STAT2, § 11.3.3] :

$$X_{ijk} - m_{...} = a_i + B_j + C_{k|j} + (aB)_{ij} + (aC)_{ik|j} + D_{ijk},$$

dans lequel  $X_{ijk}$  désigne les variables aléatoires associées aux différentes valeurs observées,  $m_{...}$  est une moyenne théorique générale,  $a_i$ ,  $B_j$  et  $C_{k|j}$  sont les effets principaux des trois facteurs (objets, lieux et blocs dans lieux),  $(aB)_{ij}$  et  $(aC)_{ik|j}$  sont les termes d'interaction (objets-lieux et objets-blocs dans lieux), et  $D_{ijk}$  représente les variables aléatoires résiduelles relatives aux différentes observations.

Si on désigne également par  $\sigma_{aB}^2$ ,  $\sigma_{aC}^2$  et  $\sigma^2$  les composantes de variance qui correspondent à l'interaction objets-lieux, à l'interaction objets-blocs dans lieux et à la variation résiduelle, et si on envisage d'organiser  $q$  expériences indépendantes constituées chacune de  $r$  blocs aléatoires complets, la variance de la différence des moyennes est, pour tout couple d'objets :

$$2[\sigma_{aB}^2/q + (\sigma_{aC}^2 + \sigma^2)/(qr)].$$

Il apparaît ainsi que, pour un nombre total donné de répétitions  $qr$  pour chacun des objets, et pour autant que la composante  $\sigma_{aB}^2$  ne soit pas nulle, la variance de la différence est minimale quand le nombre de lieux  $q$  est maximum, le nombre de répétitions par lieu  $r$  étant minimum, et à la limite égal à 1.

Il faut noter en outre que l'augmentation du nombre de lieux provoque une augmentation du nombre de degrés de liberté de l'interaction objets-lieux, et donc de la sensibilité ou de la puissance des comparaisons.

Enfin, le problème envisagé ici, comme tout problème d'échantillonnage à deux degrés, peut être abordé aussi en faisant intervenir une fonction de coût, dans le but de tenter de minimiser le coût total de réalisation de l'ensemble des expériences [STAT2, § 9.4.4].

[ Cette question est traitée par LINDGREN [1985] dans le cas des expériences complètement aléatoires.

### 2° Plantes de grandes cultures : variabilité

Le problème de la détermination des nombres de répétitions ou d'observations peut être discuté de façon plus concrète dans le cas des plantes de grandes cultures, pour lesquelles on dispose d'informations relativement précises, mais assez anciennes.

Diverses études, portant sur plusieurs milliers d'expériences réalisées en Allemagne, en Belgique et en Grande-Bretagne, montrent en effet que les différentes composantes de la variance, exprimées de manière relative en termes de coefficients de variation, se situent aux niveaux suivants [FLORINS et ROUSSEL, 1980; OGER, 1980; PATTERSON *et al.*, 1977; UTZ et LAIDIG, 1989] :

interaction objets-blocs : 5 à 7 %,

interaction objets-lieux : 2 à 3 %,

interaction objets-années : 3 à 5 %.

Ces valeurs concernent les rendements de cultures très diversifiées, qui n'ont bien sûr pas toutes la même variabilité, mais qui ont néanmoins, dans l'ensemble, des comportements fort semblables. On peut ajouter d'ailleurs que les céréales (production de grains) correspondent plutôt aux limites inférieures des fourchettes mentionnées ci-dessus, tandis que les betteraves et les pommes de terre (production de racines), ainsi que les cultures fourragères (production de matière verte), correspondent plutôt aux limites supérieures de ces fourchettes.

### 3° Plantes de grandes cultures : nombres d'observations

Dans l'optique d'expériences répétées en différents endroits, au cours d'une même année, on peut illustrer sur cette base les principes qui ont été exposés en ce qui concerne les nombres d'expériences et de répétitions par expérience.

En considérant les valeurs médianes (6 et 2,5 %) des deux premières fourchettes qui viennent d'être présentées, on peut établir par exemple que le coefficient de variation relatif à la différence de deux moyennes est, pour des expériences réalisées en deux endroits différents et comportant chacune six répétitions ( $q = 2$  et  $r = 6$ ) :

$$\sqrt{2(2,5^2/2 + 6^2/12)} = 3,50 \text{ \%}.$$

Au contraire, pour des expériences réalisées en six endroits différents et comportant chacune deux répétitions ( $q = 6$  et  $r = 2$ ), on aurait :

$$\sqrt{2(2,5^6/6 + 6^2/12)} = 2,84 \text{ \%}.$$

Le quotient des coefficients de variation ainsi obtenus est égal à 1,23, et l'efficacité relative de six expériences à deux répétitions, par rapport à deux expériences à six répétitions, est égale au carré de ce quotient, soit un peu plus de 150 %.

On peut vérifier également que, pour atteindre avec deux expériences seulement la précision qui correspond au cas de six expériences (2,84 %), il faudrait disposer

théoriquement chaque fois de 20 répétitions ( $q = 2$  et  $r = 20$ ), soit un total de 40 répétitions au lieu de 12.

La question de la répétition d'expériences au cours de plusieurs années (ou saisons de culture) est plus préoccupante encore, pour deux raisons distinctes. D'une part, il apparaît d'une manière générale que la composante de variance relative à l'interaction objets-années est sensiblement supérieure à la composante de variance objets-lieux. Et d'autre part, il n'est évidemment pas possible de réduire l'impact de cette composante par une augmentation importante du nombre d'années, sans donner à l'ensemble de l'expérimentation une durée excessive. Le facteur années est de ce fait un élément extrêmement limitant.

En fonction des informations données ci-dessus, dans l'hypothèse par exemple d'une série d'expériences organisées au cours de trois années (ou saisons de culture) successives ( $q = 3$ ), ce qui constitue une durée tout à fait raisonnable, on peut montrer qu'il n'est pratiquement pas possible de réduire le coefficient de variation des différences de moyennes entre objets à moins de 3,5 ou 4 %. Dans ces conditions également, les différences de moyennes qu'on peut espérer mettre en évidence ne peuvent être inférieures à 7 ou 8 % pour une probabilité égale à 0,5, et à 12 ou 13 % pour une probabilité égale à 0,9 (§ 3.4).

On pourrait bien sûr arguer du fait qu'il devrait être possible d'améliorer la qualité des comparaisons en répétant les expériences à la fois dans l'espace et dans le temps, mais il faut savoir qu'une composante de variance supplémentaire (objets-lieux-années) intervient alors et que cette composante est en général plus importante encore que la composante objets-années [PATTERSON *et al.*, 1977; UTZ et LAIDIG, 1989].

Il faut ajouter que les différents résultats que nous avons présentés concernent des expériences organisées dans des conditions relativement favorables, et que les variabilités que nous avons citées doivent fréquemment être multipliées par 1,5 ou 2, voire même davantage dans certains cas. Ces réflexions conduisent malheureusement à la conclusion que de nombreux programmes de recherche agronomique ne peuvent mettre en évidence des différences de rendements, que quand ces différences atteignent 10, 15 ou 20 %, sinon plus dans certaines situations.

#### 4° Dispositifs expérimentaux

Dans le cas de groupes d'expériences répétées à différents endroits et/ou à différents moments, et pour autant que les composantes de la variance relatives aux interactions objets-lieux et/ou objets-temps soient assez élevées, le recours à des dispositifs expérimentaux relativement complexes ne se justifie pas dans la même mesure que pour des expériences isolées.

Pour les expériences en champ dont il vient d'être question, on pourrait envisager notamment de remplacer des dispositifs en blocs aléatoires complets par des dispositifs en réseaux carrés équilibrés (§ 9.1.3). Mais on peut montrer qu'en raison des interactions liées aux facteurs lieux et/ou années, les gains de précision relatifs

aux comparaisons globales, réalisées pour l'ensemble des lieux et/ou des années, sont très inférieurs aux gains de précision relatifs individuellement aux différentes expériences.

En supposant par exemple, à titre indicatif, que l'efficacité relative d'expériences en réseaux par rapport à des expériences en blocs aléatoires complets soit de l'ordre de 150 %, l'utilisation de réseaux à la place des blocs réduirait le coefficient de variation résiduelle (interaction objets-blocs) de 6 %, valeur que nous avons utilisée ci-dessus, à 4,9 %. Pour des expériences répétées au cours de trois années successives, la limite de 3,5 ou 4 %, à laquelle nous avons abouti, deviendrait 3,4 à 3,8 %, soit un très faible gain de précision.

Cette constatation conforte l'idée que les expériences répétées hors station, qui sont souvent soumises à plus d'aléas (§ 1.2.1.2°), peuvent être organisées sans inconvénients majeurs de manière plus simple que les expériences en station.

## 11.2 Les mesures répétées à différents moments sur les mêmes unités expérimentales

### 11.2.1 Principes

#### 1° Diversité des situations

La répétition d'observations ou de mesures à deux ou plusieurs moments différents sur les mêmes unités expérimentales constitue une deuxième intervention importante du facteur temps dans le domaine de l'expérimentation. Cette question est souvent abordée sous les dénominations simples, mais quelque peu ambiguës, de *mesures répétées*<sup>13</sup> ou *données longitudinales*<sup>14 15</sup>. En matière agronomique, ce sujet concerne en particulier certaines *expériences de longue durée*<sup>16</sup>, dont l'étude des *cultures* ou des *plantes pérennes*<sup>17</sup>.

Les situations à prendre en considération dans cette optique sont extrêmement diversifiées. Le cas le plus évident est sans aucun doute celui de patients, d'animaux, d'arbres ou d'autres plantes qui sont l'objet d'observations consécutives pendant plusieurs mois ou plusieurs années, voire même plusieurs dizaines d'années dans le cas d'expériences forestières notamment.

Des situations tout à fait comparables peuvent aussi se présenter au cours de périodes de très courte durée. Tel est le cas pour les récoltes successives qui sont

---

<sup>13</sup> En anglais : *repeated measurements*.

<sup>14</sup> En anglais : *longitudinal data*.

<sup>15</sup> L'utilisation d'une expression telle que « mesures répétées dans le temps » (*repeated measurements over time*) nous paraîtrait préférable.

<sup>16</sup> En anglais : *long-term experiment*.

<sup>17</sup> En anglais : *perennial crop, perennial plant*.

effectuées en quelques jours ou quelques semaines sur des fraisiers ou des plants de tomate, pour certaines réactions chimiques ou certains processus de croissance de microorganismes en biotechnologie, etc.

De même, on peut associer aux mesures répétées dans le temps l'étude de successions de cultures (ou rotations), pour lesquelles les observations sont réalisées d'année en année ou de saison de culture en saison de culture sur les mêmes parcelles, mais le plus souvent sur des plantes de natures différentes (blé, betterave, pois, colza, etc.). Les variables observées au cours des années successives peuvent alors être elles-mêmes différentes. Nous consacrerons un paragraphe particulier à ce sujet (§ 11.2.3).

Enfin, on peut assimiler aux mesures répétées dans le temps le cas des observations qui sont réalisées au même moment et non pas à des moments différents, sur les mêmes unités expérimentales, à différents niveaux. On peut citer à titre d'exemples des mesures de longueurs d'entre-nœuds effectuées au même moment sur des tiges de céréales ou de tout autre type de plantes, ainsi que des résultats d'analyses pédologiques ou analyses de sols qui concernent des échantillons de terre prélevés à différentes profondeurs, exactement aux mêmes endroits.

La caractéristique essentielle, commune à ces diverses situations, est le fait que les différentes observations effectuées sur une même unité expérimentale ne sont pas, d'une manière générale, indépendantes les unes des autres. Cet aspect des choses, sur lequel nous reviendrons en particulier au paragraphe 11.2.2.2°, ne doit jamais être négligé.

## 2° Planification des expériences de longue durée

Dans le cas des expériences de longue durée, la planification des expériences doit être l'objet d'une attention toute spéciale. D'une façon générale, ces expériences sont en effet, à la fois, particulièrement coûteuses et sujettes à de nombreux aléas (accidents de toute nature, développement de maladies nouvelles, mortalité, défection de certains patients dans les expériences médicales, etc.).

Nous abordons ici ce sujet essentiellement sous l'angle agronomique, en passant en revue les principaux éléments de tout protocole expérimental.

La définition du ou des objectifs doit être extrêmement précise et ne pas prêter à confusion, dans la mesure où, bien souvent, l'expérience doit être poursuivie par d'autres personnes que celles qui l'ont initiée. Toute modification éventuelle du ou des objectifs en cours d'expérience doit aussi être notée scrupuleusement. D'autre part, le choix des objets est en général fort limité.

Quant aux unités expérimentales, il faut tenir compte du fait qu'elles peuvent parfois présenter une hétérogénéité de plus en plus grande au fil du temps. En productions végétales notamment, on a pu constater que l'importance des différences entre plantes dépasse progressivement l'influence des différences initiales entre parcelles [PEARCE, 1965, 1976a]. On peut tenter de remédier à cet état de fait en

procédant au départ à une sélection aussi poussée que possible d'un matériel expérimental très homogène.

En outre, dans le cas de parcelles d'expérience, les interférences possibles entre parcelles voisines peuvent être de plus en plus importantes au cours du temps, ce qui peut conduire à prévoir dès le départ des bordures relativement larges, et donc des parcelles de relativement grandes dimensions. Il faut aussi accorder un intérêt particulier à la matérialisation permanente des limites exactes des parcelles sur le terrain.

Les observations et leurs modalités de collecte doivent également être définies de façon très précise, de manière telle que les valeurs observées restent toujours comparables, quels que soient, au fil du temps, les observateurs, les instruments de mesure utilisés, etc. De plus, la conservation des observations doit être assurée de manière permanente, de préférence sous la forme des données brutes initiales, et non pas seulement de moyennes ou d'autres valeurs synthétiques.

Quant aux dispositifs expérimentaux, il y a souvent intérêt à adopter des dispositifs aussi simples que possible, qui permettent mieux de faire face aux différents aléas susceptibles de se présenter.

[ Des informations complémentaires, relatives plus particulièrement aux expériences « hors station », peuvent être trouvées notamment dans un article de RILEY [2000]. ]

## 11.2.2 Analyse des résultats

### 1° Analyses univariées simples

Une première approche de l'interprétation des mesures répétées dans le temps consiste à effectuer des analyses univariées simples. Nous entendons par là des analyses (essentiellement des analyses de la variance) qui ne font pas intervenir explicitement le facteur temps. De telles analyses permettent en général d'obtenir des informations fort utiles et sont assez souvent largement suffisantes pour résoudre les problèmes abordés.

Quand les observations sont toutes réalisées à des dates (ou à des stades de développement) identiques pour les différentes unités expérimentales, des analyses de la variance peuvent tout d'abord être effectuées séparément aux différentes dates. Ces analyses permettent notamment de voir, le cas échéant, à partir de quel moment des différences significatives apparaissent.

Mais des analyses simples, qui ne font pas intervenir explicitement le facteur temps, peuvent aussi être réalisées sur des fonctions des différentes observations, les valeurs de ces fonctions étant calculées séparément pour chacune des unités expérimentales. C'est ce que nous avons fait au paragraphe 8.5, en considérant des accroissements en hauteur pour des plants de *Ficus elastica*, et ce que nous ferons au paragraphe 11.3, en étudiant des accroissements en circonférence pour

des épicéas, c'est-à-dire dans un cas comme dans l'autre des différences entre des valeurs observées finales et des valeurs observées initiales.

Il peut s'agir également de nombreuses autres fonctions des différentes observations successives. Dans les deux cas qui viennent d'être cités, et dans l'optique d'une croissance linéaire ou approximativement linéaire, on aurait pu considérer, au lieu des différences de hauteur ou de circonférence, des vitesses de croissance calculées par régression linéaire simple à partir de l'ensemble des observations, séparément pour chacune des unités observées, les coefficients de régression étant soumis à l'analyse de la variance. On peut remarquer que cette approche, ou toute autre détermination de paramètres de courbes de croissance, s'applique même quand les dates d'observation ne sont pas identiques pour toutes les unités expérimentales.

À titre d'exemples, nous souhaitons encore considérer deux cas particuliers. Dans une culture fourragère dont la récolte est effectuée en plusieurs coupes, l'intérêt se porte en général sur la production fourragère totale, et non pas sur la production individuelle des différentes coupes. Mais en ce qui concerne la valeur nutritive des fourrages, on peut aussi s'attacher plus particulièrement à la richesse totale en tel ou tel élément (cellulose totale ou protéines totales, par exemple). Rien n'empêche, dans ce but, d'effectuer des analyses de la variance sur les sommes des différents rendements par coupe, pondérés en fonction des compositions chimiques des différentes coupes.

Enfin, en ce qui concerne la comparaison de différentes variétés ou différentes conditions de production de fraises ou de tomates notamment, un élément essentiel quant à la rentabilité de la culture peut être la précocité de la production. Les différentes récoltes successives peuvent alors être pondérées par leur valeur marchande, l'analyse portant en fait sur une fonction économique, et non pas seulement sur une production totale.

## ⊖ 2° Corrélations entre observations successives

En vue de prendre en considération explicitement le facteur temps dans l'analyse des résultats, il s'impose de formaliser quelque peu la notion de non-indépendance des observations successives. Cette formalisation peut être envisagée en termes de corrélation.

En effet, les hypothèses de base de l'analyse de la variance sont essentiellement la normalité, l'égalité des variances et l'indépendance des résidus [STAT2, § 9.3.2]. Et sous l'hypothèse de normalité des distributions, les notions d'indépendance et de non-corrélation ou de corrélation nulle sont strictement équivalentes [STAT1, § 7.4.2].

Si on considère, pour un certain nombre d'unités expérimentales, des ensembles de  $q$  observations successives, dans les conditions qui viennent d'être rappelées, les coefficients de corrélation entre les observations, ainsi que les variances des observations et leurs covariances peuvent être présentées sous la forme de deux

matrices de dimensions  $q \times q$  :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

Dans la matrice de corrélation  $\mathbf{P}$  ( $\rho$  majuscule), les coefficients de corrélation des observations avec elles-mêmes (éléments diagonaux de la matrice) sont égaux à 1 et tous les autres coefficients de corrélation (éléments non diagonaux) sont nuls, tandis que dans la matrice de variances et covariances  $\mathbf{\Sigma}$ , les variances (éléments diagonaux) sont toutes égales à  $\sigma^2$  et les covariances (éléments non diagonaux) sont toutes nulles<sup>18</sup>.

Des conditions moins restrictives, dites de *symétrie* ou de *symétrie composée*<sup>19</sup>, reviennent à supposer que toutes les observations sont éventuellement corrélées entre elles, mais de la même façon, c'est-à-dire avec un même coefficient de corrélation  $\rho$ , supposé positif, les variances étant toujours considérées comme égales. Les matrices de corrélation et de variances et covariances sont alors :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho \sigma^2 & \dots & \rho \sigma^2 \\ \rho \sigma^2 & \sigma^2 & \dots & \rho \sigma^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho \sigma^2 & \rho \sigma^2 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

Mais on peut penser que, bien souvent, les coefficients de corrélation sont d'autant plus réduits que les observations sont plus éloignées les unes des autres dans le temps. Pour des observations séparées par des intervalles de temps égaux, cette remarque conduit à introduire des matrices de corrélation et de variances et covariances telles que :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{q-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{q-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{q-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{q-1} & \rho_{q-2} & \rho_{q-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho_1 \sigma^2 & \rho_2 \sigma^2 & \dots & \rho_{q-1} \sigma^2 \\ \rho_1 \sigma^2 & \sigma^2 & \rho_1 \sigma^2 & \dots & \rho_{q-2} \sigma^2 \\ \rho_2 \sigma^2 & \rho_1 \sigma^2 & \sigma^2 & \dots & \rho_{q-3} \sigma^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{q-1} \sigma^2 & \rho_{q-2} \sigma^2 & \rho_{q-3} \sigma^2 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

Dans ces matrices,  $\rho_1$  désigne le coefficient de corrélation entre les observations immédiatement successives,  $\rho_2$  le coefficient de corrélation entre les observations séparées par deux intervalles de temps, ..., et  $\rho_{q-1}$  le coefficient de corrélation

<sup>18</sup> Des informations relatives à la présentation matricielle des coefficients de corrélation et des variances et covariances peuvent être trouvées notamment dans nos publications antérieures [STAT1, § 4.11.1; DAGNELIE, 1986, § 2.2.2 et 2.4.1].

<sup>19</sup> En anglais : *compound symmetry*.

entre les observations extrêmes, les valeurs de ces coefficients, supposés positifs, étant progressivement décroissantes ( $\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_{q-1} > 0$ )<sup>20</sup>.

Enfin, la dernière condition que nous envisageons et qui est connue sous le nom de *condition de HUYNH et FELDT*<sup>21</sup> revient à supposer que les covariances des couples d'observations d'indices  $j$  et  $j'$  sont toutes, quels que soient  $j$  et  $j'$  (allant de 1 à  $q$ ) :

$$\text{cov}_{jj'} = (\sigma_j^2 + \sigma_{j'}^2 - c)/2,$$

$\sigma_j^2$  et  $\sigma_{j'}^2$  étant les variances aux temps  $j$  et  $j'$ , et  $c$  étant une constante positive. Cette condition permet d'assurer que les variances des différences entre les observations effectuées à deux moments différents sont toutes égales entre elles, et égales à  $c$  [STAT1, § 7.3.5] :

$$\sigma_j^2 + \sigma_{j'}^2 - 2\text{cov}_{jj'} = c.$$

Une matrice de variances et covariances qui répond à cette condition est qualifiée de *matrice de type H*<sup>22</sup>.

Cette condition implique que certaines inégalités peuvent exister, non seulement entre les coefficients de corrélation et entre les covariances, mais aussi entre les variances. Elle englobe en outre, comme cas particulier, la condition de symétrie ou symétrie composée (variances égales et covariances ou coefficients de corrélation égaux).

### ⊖ 3° Analyse « en parcelles divisées »

Comme nous l'avons signalé au paragraphe 7.3.6°, les mesures répétées à différents moments sur les mêmes individus sont parfois analysées par analogie avec le principe des expériences en parcelles divisées, les individus observés étant assimilés à de grandes parcelles et les observations successives à de petites parcelles.

La première partie de l'analyse de la variance, qui concerne les « grandes parcelles », c'est-à-dire le ou les facteurs autres que le facteur temps, ne soulève pas de problème particulier. Par contre, la deuxième partie de l'analyse, qui concerne les « petites parcelles », c'est-à-dire le facteur temps et son ou ses interactions avec le ou les autres facteurs, n'est pas correcte d'une manière générale, en raison du fait que les résidus relatifs à chacun des individus ne sont pas indépendants les uns des autres.

Il a toutefois été démontré que l'analyse en question reste applicable quand la condition de HUYNH et FELDT, définie ci-dessus, est satisfaite. Un test particulier,

<sup>20</sup> Un cas particulier d'application de cette condition est celui des séries chronologiques auto-régressives [STAT2, § 15.6.3], pour lesquelles :

$$\rho_2 = \rho_1^2, \quad \dots, \quad \rho_{q-1} = \rho_1^{q-1}.$$

<sup>21</sup> En anglais : HUYNH-FELDT's condition.

<sup>22</sup> En anglais : type H matrix.

connu sous le nom de *test de sphéricité* ou *test de MAUCHLY*<sup>23</sup>, permet de vérifier la validité de cette condition.

En outre, quand cette condition n'est pas remplie, l'analyse reste possible moyennant une réduction des nombres de degrés de liberté de l'interaction ou des interactions du facteur temps avec le ou les autres facteurs, et de la deuxième composante de variation résiduelle. Les noms de GREENHOUSE et GEISSER [1959] et de HUYNH et FELDT [1970] sont souvent associés à cette procédure.

#### ⊖ 4° Autres approches

D'autres approches ont été proposées en ce qui concerne l'étude des mesures répétées à différents moments sur les mêmes unités expérimentales. On peut citer l'utilisation du modèle linéaire mixte et de l'analyse de la variance à plusieurs variables (§ 12.4.4 et 12.4.5). L'emploi du modèle linéaire mixte se justifie en particulier quand de nombreuses données sont manquantes.

La littérature relative aux « mesures répétées » (ou « données longitudinales ») est d'ailleurs particulièrement abondante. On peut se référer notamment aux livres de DAVIS [2002], DIGGLE *et al.* [2002], FITZMAURICE *et al.* [2011], et VERBEKE et MOLENBERGHS [2001], et à divers articles généraux, tels que ceux d'ALBERT [1999], EVERITT [1995], LOONEY et STANLEY [1989], et OMAR *et al.* [1999].

### ⊖ 11.2.3 L'étude des successions de cultures ou rotations

#### 1° Planification

L'étude des successions de cultures ou *rotations*<sup>24</sup> peut se présenter sous différentes formes. Certains expériences, dites de *rotation unique* ou *rotation fixe*<sup>25</sup>, ont pour but de mettre en évidence les éventuels effets, directs ou indirects, résiduels ou cumulatifs, de différents traitements, ou d'une façon plus générale de différents objets, au cours d'une même succession de cultures. D'autres expériences au contraire, dites de *rotations multiples*<sup>26</sup>, ont pour objectif de comparer plusieurs rotations différentes, celles-ci étant soit de même durée (rotations triennales par exemple), soit de durées inégales (rotations biennales et triennales par exemple).

Les principes de base que nous avons évoqués d'une manière générale en ce qui concerne la planification des expériences de longue durée (§ 11.2.1.2°) restent d'application ici, mais d'autres éléments, qui sont parfois contradictoires, s'y ajoutent.

D'une part, il peut être utile d'organiser la succession des cultures de telle sorte qu'au cours de certaines années au moins, les mêmes cultures se trouvent

<sup>23</sup> En anglais : *sphericity test*, MAUCHLY's test.

<sup>24</sup> En anglais : *rotation*, *crop rotation*.

<sup>25</sup> En anglais : *fixed-rotation experiment*.

<sup>26</sup> En anglais : *multi-rotation experiment*.

présentes dans l'ensemble du champ d'expérience, ou au minimum dans l'ensemble d'une ou plusieurs répétitions. L'analyse des résultats doit en effet pouvoir se faire séparément pour les différentes cultures, et il importe donc que celles-ci se retrouvent côte à côte à certains moments.

D'autre part, dans toute la mesure du possible, il y a lieu de décaler les successions de cultures d'une répétition à l'autre, afin que les différentes cultures apparaissent toutes au cours des différentes années.

## 2° Analyse des résultats

L'analyse des résultats des expériences de rotation s'inspire très largement des méthodes relatives aux mesures répétées dans le temps (§ 11.2.2).

Comme dans le cas des mesures répétées, on peut en effet commencer par réaliser des analyses de la variance année par année (ou saison de culture par saison de culture), c'est-à-dire date par date.

On peut aussi effectuer des études de tendances ou d'évolutions générales au cours du temps, en calculant divers paramètres parcelle par parcelle (des différences entre périodes successives ou des coefficients de régression par exemple), et en soumettant ensuite les valeurs de ces paramètres à l'analyse de la variance.

Enfin, on peut envisager de réaliser des analyses de la variance globales, de type « parcelles divisées », en étant attentif à ne pas négliger les corrélations qui existent normalement entre les observations successives faites sur les mêmes parcelles.

Ces diverses analyses sont en général réalisées culture par culture, mais moyennant certaines transformations de variables (transformation logarithmique par exemple), elles peuvent aussi faire intervenir simultanément les observations relatives à deux ou plusieurs cultures. Globalement, des fonctions économiques qui tiennent compte, non seulement des productions, mais aussi des rentabilités des différentes cultures peuvent également être prises en considération.

On peut trouver des informations complémentaires en matière d'étude des rotations dans le livre de JOHN et QUENOUILLE [1977] et dans les publications de LOUGHIN [2006], LOUGHIN *et al.* [2007], SINGH et JONES [2002], et SINGH et PALA [2004].

## 11.3 Exemple 1: expériences répétées en plusieurs endroits

### 11.3.1 Présentation et données

#### 1° Présentation générale

En vue d'illustrer les problèmes que posent la planification et l'analyse des résultats de groupes d'expériences, nous considérons tout d'abord le cas d'une

comparaison de fumures en forêt, sur épicéa commun (*Picea abies* KARST), dans l'ensemble de l'Ardenne belge [ANSIAUX *et al.*, 1977].

Contrairement à ce que nous avons fait pour les exemples précédents, nous ne présentons pas ici le protocole expérimental sous une forme « littéraire », composée de quelques phrases, mais bien à titre d'exemple, sous la forme qu'il pouvait effectivement avoir au début de l'expérimentation (figure 11.3.1). Nous assortissons cette présentation d'une série de commentaires, tandis que la photographie 14 [DAGNELIE, 2009] en donne une illustration visuelle.

## 2° Détails relatifs au protocole expérimental

Une première remarque, de caractère général, est relative au fait que le protocole qui constitue la figure 11.3.1 est assez sommaire, et a en réalité été complété par deux documents annexes, l'un contenant des instructions particulières pour les gestionnaires locaux, responsables des différentes expériences, et l'autre servant de base à la collecte, puis à l'enregistrement des données sur ordinateur. Ces documents comportaient des informations relatives à la numérotation des parcelles, à la numérotation des arbres au sein des parcelles, à la mesure des arbres, etc., telles que :

« La circonférence est mesurée à 1,30 m de hauteur et notée au dernier centimètre entier (par exemple : 45,2 cm = 45 ; 37,8 cm = 37 ; 70,5 cm = 70).

La hauteur est mesurée au dendromètre Blume-Leiss et notée en décimètres (par exemple : 18,9 m = 189 ; 21 m = 210). »

Un deuxième élément qui mérite d'être souligné, en raison de son importance dans le cas d'une série d'expériences répétées à plusieurs endroits, mais qui ne doit pas être négligé non plus dans le cas d'une expérience isolée, est la recherche d'une homogénéité aussi grande que possible dans la réalisation des expériences.

C'est ainsi que le protocole expérimental précise bien que l'ensemble des opérations de choix et de délimitation des parcelles doit être réalisé par une seule personne, que l'épandage des engrais doit être réalisé par deux personnes seulement, qu'avant l'analyse statistique, toutes les données doivent être contrôlées par une seule personne aussi, etc. De même, outre les indications relatives à l'exécution des mesures, dont une partie seulement est reproduite ci-dessus, les instructions fournies aux responsables locaux contenaient des informations relatives à la conduite à suivre en présence de chablis (arbres abattus accidentellement), à la transmission des données, etc.

D'autre part, en ce qui concerne l'organisation des différentes expériences, on peut noter plus particulièrement les quelques points suivants.

Le choix de parcelles utiles de 2,25 ares, en relation avec une densité de 2.000 à 3.000 arbres par hectare, a été effectué en vue d'assurer la présence d'au moins une quarantaine d'arbres mesurables par parcelle. En outre, en raison du type d'expérience, les parcelles utiles en question sont toutes entourées de bordures importantes, qui représentent les trois quarts de l'étendue totale considérée.

Comparaison de fumures sur épicéa commun  
-----

1. But et conditions

Expériences de comparaison de fumures (différentes doses d'un même mélange d'engrais) sur épicéa commun (*Picea abies* KARST) de 25 à 35 ans.

Environ 20 à 25 expériences, réparties dans l'ensemble de l'Ardenne.

2. Traitements

Mélange d'engrais divers comportant approximativement 15 % d'azote ( $\text{NO}_3$  et  $\text{NH}_4$ ), 15 % de  $\text{P}_2\text{O}_5$  et 15 % de  $\text{K}_2\text{O}$ .

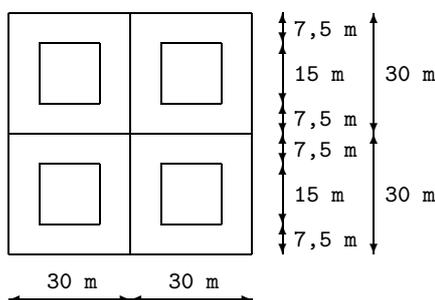
Objets : 1 = 400 kg/ha, 2 = 800 kg/ha, 3 = 1.200 kg/ha et 4 = témoin sans engrais.

Epandage à la volée au printemps 1968.

3. Matériel expérimental

Pessières équiennes de 25 à 35 ans, ayant déjà subi une éclaircie, réunissant 2.000 à 3.000 arbres/ha et ne devant pas subir de nouvelle éclaircie avant 5 ans.

Parcelles unitaires de 30 m sur 30 m (9 ares), dont 15 m sur 15 m (2,25 ares) servant aux observations, les parcelles étant groupées en blocs de 4 (36 ares) selon le schéma suivant :



4. Observations

D'année en année, de 1968 à 1973, avant le départ de la végétation et pour la partie utile de chacune des parcelles : circonférence de tous les arbres à 1,30 m de hauteur.

En 1968 et 1973 et toujours dans les mêmes conditions : hauteur totale de 5 arbres dominants repérés de façon permanente.

**Figure 11.3.1.** Comparaison de fumures sur épicéa commun :  
protocole expérimental.

### 5. Dispositif expérimental

Blocs aléatoires complets.

Deux blocs de 4 parcelles par expérience, soit une superficie totale de 72 ares par expérience, les deux blocs ne devant pas nécessairement être contigus (120 m sur 60 m ou 2 fois 60 m sur 60 m).

### 6. Analyse des résultats

Par parcelle utile, détermination du nombre d'arbres, de la circonférence moyenne, de la surface terrière totale, du volume total (sur base des circonférences individuelles et des hauteurs dominantes), ainsi que des différents accroissements annuels, simples et cumulés, pour l'ensemble des arbres et éventuellement pour différentes catégories de grosseur.

Par expérience et par caractéristique observée ou calculée, analyse de la variance à deux critères de classification :

|               |   |
|---------------|---|
| Fumures       | 3 |
| Blocs         | 1 |
| Fumures-blocs | 3 |
| <hr/>         |   |
| Totaux        | 7 |

Pour l'ensemble des expériences (q expériences) et par caractéristique observée et calculée, après contrôle de l'homogénéité des carrés moyens fumures-blocs, analyse de la variance à trois critères de classification :

|                            |        |
|----------------------------|--------|
| Fumures                    | 3      |
| Lieux                      | q-1    |
| Fumures-lieux              | 3(q-1) |
| Blocs (dans lieux)         | q      |
| Fumures-blocs (dans lieux) | 3q     |
| <hr/>                      |        |
| Totaux                     | 8q-1   |

Le cas échéant, régression linéaire ou parabolique et recherche de maximum(s) et/ou optimum(s).

### 7. Réalisation

Engrais à recevoir des firmes ... et à mettre en sacs de 36 kg (net après mélange) sous la direction de M. ... .

Choix des emplacements et délimitation des parcelles par M. ... .

Epannage des engrais par MM. ... et ... .

Observations par les gestionnaires locaux (agents techniques de l'Administration des Eaux et Forêts notamment), selon instructions à diffuser.

Contrôle de validité des observations par M. ... .

Analyse statistique sous la direction de M. ... .

Interprétation des résultats par M. ... .

**Figure 11.3.1 (suite).** Comparaison de fumures sur épicéa commun : protocole expérimental.

Le choix du nombre d'expériences et du nombre de répétitions par expérience (respectivement 20 à 25 expériences et deux répétitions) a été fait selon les principes exposés au paragraphe 11.1.3.1°. Le choix du dispositif en blocs aléatoires complets ne prête aucunement à discussion, vu le petit nombre d'objets pris en considération, la répartition aléatoire des objets devant être réalisée de façon indépendante pour chacune des expériences et chacun des blocs.

L'utilisation de sacs d'engrais de 36 kg devait permettre de réduire autant que possible les risques d'erreurs relatifs aux opérations d'épandage, dans la mesure où il s'agissait là exactement de la quantité qui devait être utilisée pour chaque parcelle à la dose simple (400 kg/ha), deux sacs étant nécessaires pour la dose double (800 kg/ha), et trois sacs pour la dose triple (1.200 kg/ha).

### 3° Données

Les observations concernent 24 expériences. En vue de leur analyse, les principales caractéristiques définies dans le protocole expérimental ont été considérées non seulement globalement, mais aussi séparément pour les « petits bois » (moins de 60 cm de circonférence au début de l'expérience) et pour les « gros bois » (60 cm ou plus de 60 cm de circonférence au début de l'expérience). Nous envisageons ici l'étude des accroissements moyens en circonférence des gros bois, pour l'ensemble de la période d'observation, soit un intervalle de cinq ans.

Dans un premier stade, ces accroissements, exprimés en centimètres, ont été déterminés arbre par arbre, pour les 1.557 arbres considérés (c'est-à-dire en moyenne, environ huit arbres de 60 cm ou plus de 60 cm de circonférence par parcelle). Ensuite, dans un deuxième stade, des accroissements moyens ont été calculés par parcelle par parcelle et ramenés à des valeurs annuelles.

Les accroissements ainsi obtenus sont donnés dans le tableau 11.3.1, pour les huit parcelles de chacune des 24 expériences.

## 11.3.2 Analyse des résultats

### 1° Examen préliminaire

Un rapide examen visuel du contenu du tableau 11.3.1 met en évidence la présence de valeurs nulles pour les expériences 4 et 22. Il s'agit d'expériences dont certaines parcelles ne contiennent aucun arbre d'une circonférence initiale égale ou supérieure à 60 cm.

Aucune autre anomalie n'apparaît au premier abord, ni par l'intermédiaire de représentations graphiques simples (histogrammes ou « *boxplots* »). Abstraction faite des valeurs nulles, les valeurs extrêmes sont égales à 1,00 et 3,16 cm, avec une moyenne générale égale à 1,89 cm.

**Tableau 11.3.1.** Comparaison de fumures sur épicéa commun : accroissements annuels moyens en circonférence, en centimètres, observés au cours d'une période de cinq ans dans les huit parcelles de 24 expériences, pour les arbres d'une circonférence initiale de 60 cm et plus (Tr. et Bl. = numéros des traitements et des blocs).

| Tr. | Bl. | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   |
|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1   | 1   | 1,78 | 1,68 | 2,12 | 0,00 | 1,34 | 1,80 | 1,78 | 1,90 | 1,98 | 1,86 | 1,72 | 1,90 |
| 1   | 2   | 1,74 | 1,54 | 2,94 | 0,00 | 1,58 | 2,28 | 2,38 | 1,94 | 2,46 | 1,90 | 2,46 | 2,20 |
| 2   | 1   | 1,96 | 2,06 | 2,02 | 2,00 | 1,54 | 1,94 | 2,00 | 2,00 | 1,90 | 2,42 | 1,80 | 2,20 |
| 2   | 2   | 1,58 | 1,78 | 2,30 | 0,00 | 1,48 | 2,34 | 2,22 | 1,94 | 2,54 | 1,62 | 2,22 | 2,40 |
| 3   | 1   | 2,26 | 2,18 | 3,16 | 0,00 | 1,58 | 2,10 | 2,04 | 2,20 | 1,86 | 1,80 | 2,10 | 1,60 |
| 3   | 2   | 1,78 | 1,64 | 2,16 | 0,00 | 1,26 | 2,04 | 2,08 | 1,80 | 2,08 | 2,08 | 1,96 | 2,00 |
| 4   | 1   | 1,74 | 1,44 | 2,08 | 2,40 | 1,66 | 2,16 | 2,50 | 2,10 | 2,16 | 2,12 | 2,26 | 2,20 |
| 4   | 2   | 1,98 | 1,52 | 1,96 | 3,00 | 1,28 | 1,84 | 2,40 | 1,60 | 2,08 | 1,66 | 2,26 | 1,60 |

| Tr. | Bl. | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   | 21   | 22   | 23   | 24   |
|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1   | 1   | 1,68 | 2,02 | 2,00 | 1,60 | 1,68 | 1,56 | 1,18 | 1,74 | 2,20 | 0,00 | 1,46 | 2,02 |
| 1   | 2   | 2,08 | 1,74 | 1,80 | 2,06 | 2,00 | 1,80 | 1,50 | 1,76 | 1,68 | 1,66 | 1,22 | 1,78 |
| 2   | 1   | 1,92 | 1,86 | 1,90 | 2,00 | 1,60 | 1,46 | 1,14 | 1,96 | 1,82 | 1,86 | 1,20 | 1,50 |
| 2   | 2   | 1,74 | 2,12 | 2,20 | 1,80 | 1,68 | 1,80 | 1,24 | 2,32 | 2,64 | 2,00 | 1,42 | 1,92 |
| 3   | 1   | 1,86 | 1,96 | 2,00 | 2,04 | 1,96 | 1,68 | 1,10 | 1,82 | 2,04 | 2,50 | 1,36 | 2,00 |
| 3   | 2   | 2,06 | 2,06 | 2,50 | 2,44 | 1,52 | 1,78 | 1,36 | 1,68 | 2,32 | 1,54 | 1,86 | 1,96 |
| 4   | 1   | 1,98 | 1,60 | 1,76 | 1,66 | 1,70 | 1,46 | 1,00 | 1,50 | 1,96 | 2,10 | 1,36 | 1,80 |
| 4   | 2   | 1,66 | 1,92 | 2,40 | 1,82 | 1,50 | 1,82 | 1,06 | 1,80 | 2,40 | 3,00 | 1,30 | 1,72 |

## 2° Analyses de la variance individuelles

Le tableau 11.3.2 présente l'essentiel des résultats des analyses de la variance à deux critères de classification qui ont été réalisées individuellement pour chacune des 24 expériences. Il s'agit des carrés moyens relatifs aux facteurs fumures et blocs et à l'interaction fumures-blocs, respectivement avec trois, un et trois degrés de liberté, des valeurs des variables  $F$  de FISHER-SNEDECOR relatives au facteur fumures et des probabilités correspondantes. Ce tableau contient aussi, pour les 24 expériences, les moyennes générales et les coefficients de variation résiduels, calculés à partir des carrés moyens de l'interaction fumures-blocs.

Les carrés moyens relatifs au facteur fumures et à l'interaction, de même que les coefficients de variation résiduels, confirment les anomalies qui ont été mises en évidence ci-dessus, en ce qui concerne les expériences 4 et 22. Toutes les valeurs correspondantes sont en effet particulièrement élevées (3,2450 et 1,0430, 0,6450 et 0,6250, 86,8 et 43,1). Ces paramètres permettraient d'ailleurs d'identifier les anomalies en question à ce stade, si elles n'avaient pas déjà été détectées auparavant.

**Tableau 11.3.2.** Comparaison de fumures sur épicéa commun : résultats des analyses de la variance individuelles, moyennes générales et coefficients de variation résiduels, pour les 24 expériences.

| Expér. | Carrés moyens |        |        | Fumures |      | Moy. | C.v. |
|--------|---------------|--------|--------|---------|------|------|------|
|        | Fum.          | Blocs  | Inter. | F       | P    |      |      |
| 1      | 0,0290        | 0,0545 | 0,0542 | 0,53    | 0,69 | 1,85 | 12,6 |
| 2      | 0,0969        | 0,0968 | 0,0337 | 2,87    | 0,20 | 1,73 | 10,6 |
| 3      | 0,1822        | 0,0000 | 0,2942 | 0,62    | 0,65 | 2,34 | 23,2 |
| 4      | 3,2450        | 0,2450 | 0,6450 | 5,03    | 0,11 | 0,93 | 86,8 |
| 5      | 0,0027        | 0,0338 | 0,0401 | 0,07    | 0,97 | 1,47 | 13,7 |
| 6      | 0,0070        | 0,0313 | 0,0723 | 0,10    | 0,96 | 2,06 | 13,0 |
| 7      | 0,0681        | 0,0722 | 0,0459 | 1,48    | 0,38 | 2,18 | 9,9  |
| 8      | 0,0086        | 0,1058 | 0,0339 | 0,25    | 0,86 | 1,94 | 9,5  |
| 9      | 0,0279        | 0,1984 | 0,0497 | 0,56    | 0,68 | 2,13 | 10,4 |
| 10     | 0,0082        | 0,1105 | 0,1185 | 0,07    | 0,97 | 1,93 | 17,8 |
| 11     | 0,0258        | 0,1301 | 0,0806 | 0,32    | 0,81 | 2,10 | 13,5 |
| 12     | 0,0946        | 0,0112 | 0,1046 | 0,90    | 0,53 | 2,01 | 16,1 |
| 13     | 0,0082        | 0,0013 | 0,0554 | 0,15    | 0,92 | 1,87 | 12,6 |
| 14     | 0,0265        | 0,0200 | 0,0364 | 0,73    | 0,60 | 1,91 | 10,0 |
| 15     | 0,0412        | 0,1922 | 0,0675 | 0,61    | 0,65 | 2,07 | 12,6 |
| 16     | 0,0954        | 0,0840 | 0,0449 | 2,13    | 0,28 | 1,93 | 11,0 |
| 17     | 0,0231        | 0,0072 | 0,0547 | 0,42    | 0,75 | 1,71 | 13,7 |
| 18     | 0,0041        | 0,1352 | 0,0071 | 0,59    | 0,66 | 1,67 | 5,0  |
| 19     | 0,0330        | 0,0684 | 0,0078 | 4,24    | 0,13 | 1,20 | 7,4  |
| 20     | 0,0941        | 0,0364 | 0,0278 | 3,39    | 0,17 | 1,82 | 9,1  |
| 21     | 0,0341        | 0,1301 | 0,1591 | 0,21    | 0,88 | 2,13 | 18,7 |
| 22     | 1,0430        | 0,3785 | 0,6250 | 1,67    | 0,34 | 1,83 | 43,1 |
| 23     | 0,0404        | 0,0220 | 0,0526 | 0,77    | 0,58 | 1,40 | 16,4 |
| 24     | 0,0310        | 0,0005 | 0,0402 | 0,77    | 0,58 | 1,84 | 10,9 |

D'autre part, il apparaît qu'aucune des analyses individuelles ne met en évidence des différences significatives entre fumures (valeur minimum de P égale à 0,11).

### 3° Analyse de la variance globale

Les données relatives aux expériences 4 et 22 ont bien évidemment été écartées de l'analyse de la variance globale, qui doit compléter les analyses individuelles. Mais on a aussi écarté de cette analyse les expériences 8, 11, 12 et 15, pour lesquelles les nombres d'arbres de 60 cm de circonférence et plus sont fort réduits (moins de 40 arbres par expérience, chaque fois pour l'ensemble des huit parcelles, c'est-à-dire en moyenne moins de cinq arbres de 60 cm de circonférence et plus par parcelle).

Pour les 18 expériences restantes, les carrés moyens de l'interaction varient de 0,0071 à 0,2942, soit dans un rapport de 1 à 41, et ces carrés moyens sont fortement corrélés avec les moyennes générales des différentes expériences (coefficient de corrélation des logarithmes des moyennes et des logarithmes des carrés moyens égal à 0,67). En conséquence, une transformation logarithmique des données (logarithmes décimaux) a été appliquée, en vue de remédier au mieux à cette situation [STAT2, § 4.4.2].

Le tableau 11.3.3 présente les résultats de l'analyse globale, réalisée après la transformation en question. Cette analyse a la même structure générale que celle du tableau 11.1.2, mais le facteur fumures  $y$  est divisé en trois composantes, linéaire, quadratique et cubique, comme dans l'exemple 8.5 (§ 8.5.2.4°).

**Tableau 11.3.3.** Comparaison de fumures sur épicéa commun : analyse de la variance de l'ensemble des observations, à l'exclusion des expériences 4, 8, 11, 12, 15 et 22, après transformation logarithmique (logarithmes décimaux).

| Sources de variation       | Degrés de liberté | S. des carrés des écarts | Carrés moyens | $F$      | P      |
|----------------------------|-------------------|--------------------------|---------------|----------|--------|
| Fumures                    | 3                 | 0,024174                 | 0,008058      | 4,11 *   | 0,011  |
| Régression linéaire        | 1                 | 0,023263                 | 0,023263      | 11,9 **  | 0,0011 |
| Régression quadratique     | 1                 | 0,000075                 | 0,000075      | 0,04     | 0,85   |
| Régression cubique         | 1                 | 0,000836                 | 0,000836      | 0,43     | 0,52   |
| Lieux                      | 17                | 0,717756                 | 0,042221      | 12,6 *** | 0,0000 |
| Fumures-lieux              | 51                | 0,099944                 | 0,001960      | 0,62     | 0,96   |
| Blocs (dans lieux)         | 18                | 0,060454                 | 0,003359      |          |        |
| Fumures-blocs (dans lieux) | 54                | 0,171747                 | 0,003181      |          |        |
| Totaux                     | 143               | 1,074075                 |               |          |        |

Ce tableau montre l'existence de différences significatives entre fumures, l'existence de différences plus importantes encore entre lieux, une absence d'interaction fumures-lieux, et une très faible influence du facteur blocs, au sein des différents lieux.

#### 4° Interprétation

On peut caractériser très simplement l'effet de la fumure en considérant tout d'abord les moyennes générales relatives aux quatre objets, à savoir les accroissements annuels suivants en circonférence :

$$1,77, \quad 1,83, \quad 1,86 \quad \text{et} \quad 1,92 \text{ cm,}$$

respectivement pour le témoin sans engrais et pour les trois niveaux de fumures (400, 800 et 1.200 kg/ha).

La détermination, dans l'analyse de la variance, des différentes composantes du facteur fumures montre de façon plus précise que, dans le domaine étudié et en termes de logarithmes, ce facteur intervient de manière purement linéaire. La recherche d'une équation de régression simple donne le résultat suivant :

$$\log_{10} C = 0,2400 + 0,02842 F ,$$

C désignant les accroissements annuels moyens en circonférence, en centimètres, et F les fumures, en tonnes par hectare.

Comme :

$$10^{0,02842} = 1,068 \quad \text{et} \quad 10^{0,02842(1,2)} = 1,082 ,$$

on peut en conclure que l'apport d'une tonne d'engrais par hectare conduit à une augmentation de 6,8 % de la croissance en circonférence, et que l'apport de 1,2 tonne d'engrais par hectare, c'est-à-dire la quantité maximum qui a été expérimentée, provoque une augmentation de 8,2 % de la croissance en circonférence. Pour des accroissements annuels moyens en circonférence de l'ordre de 1,5 à 2 cm, il s'agirait d'augmentations de la croissance annuelle en circonférence de 1 à 1,5 mm. Toutes ces valeurs pourraient évidemment être assorties de limites de confiance, puisqu'elles sont simplement fonction du coefficient de régression [STAT2, § 14.3.2].

La connaissance du coût de l'apport d'engrais, d'une part, et de la valeur ajoutée au peuplement, d'autre part, devrait permettre d'apprécier la rentabilité de la fumure. Toutefois, la connaissance de la valeur ajoutée nécessiterait une étude de plus longue durée, afin de savoir pendant combien d'années se maintient la croissance plus rapide due à la fumure, la présente étude portant sur cinq années seulement.

### 5° Interaction fumures-lieux

L'interaction fumures-lieux étant tout à fait non significative, les conclusions qui viennent d'être formulées peuvent être appliquées indistinctement à l'ensemble des 18 expériences considérées, et aucun examen détaillé complémentaire ne se justifie donc. Nous indiquons néanmoins la manière dont un tel examen pourrait être abordé.

Puisque seule la composante linéaire du facteur fumures s'avère importante, on pourrait facilement calculer la valeur de cette composante séparément pour chacune des 18 expériences, puis mettre les valeurs obtenues en relation avec diverses caractéristiques des sites et des peuplements dans lesquels les expériences ont été installées. Dans le cas envisagé, on dispose notamment de l'altitude, de l'exposition et de la pente, ainsi que de l'origine des peuplements et de leur âge au début des expériences [ANSIAUX *et al.*, 1977].

On pourrait ainsi voir si l'effet de la fumure est plus ou moins marqué, par exemple, à basse altitude ou à haute altitude, dans de jeunes peuplements ou dans des peuplements plus âgés, etc.

## 11.4 Exemple 2: expériences répétées en plusieurs endroits et au cours de plusieurs années

### ⊖ 11.4.1 Présentation et données

#### 1° Présentation

Au cours de l'analyse des résultats de l'exemple du paragraphe 10.4 (expérience factorielle  $2^4$  de comparaison de fumures sur cotonnier, réalisée en blocs incomplets), nous avons signalé que les données considérées étaient relatives à une expérience parmi d'autres. Il s'agissait en effet d'une expérience extraite d'un groupe de 12 expériences de même nature, correspondant à six endroits différents et deux années consécutives [VAN RENTERGHEM et DAGNELIE, 1963]. Nous présentons ici l'analyse des résultats de l'ensemble de ces expériences.

Les indications données au paragraphe 10.4.1, quant aux objets, aux unités expérimentales, aux observations et au dispositif expérimental, restent d'application. Nous précisons en outre qu'en chacun des lieux, les expériences des deux années consécutives n'ont pas été réalisées exactement aux mêmes endroits, sur les mêmes parcelles, mais bien en des endroits quelque peu différents, et donc indépendamment d'une année à l'autre.

#### 2° Données

En ce qui concerne les données, nous nous limitons aux moyennes des valeurs observées pour les différentes expériences, aux écarts-types résiduels des analyses de la variance individuelles, réalisées de la même manière que celle du tableau 10.4.2, mais sans transformation de variable, et aux coefficients de variation qui correspondent à ces écarts-types. Ces informations sont présentées dans le tableau 11.4.1.

### ⊖ 11.4.2 Analyse des résultats

#### 1° Examen préliminaire

Le tableau 11.4.1 met en évidence des différences très importantes entre les moyennes générales des différentes expériences, qui varient dans un rapport de 1 à 10, et entre les écarts-types résiduels des analyses de la variance, qui varient dans un rapport de 1 à 8. En outre, il faut noter la quasi-proportionalité entre les moyennes et les écarts-types, les coefficients de variation se situant tous, à une exception près, entre 14 et 26 %.

On peut aussi constater que le coefficient de corrélation entre les logarithmes des moyennes et les logarithmes des écarts-types (ou des variances) est égal à 0,90.

**Tableau 11.4.1.** Comparaison de fumures sur cotonnier : moyennes générales et écarts-types résiduels, en quintaux par hectare, et coefficients de variation résiduels, pour les 12 expériences.

| Lieux et années | Moy.  | Éc.t. | C.v. |
|-----------------|-------|-------|------|
| Hiaka 1958      | 3,15  | 0,75  | 23,9 |
| Hiaka 1959      | 7,51  | 1,84  | 24,5 |
| Lohose 1958     | 2,09  | 0,44  | 21,2 |
| Lohose 1959     | 4,18  | 0,89  | 21,3 |
| Mudimbi 1958    | 1,70  | 0,43  | 25,2 |
| Mudimbi 1959    | 6,94  | 1,49  | 21,5 |
| Olemba 1958     | 5,24  | 0,76  | 14,4 |
| Olemba 1959     | 1,62  | 0,34  | 20,9 |
| Shomba 1958     | 2,69  | 1,35  | 50,4 |
| Shomba 1959     | 10,82 | 2,11  | 19,5 |
| Tambwe 1958     | 1,04  | 0,26  | 25,2 |
| Tambwe 1959     | 5,32  | 0,84  | 15,7 |

Ces divers éléments justifient pleinement l'application d'une transformation logarithmique à l'ensemble des données [STAT2, § 4.4.2]<sup>27</sup>.

## 2° Analyses de la variance individuelles

Le tableau 11.4.2 synthétise les résultats des 12 analyses de la variance individuelles, réalisées après passage aux logarithmes décimaux. Ce tableau contient, pour les 12 expériences, les valeurs observées des variables  $F$  de FISHER-SNEDECOR relatives aux différentes sources de variation, quand ces valeurs sont supérieures à 1, les niveaux de signification qui correspondent à ces valeurs, indiqués conventionnellement par un, deux ou trois astérisques, et les carrés moyens résiduels, avec chaque fois 14 degrés de liberté. Le cas « Shomba 1959 » reprend en particulier certains éléments du tableau 10.4.2.

Globalement, les diverses interactions peuvent être considérées comme non significatives, puisque quatre valeurs seulement sur 120 sont significatives au niveau de probabilité 0,05, sans que ces valeurs ne concernent systématiquement une même interaction. Quant aux effets principaux, ils se marquent surtout, mais de façon assez irrégulière, en ce qui concerne les facteurs N et K.

<sup>27</sup> On aurait pu écarter de l'analyse l'expérience « Shomba 1958 », qui présente un coefficient de variation particulièrement élevé (50,4 %), ou tenter de retrouver l'une ou l'autre anomalie dans les données initiales relatives à cette expérience. Nous ne nous sommes pas engagé dans cette voie, notamment parce que les résultats ultérieurs relatifs à l'expérience en question ne montrent aucune incohérence par comparaison avec les résultats des 11 autres expériences.

**Tableau 11.4.2.** Comparaison de fumures sur cotonnier : principaux résultats des analyses de la variance relatives aux 12 expériences (valeurs des variables  $F$  de FISHER-SNEDECOR, niveaux de signification correspondants, et carrés moyens relatifs aux variations résiduelles)<sup>28</sup>.

| Sources de var. | 1958     |          |          |          |          |          |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                 | Hiaka    | Lohose   | Mudimbi  | Olemba   | Shomba   | Tambwe   |
| N               | –        | –        | –        | –        | 4,16     | 1,90     |
| P               | –        | –        | 9,26**   | 3,77     | 5,33*    | –        |
| K               | 7,07*    | 3,59     | –        | 1,61     | 19,7***  | –        |
| Mg              | –        | 4,97*    | 1,25     | 10,3**   | 2,36     | –        |
| NP              | –        | –        | –        | –        | 1,26     | –        |
| NK              | 2,42     | –        | 1,91     | –        | –        | –        |
| NMg             | 1,99     | –        | –        | 1,22     | 3,07     | 2,21     |
| PK              | –        | 1,01     | –        | 1,19     | 5,10*    | 2,88     |
| PMg             | –        | 1,27     | –        | 1,48     | 1,16     | –        |
| KMg             | –        | 6,41*    | 8,01*    | –        | –        | –        |
| NPK             | –        | –        | 4,09     | –        | –        | –        |
| NPMg            | –        | –        | –        | –        | 2,14     | –        |
| NKMg            | 2,07     | 3,89     | 1,72     | –        | 2,34     | 4,45     |
| PKMg            | 1,52     | –        | 2,83     | 1,83     | –        | –        |
| Var. rés.       | 0,015907 | 0,014653 | 0,010216 | 0,003537 | 0,025164 | 0,016419 |

| Sources de var. | 1959     |          |          |          |          |          |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                 | Hiaka    | Lohose   | Mudimbi  | Olemba   | Shomba   | Tambwe   |
| N               | 14,6**   | 6,82*    | 2,74     | 3,00     | 13,3**   | 21,8***  |
| P               | 2,83     | 1,24     | 1,22     | 1,05     | –        | 2,66     |
| K               | 9,57**   | 8,74*    | 4,81*    | 2,28     | 4,13     | 16,8**   |
| Mg              | –        | –        | –        | 2,66     | –        | –        |
| NP              | 2,60     | –        | –        | –        | –        | –        |
| NK              | –        | 2,08     | –        | –        | 3,38     | 5,58*    |
| NMg             | –        | –        | –        | –        | –        | –        |
| PK              | 1,17     | –        | –        | –        | 3,34     | –        |
| PMg             | –        | 2,97     | –        | 2,77     | –        | –        |
| KMg             | –        | –        | 2,59     | –        | 1,20     | 2,80     |
| NPK             | –        | –        | 2,65     | –        | 1,71     | –        |
| NPMg            | –        | 1,45     | 2,81     | 2,19     | –        | –        |
| NKMg            | –        | –        | –        | –        | 2,00     | –        |
| PKMg            | –        | –        | –        | –        | –        | 1,62     |
| Var. rés.       | 0,013097 | 0,011556 | 0,010131 | 0,008271 | 0,005533 | 0,004246 |

<sup>28</sup> En vue de faciliter la lecture du tableau, les valeurs  $F$  inférieures à 1 sont remplacées par des tirets, tandis que les niveaux de signification sont indiqués conventionnellement par des astérisques.

Comme au paragraphe 10.4.2.2°, la non-signification des interactions permet de regrouper éventuellement celles-ci avec la composante résiduelle, de manière à disposer dans chaque cas de 24 degrés de liberté au lieu de 14. Les résultats de ces regroupements sont présentés dans le tableau 11.4.3, qui confirme l'importance des facteurs N et K.

**Tableau 11.4.3.** Comparaison de fumures sur cotonnier : principaux résultats des analyses de la variance relatives aux 12 expériences, après regroupement de certaines composantes (présentation semblable à celle du tableau 11.4.2).

| Sources de var. | 1958     |          |          |          |          |          |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                 | Hiaka    | Lohose   | Mudimbi  | Olemba   | Shomba   | Tambwe   |
| N               | –        | –        | –        | –        | 3,35     | 1,80     |
| P               | –        | –        | 6,38*    | 4,37*    | 4,29*    | –        |
| K               | 7,06*    | 3,04     | –        | 1,87     | 15,9***  | –        |
| Mg              | –        | 4,20     | –        | 12,0**   | 1,90     | –        |
| Var. rés.       | 0,015932 | 0,017321 | 0,014833 | 0,003046 | 0,031234 | 0,017367 |
| Sources de var. | 1959     |          |          |          |          |          |
|                 | Hiaka    | Lohose   | Mudimbi  | Olemba   | Shomba   | Tambwe   |
| N               | 17,6***  | 7,36*    | 2,80     | 3,53     | 11,6**   | 20,0***  |
| P               | 3,40     | 1,34     | 1,25     | 1,24     | –        | 2,44     |
| K               | 11,5**   | 9,44**   | 4,92*    | 2,68     | 3,59     | 15,4***  |
| Mg              | –        | –        | –        | 3,13     | –        | –        |
| Var. rés.       | 0,010903 | 0,010705 | 0,009918 | 0,007033 | 0,006357 | 0,004621 |

### 3° Première analyse de la variance globale

Le tableau 11.4.4 donne les résultats d'une première analyse de la variance globale, relative à l'ensemble des 12 expériences. Cette analyse de la variance fait intervenir un modèle mixte partiellement hiérarchisé à huit critères de classification.

Les facteurs initiaux N, P, K et Mg sont croisés et fixes, tandis que les facteurs lieux (L) et années (A), également croisés, doivent être considérés comme aléatoires, si on suppose que les lieux et les années envisagés sont représentatifs d'ensembles plus vastes d'emplacements et d'années qui auraient pu voir l'organisation d'autres expériences. Quant aux facteurs subsidiaires répétitions (dans lieux et années) et blocs (dans répétitions, lieux et années), ils sont évidemment hiérarchisés et aléatoires.

Rappelons aussi qu'il y a confusion entre l'interaction NPKMg des quatre facteurs initiaux et le facteur blocs (§ 10.4.1.2°).

À l'examen du tableau 11.4.4, l'élément qui apparaît en premier lieu est l'importance des facteurs lieux et années, dont la contribution représente, en termes

**Tableau 11.4.4.** Comparaison de fumures sur cotonnier : première analyse de la variance de l'ensemble des observations.

| Sources de variation | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | F      | P     |
|----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|--------|-------|
| N                    | 1                 | 0,389003                     | 0,389003      |        |       |
| P                    | 1                 | 0,023453                     | 0,023453      |        |       |
| K                    | 1                 | 0,689441                     | 0,689441      |        |       |
| Mg                   | 1                 | 0,003719                     | 0,003719      |        |       |
| NP                   | 1                 | 0,001233                     | 0,001233      |        |       |
| NK                   | 1                 | 0,001890                     | 0,001890      |        |       |
| NMg                  | 1                 | 0,004988                     | 0,004988      |        |       |
| PK                   | 1                 | 0,000633                     | 0,000633      |        |       |
| PMg                  | 1                 | 0,013502                     | 0,013502      |        |       |
| KMg                  | 1                 | 0,001564                     | 0,001564      |        |       |
| NPK                  | 1                 | 0,013944                     | 0,013944      |        |       |
| NPMg                 | 1                 | 0,022143                     | 0,022143      |        |       |
| NKMg                 | 1                 | 0,000024                     | 0,000024      |        |       |
| PKMg                 | 1                 | 0,020141                     | 0,020141      |        |       |
| NL                   | 5                 | 0,124809                     | 0,024962      | 2,96   | 0,13  |
| PL                   | 5                 | 0,133390                     | 0,026678      | 0,86   | 0,57  |
| KL                   | 5                 | 0,168198                     | 0,033640      | 0,83   | 0,58  |
| MgL                  | 5                 | 0,163599                     | 0,032720      | 3,25   | 0,11  |
| NPL                  | 5                 | 0,020516                     | 0,004103      | 0,29   | 0,90  |
| NKL                  | 5                 | 0,073289                     | 0,014658      | 0,87   | 0,56  |
| NMgL                 | 5                 | 0,087592                     | 0,017518      | 1,08   | 0,47  |
| PKL                  | 5                 | 0,064406                     | 0,012881      | 0,36   | 0,85  |
| PMgL                 | 5                 | 0,028628                     | 0,005726      | 0,35   | 0,86  |
| KMgL                 | 5                 | 0,039462                     | 0,007892      | 0,21   | 0,94  |
| NPKL                 | 5                 | 0,076600                     | 0,015320      | 10,4 * | 0,011 |
| NPMgL                | 5                 | 0,095818                     | 0,019164      | 2,95   | 0,13  |
| NKMgL                | 5                 | 0,084526                     | 0,016905      | 0,54   | 0,74  |
| PKMgL                | 5                 | 0,026103                     | 0,005221      | 0,84   | 0,57  |
| NA                   | 1                 | 0,096267                     | 0,096267      | 11,4 * | 0,020 |
| PA                   | 1                 | 0,027490                     | 0,027490      | 0,88   | 0,39  |
| KA                   | 1                 | 0,000035                     | 0,000035      | 0,00   | 0,98  |
| MgA                  | 1                 | 0,002965                     | 0,002965      | 0,29   | 0,61  |
| NPA                  | 1                 | 0,000906                     | 0,000906      | 0,06   | 0,81  |
| NKA                  | 1                 | 0,001047                     | 0,001047      | 0,06   | 0,81  |
| NMgA                 | 1                 | 0,001576                     | 0,001576      | 0,10   | 0,77  |
| PKA                  | 1                 | 0,000030                     | 0,000030      | 0,00   | 0,98  |
| PMgA                 | 1                 | 0,002218                     | 0,002218      | 0,14   | 0,73  |
| KMgA                 | 1                 | 0,001273                     | 0,001273      | 0,03   | 0,86  |
| NPKA                 | 1                 | 0,000104                     | 0,000104      | 0,07   | 0,80  |
| NPMgA                | 1                 | 0,005597                     | 0,005597      | 0,86   | 0,40  |
| NKMgA                | 1                 | 0,024865                     | 0,024865      | 0,79   | 0,42  |
| PKMgA                | 1                 | 0,012707                     | 0,012707      | 2,05   | 0,21  |

**Tableau 11.4.4 (suite).** Comparaison de fumures sur cotonnier : première analyse de la variance de l'ensemble des observations.

| Sources de variation  | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | <i>F</i> | P      |
|-----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|----------|--------|
| NLA                   | 5                 | 0,042205                     | 0,008441      | 0,73     | 0,60   |
| PLA                   | 5                 | 0,155952                     | 0,031190      | 2,70 *   | 0,023  |
| KLA                   | 5                 | 0,203286                     | 0,040657      | 3,52 **  | 0,0048 |
| MgLA                  | 5                 | 0,050283                     | 0,010057      | 0,87     | 0,50   |
| NPLA                  | 5                 | 0,070933                     | 0,014187      | 1,23     | 0,30   |
| NKLA                  | 5                 | 0,084443                     | 0,016889      | 1,46     | 0,21   |
| NMgLA                 | 5                 | 0,081223                     | 0,016245      | 1,41     | 0,22   |
| PKLA                  | 5                 | 0,177443                     | 0,035489      | 3,07 *   | 0,011  |
| PMgLA                 | 5                 | 0,081310                     | 0,016262      | 1,41     | 0,22   |
| KMgLA                 | 5                 | 0,189186                     | 0,037837      | 3,27 **  | 0,0076 |
| NPKLA                 | 5                 | 0,007365                     | 0,001473      | 0,13     | 0,99   |
| NPMgLA                | 5                 | 0,032456                     | 0,006491      | 0,56     | 0,73   |
| NKMgLA                | 5                 | 0,157567                     | 0,031513      | 2,73 *   | 0,021  |
| PKMgLA                | 5                 | 0,030943                     | 0,006189      | 0,54     | 0,75   |
| Lieux (L)             | 5                 | 5,214215                     | 1,042843      |          |        |
| Années (A)            | 1                 | 12,828685                    | 12,828685     |          |        |
| Lieux-années          | 5                 | 15,155619                    | 3,031124      |          |        |
| Rép. (dans L et A)    | 12                | 0,791551                     | 0,065963      |          |        |
| Bl. (ds rép., L et A) | 24                | 0,800128                     | 0,033339      |          |        |
| Variation résiduelle  | 168               | 1,942222                     | 0,011561      |          |        |
| Totaux                | 383               | 40,646709                    |               |          |        |

de sommes des carrés des écarts, plus de 80 % de la variation totale. Les différences entre années s'avèrent aussi beaucoup plus marquées que les différences entre lieux, ce qui va dans le sens de certaines des remarques formulées au paragraphe 11.1.3.

Les facteurs répétitions et blocs sont nettement moins importants, mais cependant non négligeables. En procédant comme au paragraphe 10.4.2.2°, on peut d'ailleurs estimer globalement l'efficacité relative des expériences considérées par rapport à des expériences en blocs aléatoires complets sans confusion d'effets à 124 %, et l'efficacité relative de telles expériences par rapport à des expériences complètement aléatoires à 121 %. Les deux niveaux de « contrôle » de la variabilité résiduelle sont donc d'un intérêt relativement équivalent.

Les diverses interactions des facteurs initiaux N, P, K et Mg avec les facteurs lieux *et* années (NLA à PKMgLA) doivent être testées en premier lieu, par rapport à la composante résiduelle. Trois valeurs *F* sont significatives au niveau de probabilité 0,05, et deux autres valeurs au niveau de probabilité 0,01. En particulier, les interactions en question pourraient indiquer que l'influence des facteurs P et K

peut varier d'un endroit à l'autre et d'une année à l'autre (interactions PLA, KLA et PKLA significatives).

Les diverses interactions des facteurs N, P, K et Mg avec les facteurs lieux *ou* années (NL à PKMgL d'une part et NA à PKMgA d'autre part) peuvent ensuite être testées par rapport aux interactions correspondantes avec les facteurs lieux *et* années (NL et NA par rapport à NLA, etc.). Rien de réellement significatif n'apparaît à ce stade, mais il faut noter que ces comparaisons sont nettement moins sensibles que les précédentes, en raison des différences importantes entre les nombres de degrés de liberté (5 et 5 ou 1 et 5 degrés de liberté, au lieu de 5 et 168 degrés de liberté).

#### 4° Deuxième analyse de la variance globale

En ce qui concerne les facteurs initiaux N, P, K et Mg et leurs différentes interactions (NP à PKMg), l'analyse de la variance qui vient d'être présentée ne fournit aucun test simple qui puisse être appliqué d'une manière générale. Toutefois, dans le cas présent, en l'absence d'interaction avec le facteur lieux d'une part et avec le facteur années d'autre part, des tests peuvent éventuellement être réalisés soit par rapport aux interactions avec le facteur lieux (N par rapport à NL, etc.), soit par rapport aux interactions avec le facteur années (N par rapport à NA, etc.), soit par rapport aux interactions avec les deux facteurs lieux *et* années (N par rapport à NLA, etc.), soit encore par rapport à des regroupements de ces diverses interactions (N par rapport au regroupement de NL, NA et NLA, etc.)<sup>29</sup>. Nous avons opté pour cette dernière solution, qui fournit le plus grand nombre de degrés de liberté (1 et 11 degrés de liberté dans chaque cas).

Le tableau 11.4.5 présente les résultats qui peuvent être obtenus de cette manière, chacune des lignes N(LA) à PKMg(LA) résultant du regroupement des lignes correspondantes (NL à PKMgL, NA à PKMgA, et NLA à PKMgLA) du tableau 11.4.4.

Cette analyse est aussi celle qui aurait dû être réalisée dès le départ, si les 12 expériences avaient été considérées comme formant un tout, indépendamment de la distinction entre lieux et années. Les lignes « Lieux », « Années » et « Lieux-années » auraient alors dû être également regroupées, et les interactions N(LA) à PKMg(LA) auraient pu être testées directement par rapport à la variation résiduelle.

Le tableau 11.4.5 confirme et précise l'impression initiale, à savoir que seuls les fumures azotée et potassique ont un effet significatif sur le rendement.

<sup>29</sup> Les différentes informations que nous donnons à propos de la réalisation des tests peuvent être justifiées de manière intuitive par analogie avec le cas de l'analyse de la variance à trois critères de classification comportant un facteur fixe et deux facteurs aléatoires. Dans le cas général de facteurs désignés par les lettres A, B et C, si le facteur A est fixe, tandis que les facteurs B et C sont aléatoires, l'interaction ABC peut être testée par rapport à la composante résiduelle, les interactions AB et AC peuvent être testées par rapport à l'interaction ABC, et en l'absence d'interaction AB et AC, le facteur A peut être testé par rapport aux composantes AB *ou* AC *ou* ABC, ou par rapport à un regroupement de ces trois composantes [STAT2, § 11.2.3].

**Tableau 11.4.5.** Comparaison de fumures sur cotonnier : deuxième analyse de la variance de l'ensemble des observations.

| Sources de variation  | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | F        | P      |
|-----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|----------|--------|
| N                     | 1                 | 0,389003                     | 0,389003      | 16,3 **  | 0,0020 |
| P                     | 1                 | 0,023453                     | 0,023453      | 0,81     | 0,39   |
| K                     | 1                 | 0,689441                     | 0,689441      | 20,4 *** | 0,0009 |
| Mg                    | 1                 | 0,003719                     | 0,003719      | 0,19     | 0,67   |
| NP                    | 1                 | 0,001233                     | 0,001233      | 0,15     | 0,71   |
| NK                    | 1                 | 0,001890                     | 0,001890      | 0,13     | 0,72   |
| NMg                   | 1                 | 0,004988                     | 0,004988      | 0,32     | 0,58   |
| PK                    | 1                 | 0,000633                     | 0,000633      | 0,03     | 0,87   |
| PMg                   | 1                 | 0,013502                     | 0,013502      | 1,32     | 0,27   |
| KMg                   | 1                 | 0,001564                     | 0,001564      | 0,07     | 0,79   |
| NPK                   | 1                 | 0,013944                     | 0,013944      | 1,82     | 0,20   |
| NPMg                  | 1                 | 0,022143                     | 0,022143      | 1,82     | 0,20   |
| NKMg                  | 1                 | 0,000024                     | 0,000024      | 0,00     | 0,98   |
| PKMg                  | 1                 | 0,020141                     | 0,020141      | 3,18     | 0,10   |
| N(LA)                 | 11                | 0,263281                     | 0,023935      |          |        |
| P(LA)                 | 11                | 0,316832                     | 0,028803      |          |        |
| K(LA)                 | 11                | 0,371519                     | 0,033774      |          |        |
| Mg(LA)                | 11                | 0,216847                     | 0,019713      |          |        |
| NP(LA)                | 11                | 0,092355                     | 0,008396      |          |        |
| NK(LA)                | 11                | 0,158779                     | 0,014434      |          |        |
| NMg(LA)               | 11                | 0,170391                     | 0,015490      |          |        |
| PK(LA)                | 11                | 0,241879                     | 0,021989      |          |        |
| PMg(LA)               | 11                | 0,112156                     | 0,010196      |          |        |
| KMg(LA)               | 11                | 0,229921                     | 0,020902      |          |        |
| NPK(LA)               | 11                | 0,084069                     | 0,007643      |          |        |
| NPMg(LA)              | 11                | 0,133871                     | 0,012170      |          |        |
| NKMg(LA)              | 11                | 0,266958                     | 0,024269      |          |        |
| PKMg(LA)              | 11                | 0,069753                     | 0,006341      |          |        |
| Lieux (L)             | 5                 | 5,214215                     | 1,042843      |          |        |
| Années (A)            | 1                 | 12,828685                    | 12,828685     |          |        |
| Lieux-années          | 5                 | 15,155619                    | 3,031124      |          |        |
| Rép. (dans L et A)    | 12                | 0,791551                     | 0,065963      |          |        |
| Bl. (ds rép., L et A) | 24                | 0,800128                     | 0,033339      |          |        |
| Variation résiduelle  | 168               | 1,942222                     | 0,011561      |          |        |
| Totaux                | 383               | 40,646709                    |               |          |        |

### 5° Interprétation

Comme nous l'avons fait à diverses reprises antérieurement, et notamment en ce qui concerne l'exemple du paragraphe 10.4, nous pouvons terminer l'analyse en chiffrant l'influence des deux facteurs qui s'avèrent significatifs.

Les moyennes des logarithmes des rendements des 192 parcelles sans azote et des 192 parcelles avec azote étant égales respectivement à 0,49471 et 0,55837, la valeur estimée et l'intervalle de confiance relatifs à l'influence de la fumure azotée peuvent être déterminés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 0,55837 - 0,49471 \pm 2,201 \sqrt{2(0,023935)/192} &= 0,06366 \pm 0,03475 \\ &= 0,02891 \text{ et } 0,09841. \end{aligned}$$

Le retour aux valeurs initiales met donc en évidence, en moyenne pour l'ensemble des 12 expériences, un accroissement de rendement estimé à 16 %, avec des limites de confiance égales à 7 et 25 %.

D'une manière semblable, on obtient pour la fumure potassique :

$$\begin{aligned} 0,56891 - 0,48417 \pm 2,201 \sqrt{2(0,033774)/192} &= 0,08474 \pm 0,04128 \\ &= 0,04346 \text{ et } 0,12602, \end{aligned}$$

soit un accroissement de rendement estimé à 22 %, avec des limites de confiance égales à 11 et 34 %.

On peut considérer en outre que les deux effets sont additifs en termes de logarithmes, et donc multiplicatifs en termes de rendements, puisque leur interaction est tout à fait non significative ( $P = 0,72$ ). L'effet cumulé des fumures azotée et potassique est en conséquence de l'ordre de 40 % :

$$10^{(0,06366+0,08474)} = 1,407 \quad \text{ou} \quad 1,16 \times 1,22 = 1,42.$$

On remarquera aussi que les deux effets qui sont globalement très significatifs pour l'ensemble des 12 expériences sont ceux qui apparaissaient déjà dans le seul cas « Shomba 1958 », l'un étant significatif et l'autre proche de la signification (tableau 10.4.3).

Enfin, comme pour une seule expérience, le problème envisagé ici aurait pu être abordé également par l'étude des diagrammes ou demi-diagrammes de probabilité et la régression multiple.

## 11.5 Exemple 3 : mesures répétées à différents moments

### ⊖ 11.5.1 Présentation et données

#### 1° Présentation

En matière de mesures répétées à différents moments sur les mêmes unités expérimentales, nous considérons le cas de quatre lots de taureaux auxquels des alimentations différentes ont été données et dont la croissance a été observée pendant plusieurs mois [STASSE, 1986].

Au terme d'une période d'acclimatation d'un mois et demi, 20 taureaux ont été répartis en quatre lots de même poids moyen, les quatre lots se voyant attribuer au hasard quatre alimentations différentes.

La constitution de lots de même poids moyen ne correspond pas du tout à l'idée d'une répartition aléatoire et est donc critiquable au point de vue statistique, comme nous l'avons signalé au paragraphe 5.3.2°. Nous considérons néanmoins ce cas, qui nous permettra de voir quelle peut être l'incidence d'une telle pratique.

Les poids des animaux ont été observés au début de l'expérience, puis encore à cinq reprises durant cinq mois et demi, à des intervalles de temps allant de 25 à 45 jours.

### 2° Données

Les poids observés sont présentés dans le tableau 11.5.1, en fonction des dates d'observations et des nombres de jours écoulés à partir de la pesée initiale (notée 0). Quelques autres informations, qui nous serviront ultérieurement, figurent également dans les colonnes de droite de ce tableau.

## ⊖ 11.5.2 Analyse des résultats

### 1° Examen préliminaire

Le tableau 11.5.1 montre tout d'abord que les deux dernières observations sont manquantes pour le taureau n° 15 qui, malade, a dû être abattu prématurément. De plus, la partie gauche de la figure 11.5.1, qui présente les « courbes de croissance » (en fait des lignes brisées) relatives aux 20 taureaux, indique aussi que la croissance de cet animal avait déjà été ralentie entre la deuxième et la troisième mesure, puis entre la troisième et la quatrième mesure. Ce taureau a en conséquence été écarté de l'ensemble de l'analyse.

En dehors de ce cas particulier, toutes les croissances semblent bien régulières, pratiquement linéaires et du même ordre de grandeur. La partie droite de la figure 11.5.1, qui concerne les moyennes des quatre lots d'animaux, confirme l'allure générale des différentes croissances, avec une très légère courbure et sans différences importantes entre les alimentations.

### 2° Analyses de la variance par date

Dans un premier temps, on peut réaliser de façon très simple les analyses de la variance à un critère de classification qui correspondent aux différentes dates. Les résultats de ces analyses figurent dans la première partie du tableau 11.5.2. Il s'agit, pour les 19 taureaux considérés, des nombres de degrés de liberté et des carrés moyens relatifs aux facteurs alimentations et taureaux, ainsi que des valeurs  $F$  des variables de FISHER-SNEDECOR et des probabilités correspondantes<sup>30</sup>.

<sup>30</sup> Les carrés moyens « taureaux » de ces analyses en sont aussi les carrés moyens résiduels.

**Tableau 11.5.1.** Comparaison de quatre alimentations (A) attribuées à 20 taureaux (T) : poids observés à différentes dates, poids moyens (Moy.) et gains de poids ( $\Delta P$ ), en kg, gains de poids moyens journaliers ( $\Delta P/j$ ) et coefficients de régression (Régr.), en kg/jour.

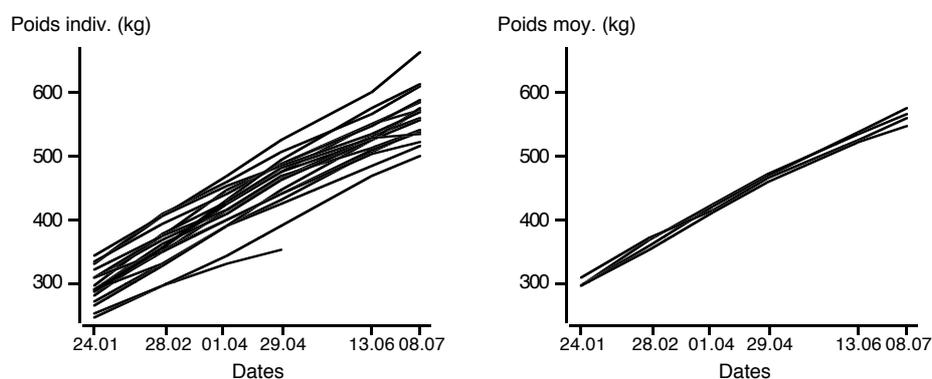
| A | T  | 24.01<br>0 | 28.02<br>35 | 01.04<br>67 | 29.04<br>95 | 13.06<br>140 | 08.07<br>165 | Moy.  | $\Delta P$ | $\Delta P/j$ | Régr. |
|---|----|------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|-------|------------|--------------|-------|
| 1 | 1  | 329        | 408         | 457         | 506         | 567          | 611          | 479,7 | 282        | 1,709        | 1,655 |
| 1 | 2  | 306        | 365         | 414         | 463         | 527          | 535          | 435,0 | 229        | 1,388        | 1,441 |
| 1 | 3  | 293        | 375         | 426         | 473         | 525          | 572          | 444,0 | 279        | 1,691        | 1,615 |
| 1 | 4  | 277        | 355         | 422         | 475         | 551          | 572          | 442,0 | 295        | 1,788        | 1,813 |
| 1 | 5  | 269        | 330         | 390         | 430         | 505          | 541          | 410,8 | 272        | 1,648        | 1,649 |
| 2 | 6  | 327        | 403         | 468         | 525         | 602          | 664          | 498,2 | 337        | 2,042        | 1,998 |
| 2 | 7  | 307        | 374         | 444         | 488         | 550          | 585          | 458,0 | 278        | 1,685        | 1,677 |
| 2 | 8  | 284        | 348         | 415         | 460         | 531          | 559          | 432,8 | 275        | 1,667        | 1,686 |
| 2 | 9  | 286        | 329         | 388         | 423         | 485          | 514          | 404,2 | 228        | 1,382        | 1,406 |
| 2 | 10 | 263        | 325         | 389         | 445         | 525          | 557          | 417,3 | 294        | 1,782        | 1,821 |
| 3 | 11 | 333        | 393         | 440         | 487         | 547          | 588          | 464,7 | 255        | 1,545        | 1,525 |
| 3 | 12 | 318        | 373         | 415         | 467         | 512          | 539          | 437,3 | 221        | 1,339        | 1,344 |
| 3 | 13 | 289        | 361         | 407         | 461         | 526          | 575          | 436,5 | 286        | 1,733        | 1,691 |
| 3 | 14 | 286        | 350         | 398         | 439         | 509          | 538          | 420,0 | 252        | 1,527        | 1,524 |
| 3 | 15 | 244        | 295         | 327         | 351         | —            | —            | —     | —          | —            | —     |
| 4 | 16 | 342        | 403         | 452         | 484         | 535          | 569          | 464,2 | 227        | 1,376        | 1,336 |
| 4 | 17 | 306        | 348         | 397         | 439         | 501          | 521          | 418,7 | 215        | 1,303        | 1,350 |
| 4 | 18 | 287        | 354         | 431         | 492         | 576          | 612          | 458,7 | 325        | 1,970        | 2,013 |
| 4 | 19 | 283        | 355         | 425         | 480         | 528          | 535          | 434,3 | 252        | 1,527        | 1,567 |
| 4 | 20 | 248        | 294         | 342         | 390         | 468          | 499          | 373,5 | 251        | 1,521        | 1,565 |

Ces analyses ne mettent en évidence aucune différence significative entre les alimentations.

### 3° Analyses de la variance de paramètres synthétiques

On peut également considérer, plutôt que les diverses séries de mesures instantanées, certains paramètres synthétiques, qui sont fonction, pour chaque taureau, de deux ou plusieurs observations individuelles.

Une première possibilité correspond aux gains de poids observés durant toute la période envisagée ou, ce qui est équivalent, aux gains de poids moyens journaliers, calculés sur l'ensemble de la même période. Les gains de poids et les gains moyens journaliers sont donnés dans la partie droite du tableau 11.5.1 (colonnes  $\Delta P$  et  $\Delta P/j$ ), et les résultats des analyses de la variance correspondantes figurent dans la deuxième partie du tableau 11.5.2.



**Figure 11.5.1.** Comparaison de quatre alimentations attribuées à 20 taureaux : représentation graphique de la croissance individuelle des taureaux et de la croissance moyenne relative aux quatre alimentations.

**Tableau 11.5.2.** Comparaison de quatre alimentations attribuées à des taureaux : résultats de diverses analyses de la variance et de la covariance.

|              | D. l. et carrés moyens |          |    |        | $F$  | $P$  |
|--------------|------------------------|----------|----|--------|------|------|
|              | Aliment.               | Taureaux |    |        |      |      |
| 24.01        | 3                      | 172      | 15 | 730    | 0,24 | 0,87 |
| 28.02        | 3                      | 357      | 15 | 970    | 0,37 | 0,78 |
| 01.04        | 3                      | 164      | 15 | 1.028  | 0,16 | 0,92 |
| 29.04        | 3                      | 158      | 15 | 1.181  | 0,13 | 0,94 |
| 13.06        | 3                      | 339      | 15 | 1.132  | 0,30 | 0,83 |
| 08.07        | 3                      | 716      | 15 | 1.718  | 0,42 | 0,74 |
| $\Delta P$   | 3                      | 945      | 15 | 1.206  | 0,78 | 0,52 |
| $\Delta P/j$ | 3                      | 0,0347   | 15 | 0,0443 | 0,78 | 0,52 |
| Régr.        | 3                      | 0,0339   | 15 | 0,0412 | 0,82 | 0,50 |
| Init.        | 3                      | 3        | 16 | 880    | 0,00 | 1,00 |
| Moy.         | 3                      | 172      | 15 | 956    | 0,18 | 0,91 |
| Cov.         | 3                      | 881      | 14 | 1.275  | 0,69 | 0,57 |

Pas plus que pour les différentes dates considérées individuellement, les différences entre les alimentations ne sont significatives de cette manière<sup>31</sup>.

Dans la mesure où on a constaté que la croissance en poids des différents animaux est sensiblement linéaire (figure 11.5.1), une autre possibilité consiste à calculer individuellement, pour chacun des animaux, un coefficient de régression

<sup>31</sup> Les valeurs  $F$  et  $P$  relatives à ces deux analyses sont nécessairement identiques.

du poids en fonction du temps, et à soumettre ces coefficients à une analyse de la variance. Les coefficients de régression, dont les valeurs sont évidemment très proches des gains moyens journaliers, constituent la dernière colonne du tableau 11.5.1 (colonne « Régr. »), et les résultats de l'analyse de la variance correspondante figurent aussi dans le tableau 11.5.2.

Les résultats obtenus sont effectivement très semblables à ceux qui concernent les gains moyens journaliers, les différences entre les alimentations n'étant pas significatives non plus.

Ces diverses possibilités d'analyse, de même que d'autres qui interviendront plus loin, sont présentées ici à titre didactique, sans que cela implique bien sûr que toutes les options doivent être envisagées en pratique dans tous les cas. On peut très bien se contenter d'envisager uniquement, dans certaines applications, les accroissements en hauteur, en circonférence, en poids, etc., comme nous l'avons déjà fait dans les exemples des paragraphes 8.5 et 11.3.

À ce propos, il faut noter que, le plus souvent, les analyses de la variance réalisées sur des accroissements ou sur des paramètres de croissance tels que des coefficients de régression donnent de meilleurs résultats que les analyses de la variance relatives individuellement aux différentes dates. Cette observation transparaît quelque peu dans le tableau 11.5.2, où les valeurs  $F$  relatives aux lignes  $\Delta P$ ,  $\Delta P/j$  et « Régr. » sont sensiblement supérieures aux valeurs correspondantes relatives aux différentes dates, les probabilités se différenciant également, mais évidemment dans le sens opposé.

#### 4° Constitution de lots de même poids moyen

Nous ouvrons une parenthèse, dans l'analyse des données du tableau 11.5.1, pour prolonger la discussion du problème de la constitution de lots d'animaux de même poids moyen.

À cet égard, la ligne « Init. » du tableau 11.5.2 présente les résultats de l'analyse de la variance relative aux poids initiaux de l'ensemble des 20 taureaux. Ces résultats montrent que les différences entre lots, avant l'attribution des différentes alimentations (et sans élimination du taureau 15), sont effectivement quasi nulles.

En fait, la somme des carrés des écarts totale des poids initiaux, indépendamment de la répartition des taureaux en quatre lots, est égale à 14.087. Le carré moyen total de l'analyse de la variance relative aux poids initiaux est donc :

$$14.087/19 = 741 .$$

En cas de constitution de lots selon une procédure complètement aléatoire, et en l'absence de toute différence induite par l'un ou l'autre traitement, le carré moyen factoriel, le carré moyen résiduel et le carré moyen total seraient tous trois égaux entre eux en moyenne [STAT2, § 9.3.2], de telle sorte que le carré moyen résiduel devrait être proche de 741. Par contre, par la constitution de lots de même poids

moyen, l'ensemble de la variation totale est affecté à la seule composante résiduelle de l'analyse, le carré moyen résiduel étant alors :

$$14.087/16 = 880,$$

soit la valeur qui apparaît effectivement dans le tableau 11.5.2.

Cet exemple numérique montre que le fait de constituer des lots de même poids moyen a pour conséquence d'augmenter la valeur du carré moyen résiduel, et donc de diminuer la puissance de l'analyse de la variance. Le rapport des valeurs 741 et 880, qui correspond exactement au rapport des nombres de degrés de liberté 16 et 19, soit 84 %, est l'efficacité relative des deux procédures. Dans le cas présent, la constitution de lots de même poids moyen conduit donc à une perte d'efficacité égale à 16 %, et non pas à un gain d'efficacité.

### 5° Analyse de la variance « en parcelles divisées »

Le tableau 11.5.3 donne les résultats de l'analyse de la variance qui peut être réalisée selon le principe des parcelles divisées, pour l'ensemble des 19 taureaux considérés. Dans cette analyse, qui a la même structure que celle du tableau 7.2.2, les taureaux sont assimilés aux grandes parcelles et les dates aux petites parcelles. En particulier, la ligne « Taureaux » du tableau 11.5.3 correspond à la « Variation résiduelle 1 » du tableau 7.2.2, et la ligne « Variation résiduelle » du tableau 11.5.3 correspond à la « Variation résiduelle 2 » du tableau 7.2.2.

**Tableau 11.5.3.** Comparaison de quatre alimentations attribuées à 19 taureaux : résultats de l'analyse de la variance « en parcelles divisées ».

| Sources de variation | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | F       | P      |
|----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|---------|--------|
| Alimentations        | 3                 | 3.088                        | 1.029         | 0,18    | 0,91   |
| Taureaux             | 15                | 85.997                       | 5.733         |         |        |
| Dates                | 5                 | 972.549                      | 194.510       | 948 *** | 0,0000 |
| Alimentations-dates  | 15                | 2.631                        | 175           | 0,85    | 0,62   |
| Variation résiduelle | 75                | 15.389                       | 205,2         |         |        |
| Totaux               | 113               | 1.079.654                    |               |         |        |

La première partie de cette analyse ne soulève aucun problème particulier, mais ne présente pas non plus beaucoup d'intérêt. La comparaison qui y est faite concerne en effet les poids moyens des taureaux, relatifs aux différentes alimentations, les moyennes étant calculées pour l'ensemble des différentes dates.

Cette analyse est strictement équivalente à l'analyse de la variance qui peut être réalisée sur les moyennes données dans le tableau 11.5.1 (colonne « Moy. »). Les résultats de cette dernière analyse sont résumés dans la ligne « Moy. » du tableau 11.5.2. Ils montrent que les carrés moyens, de même que les sommes des

carrés des écarts, sont six fois moins élevées dans un cas que dans l'autre, le rapport 6 correspondant au nombre de dates d'observation. En conséquence aussi, les valeurs  $F$  et les probabilités qui en découlent sont nécessairement identiques dans les deux cas.

Il est évident que, considérée indépendamment de la deuxième partie, une telle analyse ne peut que donner de moins bons résultats qu'une analyse réalisée par exemple, comme ci-dessus, sur les gains de poids (ou les gains moyens journaliers en poids).

La deuxième partie du tableau 11.5.3 soulève par contre des problèmes théoriques de deux ordres.

D'une part, l'élimination a posteriori d'un taureau (n° 15 du tableau 11.5.1) a pour conséquence que les effectifs des différents lots sont inégaux et que l'analyse de la variance est donc non orthogonale (§ 12.4.1). Le facteur dates doit de ce fait subir un ajustement, qui conduit à l'obtention d'un carré moyen égal à 191.569, au lieu de 194.510, et une valeur  $F$  égale à 934, au lieu de 948.

D'autre part, et ce problème est beaucoup plus important, le relatif parallélisme des « courbes de croissance » de la partie gauche de la figure 11.5.1 est un indice du fait que des corrélations importantes doivent exister entre les poids successifs des différents animaux. On peut montrer en outre que la condition de HUYNH et FELDT, dont nous avons parlé au paragraphe 11.2.2.3°, n'est pas satisfaite. Le test de MAUCHLY [1940], dont nous ne donnons pas le détail, conduit en effet à une valeur observée égale à 86,8, pour une variable  $\chi^2$  de PEARSON à 28 degrés de liberté, et donc à une probabilité associée à cette valeur pratiquement nulle.

Les nombres de degrés de liberté de la deuxième partie du tableau 11.5.3 doivent en conséquence être réduits. Selon le critère de GREENHOUSE et GEISSER [1959], la réduction doit être de 69 % (valeur  $\varepsilon$  de GREENHOUSE et GEISSER égale à 0,3117), et selon le critère de HUYNH et FELDT [1970], de 59 % (valeur  $\varepsilon$  de HUYNH et FELDT égale à 0,4108).

En ce qui concerne le facteur dates, les deux corrections (ajustement de la valeur  $F$  et réduction des nombres de degrés de liberté) ne modifient pas la quasi-nullité de la probabilité, et aucune analyse n'était d'ailleurs nécessaire pour se rendre compte du fait qu'il existe de réelles différences entre dates.

Quant à l'interaction alimentations-dates, la réduction des nombres de degrés de liberté conduit à une réduction de la probabilité, qui passe de 0,62 à 0,52 ou 0,54, selon l'option choisie (GREENHOUSE-GEISSER ou HUYNH-FELDT). En tout état de cause, l'interaction est non significative. Cette absence d'interaction doit être interprétée comme un parallélisme de la croissance pour les différentes alimentations.

Les deux parties du tableau 11.5.3 conduisent donc à la conclusion que les courbes de croissance relatives aux quatre alimentations ne diffèrent ni par leurs positions (égalité des moyennes), ni par leurs directions (parallélisme).



## 11.6 Exemple 4 : comparaison de successions de cultures

### ⊖ 11.6.1 Présentation

#### 1° Présentation générale

En matière de successions de cultures, nous présentons brièvement à titre d'exemples deux expériences relativement simples, qui font partie d'un ensemble sensiblement plus vaste [RIXHON, 1972]. Ces expériences ont principalement pour but de préciser la place que peuvent prendre les céréales dans diverses rotations qui commencent toutes par une culture de betterave sucrière.

Les photographies 15 et 16 [DAGNELIE, 2009] donnent des illustrations de ces expériences.

La première expérience envisagée est destinée à comparer diverses rotations triennales, auxquelles est associé dans certains cas un traitement fongicide. Le tableau 11.6.1 présente la liste des objets pris en considération.

**Tableau 11.6.1.** Comparaison de rotations triennales : définition des objets (B = betterave sucrière ; F = froment d'hiver ; f = froment de printemps ; Ft = froment d'hiver avec traitement fongicide ; Fm = froment d'hiver et moutarde, en culture dérobée).

| Années | Objets |    |    |    |   |    |
|--------|--------|----|----|----|---|----|
|        | 1      | 2  | 3  | 4  | 5 | 6  |
| 1972   | B      | B  | B  | B  | B | B  |
| 1973   | F      | Ft | F  | Fm | F | Fm |
| 1974   | F      | F  | Ft | F  | f | f  |
| 1975   | B      | B  | B  | B  | B | B  |
| 1976   | F      | Ft | F  | Fm | F | Fm |
| 1977   | F      | F  | Ft | F  | f | f  |
| 1978   | B      | B  | B  | B  | B | B  |
| 1979   | F      | Ft | F  | Fm | F | Fm |
| 1980   | F      | F  | Ft | F  | f | f  |
| ⋮      | ⋮      | ⋮  | ⋮  | ⋮  | ⋮ | ⋮  |

La rotation de base (objet 1) est la succession betterave sucrière – froment d'hiver – froment d'hiver. Par comparaison avec cette rotation, les objets 2 et 3 permettent d'étudier l'influence du traitement fongicide, en tenant compte de l'année au cours de laquelle il est appliqué (deuxième ou troisième année de la rotation).

D'autre part, la rotation de base et les objets 4, 5 et 6 constituent un ensemble factoriel  $2^2$ , qui fait intervenir les facteurs absence ou présence de moutarde au cours de la deuxième année et froment d'hiver ou froment de printemps au cours de la troisième année de la rotation.

La deuxième expérience est, elle, destinée à comparer des rotations biennales et quadriennales, dans lesquelles s'intègrent diverses cultures. Les objets sont présentés dans le tableau 11.6.2.

**Tableau 11.6.2.** Comparaison de rotations biennales et quadriennales :  
définition des objets (B = betterave sucrière; F = froment d'hiver;  
Ft = froment d'hiver avec traitement fongicide; A = avoine;  
Ev = escourgeon et vesce, en culture dérobée).

| Années | Objets |    |   |    |
|--------|--------|----|---|----|
|        | 1      | 2  | 3 | 4  |
| 1972   | B      | B  | B | B  |
| 1973   | F      | F  | F | F  |
| 1974   | B      | B  | A | Ev |
| 1975   | F      | Ft | F | F  |
| 1976   | B      | B  | B | B  |
| 1977   | F      | F  | F | F  |
| 1978   | B      | B  | A | Ev |
| 1979   | F      | Ft | F | F  |
| 1980   | B      | B  | B | B  |
| ⋮      | ⋮      | ⋮  | ⋮ | ⋮  |

Les deux rotations biennales (objets 1 et 2) sont du type betterave sucrière – froment d'hiver, sans ou avec traitement fongicide au cours d'une rotation sur deux. Quant aux rotations quadriennales (objets 3 et 4), il s'agit de betterave sucrière – froment d'hiver – avoine ou escourgeon et vesce – froment d'hiver.

Dans les deux expériences, les parcelles ont une surface totale de  $450 \text{ m}^2$  (15 m de largeur sur 30 m de longueur), avec une bordure importante, rendue nécessaire à la fois par le mélange des cultures disposées côte à côte, et par la durée des expériences.

Les observations concernent essentiellement le rendement et l'état sanitaire des différentes cultures.

Enfin, les deux expériences considérées sont organisées en quatre répétitions, disposées en blocs aléatoires complets dans le premier cas, et en carré latin dans le deuxième cas.

## 2° Commentaires

Un inconvénient des plans d'expériences qui viennent d'être esquissés est que toutes les cultures ne sont pas présentes chaque année, les différences entre années ne pouvant donc pas être entièrement mises en évidence. Cet inconvénient n'est toutefois pas particulièrement important dans les exemples considérés ici, en raison à la fois de la brièveté des rotations (deux, trois ou quatre ans) et du nombre relativement limité de cultures étudiées.

On aurait pu éviter ce problème, pour autant que le nombre de répétitions soit égal à la durée des rotations ou en soit un multiple, en décalant dans le temps l'application des différentes rotations aux différentes répétitions.

Le tableau 11.6.3 indique par exemple ce que serait dans ces conditions la première expérience (tableau 11.6.1), en supposant qu'elle s'étende sur trois répétitions seulement, une même culture devant précéder l'expérience en 1971 dans la première répétition, en 1972 dans la deuxième répétition, et en 1973 dans la troisième répétition. Ce principe pourrait bien sûr être appliqué aussi au cas de six répétitions, les différentes rotations démarrant alors dans deux répétitions au cours de chacune des trois premières années.

**Tableau 11.6.3.** Comparaison de rotations triennales : définition des objets, avec décalage dans le temps (B = betterave sucrière; F = froment d'hiver; f = froment de printemps; Ft = froment d'hiver avec traitement fongicide; Fm = froment d'hiver et moutarde, en culture dérobée).

| Années | Répétition 1 |    |    |    |   |    | Répétition 2 |    |    |    |   |    | Répétition 3 |    |    |    |   |    |
|--------|--------------|----|----|----|---|----|--------------|----|----|----|---|----|--------------|----|----|----|---|----|
|        | 1            | 2  | 3  | 4  | 5 | 6  | 1            | 2  | 3  | 4  | 5 | 6  | 1            | 2  | 3  | 4  | 5 | 6  |
| 1972   | B            | B  | B  | B  | B | B  | -            | -  | -  | -  | - | -  | -            | -  | -  | -  | - | -  |
| 1973   | F            | Ft | F  | Fm | F | Fm | B            | B  | B  | B  | B | B  | -            | -  | -  | -  | - | -  |
| 1974   | F            | F  | Ft | F  | f | f  | F            | Ft | F  | Fm | F | Fm | B            | B  | B  | B  | B | B  |
| 1975   | B            | B  | B  | B  | B | B  | F            | F  | Ft | F  | f | f  | F            | Ft | F  | Fm | F | Fm |
| 1976   | F            | Ft | F  | Fm | F | Fm | B            | B  | B  | B  | B | B  | F            | F  | Ft | F  | f | f  |
| 1977   | F            | F  | Ft | F  | f | f  | F            | Ft | F  | Fm | F | Fm | B            | B  | B  | B  | B | B  |
| 1978   | B            | B  | B  | B  | B | B  | F            | F  | Ft | F  | f | f  | F            | Ft | F  | Fm | F | Fm |
| 1979   | F            | Ft | F  | Fm | F | Fm | B            | B  | B  | B  | B | B  | F            | F  | Ft | F  | f | f  |
| 1980   | F            | F  | Ft | F  | f | f  | F            | Ft | F  | Fm | F | Fm | B            | B  | B  | B  | B | B  |
| ⋮      | ⋮            | ⋮  | ⋮  | ⋮  | ⋮ | ⋮  | ⋮            | ⋮  | ⋮  | ⋮  | ⋮ | ⋮  | ⋮            | ⋮  | ⋮  | ⋮  | ⋮ | ⋮  |

Il faut noter cependant que, dans une telle optique, deux années supplémentaires seraient nécessaires pour pouvoir disposer d'un même nombre de rotations dans chacune des répétitions (pour trois rotations par exemple, 1972-1980 dans la première répétition, 1973-1981 dans la deuxième répétition, et 1974-1982 dans la troisième répétition).

## ⊖ 11.6.2 Analyse des résultats

### 1° Analyses individuelles

En ce qui concerne l'analyse des résultats, destinée à comparer les différentes rotations, nous nous contentons de formuler quelques idées générales au sujet de diverses approches possibles, sans traiter aucune valeur numérique.

Une première approche consiste à effectuer des analyses individuelles, année par année, chaque fois que des cultures identiques ou comparables se trouvent en présence. Pour la première expérience (tableau 11.6.1), il s'agirait des années 1975, 1976, 1977 (uniquement pour les objets 1 à 4 en ce qui concerne cette dernière année), etc., et pour la deuxième expérience (tableau 11.6.2), des années 1976, 1977, 1979, etc.

Dans le cas de l'expérience avec décalage dans le temps (tableau 11.6.3), les analyses « individuelles » en question devraient en fait porter chaque fois sur les rendements de trois années. Pour la betterave sucrière par exemple, il faudrait prendre en considération simultanément les rendements observés en 1975 dans la première répétition, les rendements observés en 1976 dans la deuxième répétition, et les rendements observés en 1977 dans la troisième répétition. Dans une telle analyse, le facteur « Répétitions » ou « Blocs » regrouperait alors les différences proprement dites entre répétitions et les différences entre années.

### 2° Analyses globales

Globalement, à la fin de chaque rotation, on peut envisager de réaliser des analyses qui intégreraient l'ensemble des cultures, par exemple à l'aide d'une fonction économique. Il pourrait s'agir notamment du revenu net total par hectare, qui serait calculé parcelle par parcelle pour l'ensemble des deux, trois ou quatre années de la rotation. Dans le cas de la première expérience (tableau 11.6.1), de tels calculs pourraient être réalisés pour les années 1975, 1976 et 1977, puis 1978, 1979 et 1980, etc. (voire même pour tout autre groupe de trois années consécutives).

Globalement aussi, après un certain nombre d'années, l'ensemble des résultats qui concernent une même culture peuvent être traités comme s'il s'agissait d'observations successives relatives à une culture pérenne (observations répétées dans le temps : § 11.2.2). Tel pourrait être le cas, en ce qui concerne la première expérience, pour les résultats obtenus en betterave sucrière en 1972, 1975, 1978, etc.

Il serait possible également d'étudier simultanément les observations relatives à deux ou plusieurs cultures à l'aide d'une transformation logarithmique, qui permettrait d'exprimer toutes les évolutions de rendement en valeur relative, indépendamment des ordres de grandeur des rendements des différentes cultures.

Enfin, il pourrait être utile d'envisager dans certains cas le recours à l'analyse de la variance à plusieurs variables (§ 12.4.5).

# Chapitre 12

## Notions complémentaires

### Sommaire

- 12.1 Introduction**
- ⊖ **12.2 Les cultures mélangées**
- 12.3 Quelques questions liées au voisinage des parcelles**
  - ⊖ 12.3.1 Les dispositifs expérimentaux équilibrés pour les parcelles voisines
  - ⊖ 12.3.2 Les dispositifs expérimentaux avec témoins systématiques
  - ⊖ 12.3.3 L'analyse des résultats avec ajustement en fonction des parcelles voisines
- 12.4 L'analyse de la variance et ses généralisations**
  - 12.4.1 L'analyse de la variance orthogonale et non orthogonale
  - 12.4.2 L'analyse de la covariance
  - ⊖ 12.4.3 Le modèle linéaire général
  - ⊖ 12.4.4 Le modèle linéaire mixte et le modèle linéaire généralisé
  - ⊖ 12.4.5 L'analyse de la variance à plusieurs dimensions
- 12.5 Les données manquantes**
- 12.6 L'étude des résidus de l'analyse de la variance**
- 12.7 L'analyse de deux ou plusieurs variables**
- ⊖ **12.8 Les méthodes bayésiennes**
- ⊖ **12.9 La simulation de résultats d'expériences**

## 12.1 Introduction

Au cours de ce dernier chapitre, nous abordons diverses notions complémentaires, le plus souvent de façon relativement concise et parfois essentiellement sous la forme de quelques références bibliographiques.

Certains des sujets traités sont largement à caractère agronomique et concernent à la fois la planification des expériences et l'analyse de leurs résultats. Tel est le cas pour l'étude des cultures mélangées (§ 12.2) et diverses questions liées au voisinage des parcelles d'expérience (§ 12.3).

D'autres sujets ont une portée beaucoup plus générale et sont relatifs plus spécifiquement à l'analyse des résultats. Il en est ainsi pour un ensemble de notions complémentaires relatives à l'analyse de la variance et de la covariance (§ 12.4), l'étude des données manquantes (§ 12.5), l'étude des résidus de l'analyse de la variance (§ 12.6), l'analyse de deux ou plusieurs variables (§ 12.7), et les méthodes bayésiennes (§ 12.8).

Enfin, nous considérons aussi brièvement les diverses possibilités qu'offre la simulation de résultats d'expériences (§ 12.9).

## ⊖ 12.2 Les cultures mélangées

### 1° Différentes situations

Nous regroupons sous la dénomination de *cultures mélangées* ou *en mélanges*<sup>1</sup> les différentes situations dans lesquelles deux ou plusieurs espèces ou variétés cultivées sont présentes en même temps sur les mêmes parcelles. Ces situations sont particulièrement fréquentes dans les pays tropicaux.

Il peut s'agir tout d'abord de mélanges intimes de deux ou plusieurs espèces ou variétés, qui sont cultivées de façon tout à fait simultanée et qui sont récoltées globalement. Tel est notamment le cas dans l'exemple du paragraphe 7.5 (différents mélanges d'avoine et de vesce).

Mais il peut s'agir aussi de mélanges de deux ou plusieurs espèces cultivées simultanément ou quasi simultanément (les durées des périodes de culture pouvant être différentes), mais récoltées séparément (mélanges de maïs et de haricot par exemple). Une distinction peut en outre être faite entre le cas où les mélanges de cultures ne présentent pas de structure particulière ou, au contraire, présentent une structure particulière, telle qu'une alternance de lignes ou de bandes entièrement consacrées à l'une ou l'autre composante du ou des mélanges.

De tels mélanges peuvent également faire intervenir à la fois des espèces pérennes et annuelles (bananier et manioc par exemple). Quand la ou les espèces pérennes sont des essences forestières, on parle aussi d'*agroforesterie*<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> En anglais : *mixed crops, intercropping*.

<sup>2</sup> En anglais : *agroforestry*.

Enfin, le dernier cas que nous souhaitons évoquer est celui dans lequel une première culture est mise en place de façon isolée, une deuxième culture étant ensuite introduite dans les mêmes parcelles avant que la première ne soit récoltée, en engendrant donc, non pas une simultanéité, mais un chevauchement des deux cultures dans le temps.

## 2° Différents problèmes

Les problèmes d'expérimentation relatifs aux cultures mélangées sont bien sûr très nombreux et très diversifiés, et nous nous contentons d'en signaler quelques-uns.

En ce qui concerne la planification des expériences, les remarques générales que nous avons formulées au sujet des expériences de longue durée (§ 11.2.1.2°) restent, le cas échéant, d'application. Plus particulièrement aussi, les questions de proportions relatives des différentes composantes d'un mélange de cultures s'apparentent aux problèmes de mélanges que nous avons abordés au paragraphe 2.4.2, tandis que la définition de structures, en lignes par exemple, et d'écartements entre et dans les lignes peut conduire à des dispositifs systématiques qui généralisent ceux que nous avons présentés au paragraphe 3.3.3°.

Quant à l'analyse des résultats, les principes relatifs au cas des mesures répétées sur les mêmes unités expérimentales (§ 11.2.2) s'appliquent très largement aux cultures mélangées.

Un élément particulier qui mérite d'être mis en évidence est la notion de *rendement relatif total*<sup>3</sup>, qui permet de synthétiser les observations qui auraient éventuellement été faites séparément pour les différentes cultures. Dans le cas d'un mélange de deux espèces A et B, ce paramètre peut être défini comme étant :

$$y = x_{A|B}/x_A + x_{B|A}/x_B,$$

$x_{A|B}$  étant le rendement de l'espèce A quand elle est associée à B,  $x_A$  le rendement de l'espèce A en monoculture, et de la même manière,  $x_{B|A}$  le rendement de l'espèce B associée à l'espèce A, et  $x_B$  le rendement de l'espèce B en monoculture. Exprimé éventuellement comme un pourcentage, ce paramètre indique d'une façon globale le gain (ou la perte) de production qui peut résulter de la culture mélangée, par rapport aux monocultures.

On peut trouver des informations complémentaires dans certains livres généraux, tel que celui de PETERSEN [1994], dans les livres spécialisés de FEDERER [1993, 1999], dans certains articles généraux, dont ceux de FINNEY [1990] et MEAD et RILEY [1981], et dans divers articles plus particuliers, tels que ceux de DUPRAZ [1999], et JOLLIFFE et WANJAU [1999].

---

<sup>3</sup> En anglais : *relative total yield, land equivalent ratio, LER*.

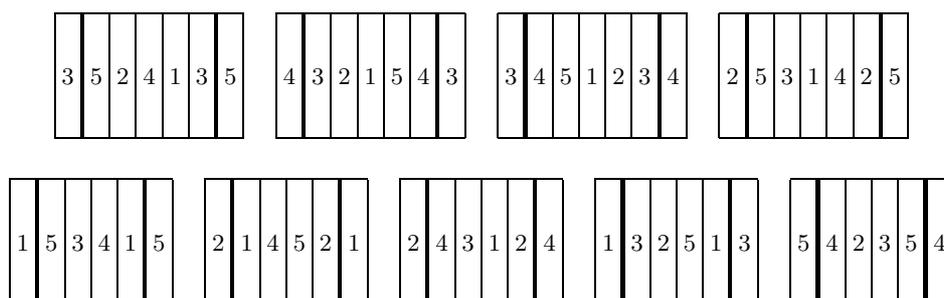
## 12.3 Quelques questions relatives au voisinage des parcelles

### ⊖ 12.3.1 Les dispositifs expérimentaux équilibrés pour les parcelles voisines

#### 1° Principes

En parlant de parcelles d'expériences, et en particulier de la notion de bordure, nous avons fait allusion aux interférences qui peuvent exister entre parcelles voisines, par compétition ou contagion notamment (§ 3.2.2.1°). Certains dispositifs expérimentaux spéciaux ont pour but d'étudier ou d'éliminer autant que possible ces interférences.

Parmi ces dispositifs, figurent les plans *équilibrés pour les parcelles voisines*<sup>4</sup>. Leur principe est de prévoir que chacun des objets ait comme voisins un même nombre de fois chacun des autres objets. La figure 12.3.1 en donne deux exemples, relatifs au cas de cinq objets.



**Figure 12.3.1.** Exemples de dispositifs équilibrés pour les parcelles voisines.

La partie supérieure de cette figure présente quatre blocs complets de cinq parcelles, entourés chacun de deux parcelles supplémentaires, qui doivent être cultivées comme les autres parcelles, mais qui ne donnent pas lieu à des observations à soumettre à l'analyse des résultats. On peut vérifier que, pour les 20 parcelles qui constituent les quatre blocs proprement dits, chacun des cinq objets a chacun des quatre autres objets comme voisin une et une seule fois à sa gauche et une et une seule fois à sa droite.

La partie inférieure de la même figure est, elle, constituée de cinq blocs de quatre parcelles, qui sont des blocs incomplets équilibrés présentant les mêmes

<sup>4</sup> En anglais : *neighbour-balanced design*.

propriétés de voisinage. Au point de vue des blocs incomplets (§ 9.1.2.1°), les paramètres de ce dispositif sont :

$$p = 5, \quad k = 4, \quad b = 5, \quad r = 4 \quad \text{et} \quad \lambda = 3.$$

### 2° Informations complémentaires

Ces dispositifs possèdent évidemment des propriétés particulières, sur lesquelles nous ne nous étendons pas. Il faut noter, entre autres choses, que leur randomisation ne doit pas être réalisée selon les procédures classiques relatives aux blocs aléatoires complets ou incomplets.

De plus, ces dispositifs présentent certaines analogies avec les dispositifs équilibrés pour les effets résiduels, dont nous avons parlé en ce qui concerne le carré latin et les expériences avec permutation des objets (§ 8.2.3.1° et 8.4.3°).

Des informations plus détaillées peuvent être trouvées notamment dans les travaux d'AHMED et AKHTAR [2011], CHAN et ECCLESTON [2003], JAGGI *et al.* [2007], et KUNERT [2000].

## ⊖ 12.3.2 Les dispositifs expérimentaux avec témoins systématiques

### 1° Principes

Dans certaines expériences en champ, on peut être tenté d'introduire des *parcelles témoins réparties de façon systématique*<sup>5</sup>, dans l'espoir notamment de pouvoir mieux maîtriser ainsi une éventuelle hétérogénéité importante du milieu. La figure 12.3.2 en donne une illustration, dans le cas d'une expérience en blocs aléatoires complets.

Cette figure reprend en fait le schéma de la plantation de théiers dont il a été question aux paragraphes 3.6 et 6.4, une ligne de parcelles sur six étant consacrée à un témoin, ce qui permet d'insérer chaque fois l'ensemble des cinq objets qui sont envisagés entre deux parcelles témoins, en constituant au total neuf blocs.

Par comparaison avec la figure 3.6.1, les parcelles considérées ici sont constituées chacune de quatre petites parcelles initiales, une ligne de petites parcelles ayant été négligée (utilisation de 19 des 20 lignes de parcelles de la figure 3.6.1 seulement). En outre, par comparaison avec le cas n° 3 de la figure 6.4.1, on peut constater que l'introduction de parcelles témoins disposées de façon systématique entre les blocs conduit à une réduction d'un quart du nombre de blocs (9 blocs au lieu de 12).

Il est évident que des témoins pourraient également être placés de manière systématique à l'intérieur des blocs, et cela surtout pour des nombres d'objets plus élevés.

<sup>5</sup> En anglais : *systematic check plots*.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 5 | 4 | 4 |
| 3 | 2 | 5 |
| 1 | 5 | 1 |
| 2 | 3 | 2 |
| 4 | 1 | 3 |
| 0 | 0 | 0 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 5 | 2 |
| 1 | 1 | 5 |
| 4 | 2 | 3 |
| 5 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 2 |
| 4 | 2 | 4 |
| 1 | 4 | 3 |
| 3 | 5 | 5 |
| 0 | 0 | 0 |

**Figure 12.3.2.** Exemple d'expérience en blocs aléatoires complets avec témoins systématiques.

D'autre part, l'introduction de témoins systématiques peut être envisagée dans le temps, et non dans l'espace, pour des expériences qui seraient organisées en séquence. Chaque colonne de la figure 12.3.2 peut en effet être considérée aussi comme représentant un ensemble de 19 manipulations ou 19 essais, qui seraient réalisés à la suite les uns des autres, et qui comporteraient à la fois quatre témoins répartis de façon systématique et trois répétitions aléatoires de cinq objets.

### 2° Analyse des résultats

L'analyse des résultats d'une expérience avec témoins systématiques peut se faire en considérant, pour chaque parcelle, les écarts par rapport à la parcelle témoin la plus proche ou par rapport à une moyenne, éventuellement pondérée, des parcelles témoins les plus proches, les coefficients de pondération étant inversement proportionnels aux distances. Ainsi, en désignant par  $x_{01}$  et  $x_{02}$  les valeurs observées relatives aux deux parcelles témoins qui encadrent le premier bloc de la figure 12.3.2, on peut remplacer les valeurs observées  $x_5$ ,  $x_3$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_4$ , relatives aux

cinq parcelles de ce bloc, par :

$$x'_5 = x_5 - (5x_{01} + x_{02})/6, \quad x'_3 = x_3 - (4x_{01} + 2x_{02})/6,$$

$$x'_1 = x_1 - (3x_{01} + 3x_{02})/6, \quad x'_2 = x_2 - (2x_{01} + 4x_{02})/6$$

et

$$x'_4 = x_4 - (x_{01} + 5x_{02})/6.$$

Une autre solution consisterait à ajuster les valeurs observées en fonction des écarts existant entre les moyennes pondérées des parcelles témoins les plus proches et la moyenne générale  $\bar{x}_0$  de l'ensemble des témoins. Pour le même bloc, on obtiendrait ainsi les valeurs :

$$x''_5 = x_5 - [(5x_{01} + x_{02})/6 - \bar{x}_0], \quad x''_3 = x_3 - [(4x_{01} + 2x_{02})/6 - \bar{x}_0],$$

$$x''_1 = x_1 - [(3x_{01} + 3x_{02})/6 - \bar{x}_0], \quad x''_2 = x_2 - [(2x_{01} + 4x_{02})/6 - \bar{x}_0]$$

et

$$x''_4 = x_4 - [(x_{01} + 5x_{02})/6 - \bar{x}_0].$$

Dans un cas comme dans l'autre, on soumettrait ensuite à l'analyse de la variance les valeurs  $x'$  ou  $x''$ . La deuxième solution a l'avantage de conduire à l'obtention de réelles valeurs ajustées (rendements ajustés par exemple), et non pas à l'obtention d'écarts, tantôt positifs, tantôt négatifs, par rapport aux témoins.

Enfin, une troisième solution pourrait consister en une analyse de la covariance (§ 12.4.2), dont la variable principale serait constituée des rendements observés des différentes parcelles, et dont la variable auxiliaire serait les moyennes, éventuellement pondérées, des témoins les plus proches.

### 3° Discussion

L'inclusion systématique de parcelles témoins dont on tient compte lors de l'analyse des résultats permet souvent de réduire de façon sensible la variance résiduelle de l'expérience.

Au moment de la planification, il ne faut cependant pas perdre de vue que cet avantage ne peut être acquis qu'au prix d'une augmentation de l'étendue totale de l'expérience ou, si cette étendue est limitée, au prix d'une réduction du nombre de répétitions. De plus, l'inclusion de parcelles témoins à l'intérieur des blocs en augmenterait inévitablement l'étendue et, corrélativement, pourrait provoquer une certaine augmentation de la variabilité résiduelle.

Ces deux inconvénients peuvent évidemment compenser, en tout ou en partie, l'avantage qui a été cité en premier lieu.

D'autre part, les ajustements qui sont faits pour plusieurs parcelles à partir des mêmes témoins ont pour conséquence d'induire une certaine dépendance entre les résidus relatifs aux différentes parcelles concernées. On s'éloigne ainsi des conditions de réalisation de l'analyse de la variance, et éventuellement de la covariance.

L'utilisation de témoins systématiques intervient assez fréquemment dans les expériences destinées à comparer un grand nombre de variétés ou de provenances pour lesquelles on ne dispose que d'un nombre très réduit de graines ou de plants. Il peut s'agir alors, éventuellement, d'une ligne ou d'une petite parcelle seulement pour chacune des variétés ou provenances, à comparer avec peut-être une ligne sur trois ou une ligne sur quatre consacrée au témoin. On se souviendra, le cas échéant, du fait que le recours à des dispositifs en blocs incomplets peut aussi être envisagé dans de telles circonstances (§ 9.1.2.5°).

Enfin, d'autres méthodes, plus élaborées et qui s'apparentent à celles dont il est question au paragraphe 12.3.3.3°, permettent également de traiter ce problème particulier [CULLIS *et al.*, 1989; MARTIN *et al.*, 2006].

### ⊖ 12.3.3 L'analyse des résultats avec ajustement en fonction des parcelles voisines

#### 1° Méthodes des plus proches voisins

Toujours dans l'optique de réduire la variabilité résiduelle, et donc de gagner en précision ou en puissance, diverses méthodes d'analyse des résultats d'expériences en champ ont été suggérées en vue d'ajuster les valeurs observées pour chacune des parcelles en fonction des valeurs observées pour les parcelles voisines, et cela quels que soient les objets qui sont affectés à ces parcelles. Ces méthodes sont souvent qualifiées de méthodes des *plus proches voisins*<sup>6</sup>.

La *méthode de PAPADAKIS*<sup>7</sup>, par exemple, consiste à ajuster les valeurs observées pour chacune des parcelles en fonction des moyennes des résidus des parcelles immédiatement voisines. Les parcelles contiguës se servent ainsi mutuellement de « pseudo-témoins ».

#### 2° Méthode de PAPADAKIS

En vue de préciser le principe de la méthode de PAPADAKIS, nous considérons à titre d'illustration la première partie de la figure 5.1.1, qui concerne cinq objets répétés quatre fois de manière complètement aléatoire. La figure 12.3.3 reproduit le contenu de la figure 5.1.1, en donnant aux parcelles une forme carrée.

Pour la première parcelle (parcelle de coin), la valeur qui doit servir à réaliser l'ajustement est :

$$d_{(1)} = [(x_{(2)} - \bar{x}_5) + (x_{(5)} - \bar{x}_3)]/2,$$

les indices qui figurent entre parenthèses étant relatifs aux numéros des parcelles, tandis que les indices qui figurent sans parenthèses sont relatifs aux objets<sup>8</sup>. La

<sup>6</sup> En anglais : *nearest neighbour*.

<sup>7</sup> En anglais : *PAPADAKIS's method*.

<sup>8</sup> La formulation générale du problème nécessiterait l'emploi d'indices supplémentaires, ce que nous évitons en ne considérant que quelques parcelles à titre d'exemples.

|                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 4 <sub>1</sub>  | 5 <sub>2</sub>  | 4 <sub>3</sub>  | 4 <sub>4</sub>  |
| 3 <sub>5</sub>  | 2 <sub>6</sub>  | 2 <sub>7</sub>  | 4 <sub>8</sub>  |
| 1 <sub>9</sub>  | 5 <sub>10</sub> | 5 <sub>11</sub> | 3 <sub>12</sub> |
| 1 <sub>13</sub> | 2 <sub>14</sub> | 2 <sub>15</sub> | 3 <sub>16</sub> |
| 3 <sub>17</sub> | 1 <sub>18</sub> | 5 <sub>19</sub> | 1 <sub>20</sub> |

**Figure 12.3.3.** Illustration de la méthode de PAPADAKIS.

valeur  $d_{(1)}$  est ainsi la moyenne des résidus relatifs aux parcelles 2 et 5, voisines de la parcelle 1, dans l'analyse de la variance à un critère de classification qui serait appliquée aux résultats de l'expérience.

De même, en ce qui concerne la parcelle 5 (parcelle située en bordure du champ d'expérience), on a, avec trois parcelles voisines :

$$d_{(5)} = [(x_{(1)} - \bar{x}_4) + (x_{(6)} - \bar{x}_2) + (x_{(9)} - \bar{x}_1)]/3.$$

Et enfin, pour une parcelle « centrale », telle que la parcelle 6, on obtient, avec quatre parcelles voisines :

$$d_{(6)} = [(x_{(2)} - \bar{x}_5) + (x_{(7)} - \bar{x}_2) + (x_{(10)} - \bar{x}_5) + (x_{(5)} - \bar{x}_3)]/4.$$

Le principe de la méthode de PAPADAKIS est alors d'effectuer, sur les données initiales, une analyse de la covariance dont les écarts  $d_{(i)}$  constituent la covariable (§ 12.4.2). On pourrait aussi, d'une manière plus simple, effectuer une analyse de la variance sur les différences entre les valeurs initiales et les écarts  $d_{(i)}$ .

Pour des parcelles non pas carrées ou presque carrées, mais très allongées, les ajustements peuvent éventuellement être réalisés en ne tenant compte que des parcelles voisines situées le long des grands côtés. Dans le cas de la figure 5.1.1 (parcelles allongées horizontalement), les écarts définis ci-dessus pourraient ainsi être remplacés par les valeurs suivantes :

$$d_{(1)} = x_{(5)} - \bar{x}_3, \quad d_{(5)} = [(x_{(1)} - \bar{x}_4) + (x_{(9)} - \bar{x}_1)]/2$$

et 
$$d_{(6)} = [(x_{(2)} - \bar{x}_5) + (x_{(10)} - \bar{x}_5)]/2.$$

D'autre part, la procédure d'ajustement peut être appliquée aussi de façon itérative, une première itération étant réalisée comme ci-dessus en fonction des valeurs observées, une deuxième itération étant réalisée ensuite de la même manière à partir des valeurs ajustées une première fois, etc.

Enfin, cette procédure peut être modifiée de différentes façons, entre autres en vue de tenir compte, le cas échéant, de l'existence d'un facteur blocs ou de facteurs lignes et colonnes.

### 3° Discussion et autres méthodes

La méthode de PAPADAKIS, qui est caractérisée par une abondante littérature [DAGNELIE, 1987, 1989; GILL, 1991], n'est pas à l'abri de tout reproche sur le plan théorique, et a été l'objet de diverses adaptations [BARTLETT, 1978; PEARCE, 1998; TAYE et NJUHO, 2007; WILKINSON *et al.*, 1983].

Comme l'utilisation de témoins systématiques (§ 12.3.2), cette méthode induit des relations de dépendance entre les résidus. Elle semble cependant pouvoir être intéressante face à une importante hétérogénéité irrégulière, sans gradient systématique bien marqué dans l'une ou l'autre direction, quand le nombre d'objets est relativement élevé, et pour autant qu'on dispose de trois répétitions au moins.

Diverses autres méthodes d'analyse, qui s'inscrivent dans la même ligne, ont été proposées. Ces méthodes font intervenir notamment d'autres procédures d'ajustement en fonction des plus proches voisins, divers modèles *autorégressifs*<sup>9</sup>, semblables à ceux qui sont utilisés dans le domaine des séries chronologiques [STAT2, § 15.6.3], et les notions de champ aléatoire et de géostatistique, auxquelles nous avons déjà fait allusion antérieurement (§ 3.5.3.2°). Des informations peuvent être trouvées à ce sujet dans les travaux d'AZAÏS *et al.* [1990], PIEPHO *et al.* [2008], WU et DUTILLEUL [1999], et YANG *et al.* [2004].

## 12.4 L'analyse de la variance et ses généralisations

### 12.4.1 L'analyse de la variance orthogonale et non orthogonale

#### 1° Généralités

Dans les différents exemples que nous avons considérés jusque ici, nous nous sommes volontairement limité, autant que possible, à des analyses de la variance à effectifs égaux. En particulier, en présence de données aberrantes ou manquantes, nous avons privilégié l'option de revenir à des effectifs qui peuvent être qualifiés d'« artificiellement égaux », en procédant à des estimations élémentaires des données éliminées ou manquantes. Tel a été le cas en ramenant artificiellement les effectifs à 3 au lieu de 2 au paragraphe 5.4.2.2°, et à 1 au lieu de 0 au paragraphe 6.5.2.2°, chaque fois pour une cellule seulement du tableau de données.

---

<sup>9</sup> En anglais : *autoregressive*.

Nous avons néanmoins dû envisager quelques cas plus complexes d'analyses de la variance non orthogonales, en ce qui concerne notamment l'étude des effets résiduels dans les carrés latins et les expériences avec permutation des objets (§ 8.2.3.1° et 8.6.2.5°), et l'analyse des résultats des expériences en blocs incomplets (§ 9.2.1.1°, 9.2.2.1°, 9.4.2.2° et 9.5.2.2°). Nous souhaitons donner ici quelques informations complémentaires à ce sujet, en n'abordant toutefois que le cas le plus simple de l'analyse de la variance à deux critères de classification.

## 2° Orthogonalité

D'une manière générale, deux critères de classification croisés sont dits orthogonaux quand la condition suivante est remplie pour tout  $i$  et tout  $j$  :

$$n_{ij} = n_{i.} n_{.j} / n_{..} ,$$

$n_{ij}$  désignant les effectifs relatifs aux différentes combinaisons des modalités des deux critères de classification envisagés,  $n_{i.}$  et  $n_{.j}$  les effectifs marginaux relatifs, séparément, aux différentes modalités de chacun des deux critères, et  $n_{..}$  l'effectif total.

Tel est évidemment le cas quand les effectifs  $n_{ij}$  sont tous égaux. Un exemple en est donné par le tableau 5.4.1 (carbonisation du bois de hêtre), pour lequel on a :

$$n_{ij} = 3, \quad n_{i.} = 12, \quad n_{.j} = 9 \quad \text{et} \quad n_{..} = 36 .$$

[ La condition d'orthogonalité est également satisfaite quand les effectifs  $n_{ij}$  varient en fonction d'un des deux critères de classification seulement, c'est-à-dire en fonction de  $i$  ou de  $j$ . Les effectifs marginaux sont alors variables eux aussi, mais pour un seul des deux critères de classification<sup>10</sup>.

On peut illustrer cette dernière situation en éliminant par exemple la première ligne du tableau 5.4.1. Les effectifs sont alors :

$$n_{ij} = 2 \text{ ou } 3, \quad n_{i.} = 8 \text{ ou } 12, \quad n_{.j} = 8 \quad \text{et} \quad n_{..} = 32 ,$$

et on peut vérifier que la condition donnée ci-dessus est satisfaite pour tous les couples  $(i, j)$ .

Dans certains cas plus particuliers encore, l'orthogonalité peut être assurée quand les effectifs  $n_{ij}$  varient en fonction des deux critères de classification, les effectifs marginaux  $n_{i.}$  et  $n_{.j}$  étant inégaux pour les deux critères [CLAUSTRIAUX et IEMMA, 1999].

On peut remarquer en outre que la définition de l'orthogonalité que nous introduisons ici se confond avec celle que nous avons mentionnée au paragraphe

<sup>10</sup> On utilise parfois les termes *équilibrés* ou *équirépétés* (en anglais : *balanced*) et *déséquilibrés* (en anglais : *unbalanced*) pour établir la distinction entre les cas où les effectifs  $n_{ij}$  sont égaux et les cas où ces effectifs sont inégaux. Et on peut qualifier aussi de *proportionnels* (en anglais : *proportional*) les effectifs  $n_{ij}$  qui ne varient qu'en fonction d'un des deux critères de classification.

2.3.2.10°, à propos des notions de facteur et d'objet. Toujours dans le cas du tableau 5.4.1 par exemple, si on utilise un codage  $-1, 0$  et  $+1$  pour le premier facteur et  $-3, -1, +1$  et  $+3$  pour le deuxième facteur, la matrice de l'expérience est :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -3 \\ -1 & -3 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & +1 \\ -1 & +1 \\ -1 & +1 \\ -1 & +3 \\ -1 & +3 \\ -1 & +3 \\ 0 & -3 \\ 0 & -3 \\ 0 & -3 \\ \vdots & \vdots \\ +1 & +3 \\ +1 & +3 \\ +1 & +3 \end{bmatrix}.$$

Et cette matrice est bien orthogonale.

Il en est de même d'ailleurs quand on supprime dans cette matrice la première ligne  $(-1, -3)$ , la première ligne  $(-1, -1)$ , la première ligne  $(-1, +1)$  et la première ligne  $(-1, +3)$ , ce qui correspond à la suppression de la première ligne du tableau 5.4.1.

### 3° Analyse de la variance orthogonale

Dans le cas orthogonal correspondant à des effectifs égaux, l'analyse de la variance à deux critères de classification ne soulève pas de difficultés particulières, ni en matière de calcul, ni en matière d'interprétation. Les seuls points auxquels il y a lieu d'être attentif sont, d'une part, la distinction entre modèle fixe, modèle aléatoire et modèle mixte [STAT2, § 10.3.1 à 10.3.5], et d'autre part, la distinction entre effectifs supérieurs à un ( $n_{ij} > 1$ ) et effectifs égaux à un ( $n_{ij} = 1$ ) [STAT2, § 10.3.6].

De plus, le cas orthogonal à effectifs  $n_{ij}$  variant en fonction d'un des deux critères de classification seulement ( $n_{ij}$  dépendant de  $i$  ou de  $j$ ) n'est pas sensiblement plus compliqué.

#### 4° Analyse de la variance non orthogonale

Le problème est par contre plus complexe dans le cas non orthogonal, qui ouvre la porte à diverses options.

Quand tous les effectifs  $n_{ij}$  sont différents de zéro ( $n_{ij} \geq 1$ ), c'est-à-dire aussi en l'absence de cellules vides dans les données présentées sous la forme d'un tableau à double entrée, trois possibilités de comparaison des moyennes peuvent être envisagées. Il s'agit de la comparaison de moyennes pondérées, de moyennes ajustées (dites aussi pondérées et ajustées), et de moyennes non pondérées [STAT2, § 16.4.4].

Très brièvement, la comparaison de moyennes pondérées revient à étudier l'influence de chacun des deux facteurs en ignorant l'existence de l'autre facteur. La comparaison de moyennes ajustées (ou moyennes pondérées et ajustées) revient au contraire à étudier l'influence de chacun des deux facteurs en éliminant au préalable l'influence éventuelle de l'autre facteur. Et enfin, la comparaison de moyennes non pondérées fait intervenir, pour chacun des deux facteurs, des moyennes qui sont recalculées comme si les effectifs  $n_{ij}$  étaient tous égaux.

Une quatrième option intervient en outre en présence d'une ou plusieurs valeurs  $n_{ij}$  égales à zéro (une ou plusieurs cellules vides, dans un tableau à double entrée). Les quatre cas que nous venons de considérer sont souvent qualifiés d'analyses ou de comparaisons de type I, de type II, de type III et de type IV, les solutions les plus employées étant les types II et III.

Les différentes options conduisent en général à des résultats distincts, en ce qui concerne les sommes des carrés des écarts, les carrés moyens et les valeurs  $F$ , et peuvent conduire en conséquence à des conclusions différentes. Il importe donc d'effectuer dans chaque cas un choix judicieux et d'être extrêmement prudent dans l'utilisation des logiciels.

[ Des informations plus détaillées peuvent être trouvées dans de très nombreux ouvrages généraux ou spécialisés relatifs à l'analyse de la variance, dans certaines publications de synthèse, telles que celles d'AZAÏS [1994], et IEMMA et CLAUSTRIAUX [1999], et aussi dans les manuels relatifs aux principaux logiciels statistiques. ]

#### 5° Réalisation des calculs

D'une manière générale, les analyses de la variance peuvent être réalisées à l'aide des commandes ou procédures « *anova* » et « *glm* » pour les logiciels Minitab et SAS<sup>11</sup>, et à l'aide de la fonction « *aov* » pour le logiciel R. Mais différents compléments et différentes nuances importantes doivent retenir l'attention.

---

<sup>11</sup> Le sigle « *glm* » est lié au concept de modèle linéaire général (*general linear model*), dont il est question au paragraphe 12.4.3.

Ainsi, pour les deux premiers logiciels, les formes « *anova* » et « *glm* » peuvent être utilisées de façon quasi équivalente lorsqu'il s'agit de modèles orthogonaux d'analyse de la variance, alors que seul le code « *glm* » s'applique aux modèles non orthogonaux. En ce que concerne le logiciel R par contre, la fonction « *aov* » intervient indifféremment dans les cas orthogonaux et non orthogonaux.

D'autre part, comme nous l'avons déjà indiqué au paragraphe 7.4.2.6°, pour les logiciels R et SAS, il y a lieu d'être attentif à la distinction entre les notions de « facteur » et de « variable », en utilisant éventuellement les instructions « *factor* » pour R et « *class* » pour SAS.

D'une manière générale aussi, dans les cas non orthogonaux, l'ordre dans lequel les facteurs figurent dans le modèle est essentiel. Les paragraphes 9.4.2.4° et 9.5.2.4° en ont donné deux exemples.

Quant aux modalités de réalisation des tests, notamment pour les modèles mixtes d'analyse de la variance, des indications doivent éventuellement être fournies à l'aide des mentions « *random* » pour Minitab, « *Error* » pour R, et « *test* » pour SAS.

Enfin, la présentation des facteurs hiérarchisés les uns par rapport aux autres diffère d'un logiciel à l'autre, comme l'illustrent les paragraphes 9.5.2.4° et 10.4.2.4°.

### ⊖ 6° Exemple 1 : effectifs supérieurs (ou égaux) à un, sans cellules vides

Nous reprenons, comme premier exemple, les données du tableau 5.4.1 en éliminant la valeur 33,11, considérée comme anormale, et sans procéder à l'estimation de la donnée qui est alors manquante (§ 5.4.2.1°). On aboutit ainsi à un cas très légèrement non orthogonal (11 effectifs  $n_{ij}$  égaux à trois et un effectif  $n_{ij}$  égal à deux).

Le tableau 12.4.1 présente les résultats obtenus pour les trois types de comparaison de moyennes relatifs à une telle situation.

On peut remarquer tout d'abord que les habituelles lignes « Totaux » ont été supprimées dans ce tableau, car dans les trois cas, la somme des différentes sommes des carrés des écarts ne correspond pas à la somme des carrés des écarts totale, ce qui est une caractéristique très générale de l'analyse de la variance non orthogonale. D'autre part, il apparaît aussi que les résultats relatifs à la variation résiduelle et à l'interaction dimension-humidité sont identiques dans les trois cas. Enfin, les résultats relatifs aux deux facteurs considérés diffèrent quelque peu d'un cas à l'autre, mais sans que cela n'influence en aucune façon, dans la situation envisagée, les conclusions qui peuvent être déduites de l'analyse.

Des différences sensiblement plus importantes peuvent toutefois se présenter dans certaines applications, principalement quand les effectifs sont très différents les uns et les autres [STAT2, § 16.4.4].

**Tableau 12.4.1.** Étude de la carbonisation du bois de hêtre : résultats de l'analyse de la variance non orthogonale en l'absence d'effectifs nuls.

| Sources de variation  | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | F    | P     |
|---|-------------------|------------------------------|---------------|------|-------|
| Comparaison de moyennes pondérées (analyse de type I)       |                   |                              |               |      |       |
| Dimension   | 2                 | 1,3074                       | 0,6537        | 2,75 | 0,085 |
| Humidité  | 3                 | 0,4503                       | 0,1501        | 0,63 | 0,60  |
| Dimension-humidité  | 6                 | 0,1827                       | 0,0304        | 0,13 | 0,99  |
| Variation résiduelle  | 23                | 5,4675                       | 0,2377        |      |       |
| Comparaison de moyennes ajustées (analyse de type II)       |                   |                              |               |      |       |
| Dimension   | 2                 | 1,2819                       | 0,6409        | 2,70 | 0,089 |
| Humidité  | 3                 | 0,4247                       | 0,1416        | 0,60 | 0,62  |
| Dimension-humidité  | 6                 | 0,1827                       | 0,0304        | 0,13 | 0,99  |
| Variation résiduelle  | 23                | 5,4675                       | 0,2377        |      |       |
| Comparaison de moyennes non pondérées (analyse de type III) |                   |                              |               |      |       |
| Dimension   | 2                 | 1,2111                       | 0,6056        | 2,55 | 0,10  |
| Humidité  | 3                 | 0,4336                       | 0,1445        | 0,61 | 0,62  |
| Dimension-humidité  | 6                 | 0,1827                       | 0,0304        | 0,13 | 0,99  |
| Variation résiduelle  | 23                | 5,4675                       | 0,2377        |      |       |

En retournant au tableau 5.4.3, on peut constater en outre que l'analyse de la variance réalisée antérieurement, après estimation de la valeur qui a été éliminée, conduit à des résultats très proches de ceux de l'analyse non orthogonale, la composante résiduelle étant d'ailleurs strictement identique. Pour autant que de telles données soient peu nombreuses, l'estimation simple de données manquantes apparaît ainsi comme une alternative adéquate à l'utilisation de l'analyse de la variance non orthogonale.

⊖ **7° Exemple 2 : effectifs supérieurs (ou égaux) à un, avec cellule(s) vide(s)**

En vue d'illustrer le cas des cellules vides, avec au moins un effectif supérieur à un, nous reprenons les mêmes données, en éliminant non seulement la valeur 33,11, mais aussi toutes les valeurs de la cellule inférieure gauche du tableau 5.4.1, l'effectif  $n_{31}$  étant alors nul. Cette situation pourrait se présenter en réalité s'il s'avérait impossible d'amener des cubes de bois de 8 cm de côté à 0 % ou pratiquement 0 % d'humidité.

Le tableau 12.4.2 donne les résultats des différents types de comparaison de moyennes, au nombre de quatre cette fois.

Ici également, les résultats relatifs à la variation résiduelle et à l'interaction dimension-humidité ne diffèrent pas d'un cas à l'autre.

**Tableau 12.4.2.** Étude de la carbonisation du bois de hêtre : résultats de l'analyse de la variance non orthogonale en présence d'un effectif nul (une cellule vide).

| Sources de variation  | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | $F$  | P    |
|---|-------------------|------------------------------|---------------|------|------|
| Comparaison de moyennes pondérées (analyse de type I)       |                   |                              |               |      |      |
| Dimension   | 2                 | 1,1208                       | 0,5604        | 2,28 | 0,13 |
| Humidité  | 3                 | 0,4092                       | 0,1364        | 0,55 | 0,65 |
| Dimension-humidité  | 5                 | 0,1719                       | 0,0344        | 0,14 | 0,98 |
| Variation résiduelle  | 21                | 5,1683                       | 0,2461        |      |      |
| Comparaison de moyennes ajustées (analyse de type II)       |                   |                              |               |      |      |
| Dimension   | 2                 | 1,1450                       | 0,5725        | 2,33 | 0,12 |
| Humidité  | 3                 | 0,4335                       | 0,1445        | 0,59 | 0,63 |
| Dimension-humidité  | 5                 | 0,1719                       | 0,0344        | 0,14 | 0,98 |
| Variation résiduelle  | 21                | 5,1683                       | 0,2461        |      |      |
| Comparaison de moyennes non pondérées (analyse de type III) |                   |                              |               |      |      |
| Dimension   | 2                 | 1,0687                       | 0,5344        | 2,17 | 0,14 |
| Humidité  | 3                 | 0,4414                       | 0,1471        | 0,60 | 0,62 |
| Dimension-humidité  | 5                 | 0,1719                       | 0,0344        | 0,14 | 0,98 |
| Variation résiduelle  | 21                | 5,1683                       | 0,2461        |      |      |
| Analyse de type IV  |                   |                              |               |      |      |
| Dimension   | 2                 | 0,8685                       | 0,4342        | 1,76 | 0,20 |
| Humidité  | 3                 | 0,3945                       | 0,1315        | 0,53 | 0,66 |
| Dimension-humidité  | 5                 | 0,1719                       | 0,0344        | 0,14 | 0,98 |
| Variation résiduelle  | 21                | 5,1683                       | 0,2461        |      |      |

De plus, en ce qui concerne les trois premiers types de comparaison, les résultats ne sont pas fondamentalement différents de ceux du tableau 12.4.1, et des remarques semblables à celles du paragraphe précédent pourraient être formulées. On peut noter aussi que, du fait de la suppression d'une cellule, cinq degrés de liberté seulement restent affectés à l'interaction des deux facteurs, qui ne peut pas être définie de la manière habituelle.

Les résultats relatifs à la comparaison de type IV sont, par contre, plus particuliers. À cet égard, il faut savoir qu'il s'agit d'un cas où les résultats peuvent dépendre de l'ordre dans lequel les données, et non pas seulement les facteurs, sont pris en considération, ce qui en rend l'interprétation très sujette à caution.

Pour deux facteurs quantitatifs, comme le sont les dimensions et les humidités envisagées ici, en présence d'une ou plusieurs cellules vides, une analyse des résultats par régression multiple pourrait être préférée à l'analyse de la variance.

## 12.4.2 L'analyse de la covariance

### 1° Généralités

L'*analyse de la covariance*<sup>12</sup> peut être considérée comme une première extension ou une première généralisation de l'analyse de la variance. Elle a pour principe d'étudier l'influence d'un ou plusieurs facteurs ou critères de classification sur une certaine variable, comme en analyse de la variance, mais en éliminant par régression l'effet d'une ou plusieurs autres variables, dites *variables auxiliaires* ou *covariables*<sup>13</sup> et observées sur les mêmes individus [STAT2, § 17.1].

Nous en avons vu un exemple au paragraphe 11.5.2.6°, la variable envisagée étant le poids d'un certain nombre de taureaux en fin d'expérience et la variable auxiliaire ou covariable le poids des mêmes taureaux en début d'expérience. Dans une telle application, les différences de poids observées en fin d'expérience sont en quelque sorte corrigées ou ajustées par l'analyse de la covariance, en fonction des différences de poids observées en début d'expérience.

Quand les deux variables considérées (poids initial et poids final dans l'exemple du paragraphe 11.5) sont fortement corrélées, l'analyse de la covariance permet souvent d'augmenter nettement la sensibilité des comparaisons. Elle peut compléter, et parfois remplacer, le contrôle de la variabilité du matériel expérimental qui est normalement réalisé par une division en blocs (blocs complets ou incomplets) ou en lignes et colonnes (carré latin, permutation des objets, etc.).

On peut aussi dire que, quand une seule variable auxiliaire est considérée, l'analyse de la covariance associe l'analyse de la variance et la régression simple, tandis que quand deux ou plusieurs variables auxiliaires sont prises en considération simultanément, l'analyse de la covariance associe l'analyse de la variance et la régression multiple.

### 2° Différents modèles et conditions d'application

Comme en analyse de la variance, il existe en analyse de la covariance de nombreux modèles différents (modèles croisés et hiérarchisés, fixes, mixtes et aléatoires, orthogonaux et non orthogonaux, etc.) [STAT2, § 17.2 et 17.3]. Il importe donc d'être toujours attentif au choix du modèle d'analyse qui correspond exactement au problème envisagé.

D'autre part, plus encore que l'analyse de la variance, l'analyse de la covariance ne peut être utilisée que dans des conditions relativement strictes, qui concernent la normalité des distributions, l'égalité des variances, la linéarité des relations entre les variables considérées, et l'égalité des coefficients de régression relatifs à ces variables. Ces conditions d'application doivent toujours être vérifiées dans toute la mesure du possible, les conditions de linéarité et d'égalité des coefficients de régression étant souvent particulièrement contraignantes.

<sup>12</sup> En anglais : *analysis of covariance*, *ANCOVA*, *ANOCOVA*.

<sup>13</sup> En anglais : *covariate*.

En outre, dans l'interprétation des résultats, l'analyse de la covariance nécessite l'emploi de moyennes ajustées, au lieu des moyennes observées, et d'erreurs standards adaptées aux moyennes ajustées.

[ Des informations complémentaires relatives à l'analyse de la covariance appliquée aux problèmes d'expérimentation peuvent être trouvées, entre autres, dans les livres généraux de KUEHL [2000] et MEAD [1988], et dans le livre spécialisé de MILLIKEN et JOHNSON [2002].

### ⊖ 3° Analyse de la covariance et divers incidents

Indépendamment de ses utilisations habituelles, l'analyse de la covariance permet de remédier à divers types d'incidents ou d'accidents susceptibles de se présenter dans la conduite d'une expérience.

Dans le cas d'une valeur manquante, il est possible de traiter les données par l'analyse de la covariance, au lieu de l'analyse de la variance. Dans ce but, il y a lieu de remplacer la valeur manquante par 0 (ou par toute autre valeur), et de considérer une variable auxiliaire ou instrumentale égale à  $-1$  ou  $+1$  (ou à toute autre valeur) pour l'unité expérimentale dont la donnée est manquante, et à 0 pour toutes les autres unités expérimentales. En particulier, quand on associe la valeur  $-1$  à la donnée qui est manquante, la valeur estimée de cette donnée est égale au coefficient de régression qui est fourni par l'analyse de la covariance.

Pour deux ou plusieurs données manquantes, on peut procéder de la même façon en constituant autant de covariables qu'il y a de données manquantes, les différentes covariables étant toujours nulles, sauf chacune pour une des valeurs manquantes.

L'analyse de la covariance permet aussi d'apporter une réponse satisfaisante à des problèmes tels que ceux qui résultent du mélange accidentel de la récolte de deux parcelles voisines ou, d'une manière plus générale, de la confusion des observations relatives à deux unités expérimentales. Il suffit d'affecter aux deux unités expérimentales en question une valeur égale à la moitié du total observé globalement pour ces deux unités, de constituer une variable auxiliaire égale à  $-1$  pour une de ces deux unités, à  $+1$  pour l'autre unité litigieuse et à 0 en dehors de ces deux cas particuliers, et comme ci-dessus, d'effectuer une analyse de la covariance portant sur les variables ainsi définies.

Enfin, des covariables constituées d'une manière semblable peuvent être utilisées pour tenir compte de la présence locale de conditions particulières, dont l'influence ne serait pas suffisamment prise en compte par le dispositif expérimental proprement dit. On peut penser par exemple à des zones inondées ou à des dégâts de gibier, qui affecteraient partiellement certains blocs. Mais il peut tout aussi bien s'agir de conditions particulières liées à la collecte des observations, telles qu'une récolte interrompue par le mauvais temps et devant être reprise ultérieurement, ou l'intervention de deux ou plusieurs machines ou opérateurs ou observateurs différents.

Des informations complémentaires sont données à ce sujet notamment par LITTLE et RUBIN [2002] et SMITH [1981].

#### ⊖ 4° Exemple

Nous illustrons les différentes situations qui viennent d'être évoquées en reprenant les données analysées au paragraphe 6.5.2, c'est-à-dire le contenu des lignes 8 à 16 du tableau 6.5.2.

En ce qui concerne la donnée manquante relative à l'objet 11 et au bloc 1, une analyse de la covariance peut être réalisée en remplaçant cette donnée par 0 et en constituant une variable auxiliaire égale à  $-1$  pour la parcelle en question et à 0 pour les 26 autres parcelles envisagées. Les résultats de cette analyse figurent dans la première partie du tableau 12.4.3.

**Tableau 12.4.3.** Comparaison de fumures sur blé : résultats de trois analyses de la covariance.

| Sources de variation                           | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | F        | P      |
|--|-------------------|------------------------------|---------------|----------|--------|
| Une donnée manquante                           |                   |                              |               |          |        |
| Phosphore                                      | 2                 | 6,2329                       | 3,1165        | 39,6 *** | 0,0000 |
| Calcium  | 2                 | 3,1138                       | 1,5569        | 19,8 *** | 0,0001 |
| Interaction                                    | 4                 | 0,1436                       | 0,0359        | 0,46     | 0,77   |
| Blocs  | 2                 | 1,8650                       | 0,9325        |          |        |
| Variation résiduelle                           | 15                | 1,1819                       | 0,0788        |          |        |
| Deux données manquantes                        |                   |                              |               |          |        |
| Phosphore                                      | 2                 | 5,5245                       | 2,7622        | 32,8 *** | 0,0000 |
| Calcium  | 2                 | 3,1029                       | 1,5515        | 18,4 *** | 0,0001 |
| Interaction                                    | 4                 | 0,1454                       | 0,0364        | 0,43     | 0,78   |
| Blocs  | 2                 | 1,7848                       | 0,8924        |          |        |
| Variation résiduelle                           | 14                | 1,1781                       | 0,0842        |          |        |
| Une donnée manquante et deux données mélangées |                   |                              |               |          |        |
| Phosphore                                      | 2                 | 6,2329                       | 3,1165        | 37,6 *** | 0,0000 |
| Calcium  | 2                 | 2,9808                       | 1,4904        | 18,0 *** | 0,0001 |
| Interaction                                    | 4                 | 0,1642                       | 0,0410        | 0,49     | 0,74   |
| Blocs  | 2                 | 1,8650                       | 0,9325        |          |        |
| Variation résiduelle                           | 14                | 1,1611                       | 0,0829        |          |        |

Ces résultats sont tout à fait comparables à ceux du tableau 6.5.3. En outre, la valeur du coefficient de régression du rendement en fonction de la variable auxiliaire constituée de 0 et d'une valeur  $-1$  est égale à 2,25, soit la valeur estimée qui a été obtenue au paragraphe 6.5.2.2°.

D'autre part, en vue d'illustrer le cas de deux données manquantes, nous supposons que, toujours dans le bloc 1, le résultat relatif à l'objet 10 (valeur 2,07 du tableau 6.5.2) est également manquant. Il faut alors considérer la deuxième valeur manquante comme égale aussi à 0, constituer une deuxième variable auxiliaire, égale à  $-1$  pour la parcelle en question et à 0 pour les autres parcelles, et effectuer une analyse de la covariance qui tient compte des deux covariables.

Les résultats de cette analyse sont donnés dans la deuxième partie du tableau 12.4.3. Les valeurs estimées des données manquantes, fournies par les coefficients de régression, sont ici 2,26 pour l'objet 11 et 2,15 pour l'objet 10.

Nous supposons également, encore en ce qui concerne le bloc 1, non seulement que le résultat relatif à l'objet 11 est manquant, mais en outre que les récoltes des parcelles voisines relatives aux objets 8 et 10 (figure 6.5.1) ont été mélangées par inadvertance, et qu'au lieu d'obtenir des rendements par parcelle égaux à 1,30 et 2,07 (tableau 6.5.2), on a obtenu un rendement total égal à 3,37. On peut alors affecter arbitrairement ce total pour moitié (1,685) à chacune des deux parcelles en question, conserver la première covariable relative à la parcelle 11, constituer une deuxième covariable égale à  $-1$  et  $+1$  respectivement pour la parcelle 8 et la parcelle 10 et à 0 pour les 25 autres parcelles, et effectuer comme ci-dessus une analyse de la covariance qui fait intervenir les deux covariables.

Les résultats de cette dernière analyse constituent la troisième partie du tableau 12.4.3. De plus, la valeur du coefficient de régression relatif à la deuxième covariable est égal à  $-0,510$ , et on peut en déduire les résultats estimés relatifs aux deux parcelles mélangées en soustrayant cette valeur de la moyenne 1,685 (soit 1,175 pour l'objet 8) et en ajoutant cette valeur à la même moyenne (soit 2,195 pour l'objet 10).

Les résultats obtenus dans les trois cas différent à certains égards, ce qui n'est pas surprenant, puisqu'ils ne sont pas basés exactement sur les mêmes informations de départ. Mais ces résultats restent néanmoins tout à fait cohérents.

Enfin, si par exemple, la moitié droite du bloc 3 avait été l'objet de dégâts particuliers relativement uniformes (figure 6.5.1), on pourrait s'efforcer de remédier à cette situation par l'analyse de la covariance, en faisant intervenir une covariable qui serait égale à  $-1$  ou  $+1$  (ou toute autre valeur différente de 0) pour les parcelles 15, 11, 9, 8, 13 et 16 de ce bloc et à 0 pour toutes les autres parcelles étudiées<sup>14</sup>.

## ⊖ 12.4.3 Le modèle linéaire général

### 1° Modèle

Le *modèle linéaire* ou *modèle linéaire général*<sup>15</sup> consiste en une présentation commune de la régression linéaire (simple ou multiple), de l'analyse de la variance

<sup>14</sup> Pour mémoire, les objets 1 à 7 ne sont pas pris en considération dans l'analyse.

<sup>15</sup> En anglais : *linear model, general linear model, GLM*.

et de l'analyse de la covariance, sous la forme :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{d}.$$

Dans cette relation,  $\mathbf{y}$  est un vecteur-colonne de  $n$  éléments désignant les variables aléatoires qui sont associées aux différentes observations,  $\boldsymbol{\beta}$  est un vecteur-colonne de  $p$  éléments correspondant aux différents paramètres du modèle, et  $\mathbf{d}$  est un vecteur-colonne de  $n$  éléments relatifs aux termes d'erreur ou résiduels.

Quant à la matrice  $\mathbf{X}$ , de dimensions  $n \times p$ , elle réunit les valeurs des variables explicatives quand il s'agit de régression, de *variables indicatrices* ou *instrumentales*<sup>16</sup> en analyse de la variance, et à la fois de variables explicatives et indicatrices en analyse de la covariance. Les variables indicatrices, constituées de 0 et de 1, indiquent quels sont les paramètres qui interviennent dans le modèle pour chacune des observations.

Dans cette optique, cette matrice est parfois appelée *matrice d'incidence*<sup>17</sup>. Elle peut être comparée à la matrice du modèle dont il a été question au paragraphe 2.4.3.8°, en matière de plans optimaux.

## 2° Exemple

En vue d'illustrer la correspondance qui existe entre l'analyse de la variance et le modèle linéaire, nous considérons à nouveau l'exemple du paragraphe 5.4. Les trois vecteurs-colonnes sont dans ce cas :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 30,00 \\ 29,67 \\ 29,78 \\ 29,82 \\ 29,71 \\ 29,87 \\ 29,27 \\ 30,11 \\ 30,58 \\ 33,11 \\ 30,18 \\ 29,16 \\ 29,38 \\ 28,98 \\ 29,82 \\ 29,11 \\ \vdots \\ 29,73 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} m_{..} \\ a_1 \\ \vdots \\ a_3 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_4 \\ (ab)_{11} \\ \vdots \\ (ab)_{14} \\ (ab)_{21} \\ \vdots \\ (ab)_{24} \\ (ab)_{31} \\ \vdots \\ (ab)_{34} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \\ d_{10} \\ d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \\ d_{15} \\ d_{16} \\ \vdots \\ d_{36} \end{bmatrix},$$

<sup>16</sup> En anglais : *indicator variable, dummy variable*.

<sup>17</sup> En anglais : *incidence matrix*.

tandis que la matrice d'incidence est :

$$\mathbf{X} = \left[ \begin{array}{c|ccc|ccc|cccccccc} 1 & 1 & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ \vdots & \vdots \\ 1 & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{array} \right] .$$

Le vecteur  $\mathbf{y}$  contient les 36 observations du tableau 5.4.1 ou du tableau 5.4.2<sup>18</sup>. Le vecteur  $\boldsymbol{\beta}$  est constitué de la moyenne générale  $m_{..}$ , des trois effets principaux  $a_i$  relatifs au premier facteur, des quatre effets principaux  $b_j$  relatifs au deuxième facteur, et des 12 termes d'interaction  $(ab)_{ij}$ , soit un total de 20 paramètres [STAT2, § 10.3.2]. Et le vecteur  $\mathbf{d}$  est formé des 36 termes d'erreur associés aux 36 observations.

De plus, la matrice d'incidence  $\mathbf{X}$  contient des valeurs 1 pour toutes les observations en ce qui concerne la moyenne  $m_{..}$ , qui intervient dans tous les cas, une colonne de 12 valeurs 1 pour les 12 premières observations, auxquelles le paramètre  $a_1$  est associé (premier niveau du premier facteur), une deuxième colonne de 12 valeurs 1 pour les 12 observations suivantes, auxquelles  $a_2$  est associé (deuxième niveau du premier facteur), une troisième colonne de 12 valeurs 1 pour les 12 dernières observations, auxquelles  $a_3$  est associé (troisième niveau du premier facteur), et de même des valeurs 1 par groupes de trois observations en ce qui concerne  $b_1, \dots, b_4$  (quatre colonnes), et  $(ab)_{11}, \dots, (ab)_{34}$  (12 colonnes).

En vue d'améliorer la lisibilité de cette matrice, nous y avons remplacé les valeurs 0 par des points, et nous y avons introduit des séparations verticales entre les colonnes et groupes de colonnes relatifs à  $m_{..}$ ,  $a_i$ ,  $b_j$  et  $(ab)_{ij}$ .

<sup>18</sup> Au sens strict, il devrait s'agir des variables aléatoires associées à ces 36 observations. Pour rendre la présentation plus parlante, il nous a paru préférable de mentionner les observations elles-mêmes.

Plus concrètement, pour la première observation, le modèle mathématique classique est [STAT2, § 10.3.2] :

$$x_{111} = m_{..} + a_1 + b_1 + (ab)_{11} + d_{111}.$$

Et en prenant en considération le premier élément du vecteur  $\mathbf{y}$ , le produit de la première ligne de la matrice  $\mathbf{X}$  par le vecteur  $\boldsymbol{\beta}$ , et le premier élément du vecteur  $\mathbf{d}$ , cette relation devient :

$$y_1 = m_{..} + a_1 + b_1 + (ab)_{11} + d_1.$$

Si en outre, on désigne les 20 paramètres du modèle par  $\beta_1, \dots, \beta_{20}$ , on obtient :

$$y_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_5 + \beta_9 + d_1.$$

De même, pour la dernière observation, on a :

$$x_{343} = m_{..} + a_3 + b_4 + (ab)_{34} + d_{343},$$

ainsi que :

$$y_{36} = m_{..} + a_3 + b_4 + (ab)_{34} + d_{343} \quad \text{et} \quad y_{36} = \beta_1 + \beta_4 + \beta_8 + \beta_{20} + d_{36}.$$

### 3° Utilisation

Le modèle linéaire général permet donc de présenter et de traiter de manière unifiée l'ensemble des problèmes de régression linéaire, d'analyse de la variance et d'analyse de la covariance. Ce modèle est d'ailleurs souvent introduit tel quel, dans de nombreux enseignements et de nombreux ouvrages, sans détailler au préalable les différentes approches et les différentes possibilités qu'il recouvre.

À ce titre, le concept de modèle linéaire général intervient implicitement dans bon nombre d'applications en analyse de la variance, même si on s'en tient à une présentation non matricielle classique. Nous avons vu en effet que les cas non orthogonaux d'analyse de la variance impliquent fréquemment l'utilisation de commandes ou instructions de type « *glm* », conçues précisément en fonction du modèle linéaire (§ 9.4.2.4° et 9.5.2.4° par exemple)<sup>19</sup>.

Le modèle linéaire permet surtout d'aller sensiblement plus loin, en ce qui concerne les conditions d'application des différentes méthodes envisagées.

Nous avons toujours considéré jusqu'à présent les conditions classiques de normalité des distributions, d'égalité des variances et d'indépendance des résidus, associées à la méthode des moindres carrés, dite aussi des *moindres carrés ordinaires*<sup>20</sup>. Ces conditions correspondent au premier type de matrice de variances et covariances présenté au paragraphe 11.2.2.2°, à savoir :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I},$$

<sup>19</sup> On notera toutefois que le sigle GLM est parfois utilisé pour désigner, non pas le modèle linéaire général, mais bien le modèle linéaire généralisé, présenté au paragraphe 12.4.4.2°.

<sup>20</sup> En anglais : *ordinary least squares*, *OLS*.

si on désigne par  $\mathbf{I}$  la matrice identité, constituée de valeurs 1 dans la diagonale descendante et 0 en dehors de cette diagonale.

En réalité, le modèle linéaire général peut être utilisé dans des conditions beaucoup plus larges, sans aucune restriction quant aux variances et aux covariances, en faisant appel alors à la méthode dite des *moindres carrés généralisés*<sup>21</sup>. Le plus souvent cependant, les variances et les covariances ne sont pas tout à fait quelconques, mais correspondent à l'une ou l'autre structure particulière du genre de celles du paragraphe 11.2.2.2° (symétrie composée, condition de HUYNH et FELDT, etc.).

De nombreux ouvrages traitent du modèle linéaire général et permettent d'obtenir des informations complémentaires à son sujet. Nous mentionnons en particulier les livres de HOCKING [2003], NETER *et al.* [1996], et RENCHER et SCHAALJE [2008]. Plus de détails sont aussi donnés dans « STAT2 » (§ 16.4), et une synthèse, qui s'étend en outre aux différents modèles dont il est question ci-dessous, est présentée dans DAGNELIE [2008b].

## ⊖ 12.4.4 Le modèle linéaire mixte et le modèle linéaire généralisé

### 1° Modèle linéaire mixte

Le concept de modèle linéaire général a été largement développé au départ, en analyse de la variance, en ne considérant que des facteurs fixes. Des facteurs aléatoires ont ensuite été introduits, au même titre que les facteurs fixes, et ont conduit à la notion de *modèle linéaire mixte* ou *modèle mixte*<sup>22</sup>.

Ce modèle est généralement présenté sous la forme :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{d},$$

$\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$  constituant la partie fixe du modèle et  $\mathbf{Z}\mathbf{u}$  sa partie aléatoire. La matrice  $\mathbf{X}$  et le vecteur  $\boldsymbol{\beta}$  jouent, pour le ou les facteurs fixes, le même rôle que précédemment, tandis que  $\mathbf{Z}$  est, pour le ou les facteurs aléatoires, une matrice d'incidence semblable à  $\mathbf{X}$ , et  $\mathbf{u}$  est un vecteur de variables aléatoires correspondant aux différentes modalités ou combinaisons de modalités de ce ou ces facteurs.

Par analogie avec les différents éléments de  $\mathbf{d}$ , les éléments de  $\mathbf{u}$  sont en général considérés comme étant de distributions normales, de moyennes nulles et caractérisés par une matrice de variances et covariances qui peut posséder l'une ou l'autre structure particulière. On suppose aussi le plus souvent qu'il y a indépendance entre les différents éléments de  $\mathbf{u}$  et les différents éléments de  $\mathbf{d}$ . Ces conditions généralisent celles qui concernent le modèle mixte classique d'analyse de la variance à deux critères de classification [STAT2, § 10.3.4].

<sup>21</sup> En anglais : *generalized least squares, GLS*.

<sup>22</sup> En anglais : *linear mixed model, mixed model*.

Les procédures qui permettent d'appliquer le modèle linéaire mixte font appel à diverses méthodes d'estimation, dont la méthode du maximum de vraisemblance restreint (REML), à laquelle nous avons déjà fait allusion au paragraphe 11.1.2.6°.

Comme sources d'informations complémentaires, on peut citer les livres de DEMIDENKO [2004], VERBEKE et MOLENBERGHS [1997], et WEST *et al.* [2007], ainsi que les articles de BRIEN et DEMÉTRIO [2009], GURKA [2006], et PIEPHO *et al.* [2003].

## 2° Modèle linéaire généralisé

La notion de *modèle linéaire généralisé*<sup>23</sup> permet d'étendre l'analyse de la variance à un vaste ensemble de distributions, qui comprend non seulement les distributions normales, mais aussi les distributions binomiales, les distributions de POISSON, etc.

En ce qui concerne le modèle linéaire le plus simple (§ 12.4.3.1°) :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{d},$$

on peut écrire aussi :

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta},$$

si  $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}}$  désigne le vecteur des moyennes des différentes composantes de  $\mathbf{y}$ . Par définition, les écarts résiduels qui constituent le vecteur  $\mathbf{d}$  sont en effet de moyennes nulles, de telle sorte que ce vecteur n'apparaît pas dans l'équation relative à la moyenne de  $\mathbf{y}$ .

Dans ces conditions, le modèle généralisé revient à considérer que ce ne sont pas les moyennes des composantes de  $\mathbf{y}$  qui sont égales à  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ , mais bien des fonctions de ces moyennes :

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}.$$

Les fonctions en question, qui doivent être monotones (croissantes ou décroissantes), sont appelées *fonctions de passage* ou *de lien*<sup>24</sup>. Le choix de ces fonctions dépend notamment du type de distribution qui est pris en considération.

Ce concept s'apparente à celui de transformation de variable [STAT2, chap. 4], mais les deux approches ne doivent cependant pas être confondues, dans la mesure notamment où les écarts résiduels n'interviennent pas de la même manière dans les deux cas. D'une façon générale, les deux approches ne conduisent donc pas aux mêmes résultats.

Par extension encore, on peut introduire également la notion de *modèle linéaire mixte généralisé*<sup>25</sup> :

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u},$$

<sup>23</sup> En anglais : *generalized linear model*.

<sup>24</sup> En anglais : *link function*.

<sup>25</sup> En anglais : *generalized linear mixed model*.

les différents symboles possédant la même signification qu'au paragraphe précédent.

Des informations complémentaires peuvent être trouvées, entre autres, dans les livres de DOBSON et BARNETT [2008], LINDSEY [1997], et MYERS *et al.* [2010], ainsi que dans les articles d'ENGEL et KEEN [1994], MOLENBERGHS *et al.* [2002], et MYERS et MONTGOMERY [1997]. Des exemples d'utilisation en matière d'expérimentation sont également présentés par LEWIS *et al.* [2001a, 2001b].

### 3° Exemple : modèle linéaire mixte

Comme nous l'avons fait au paragraphe 12.4.3.2° pour le modèle linéaire général, nous pouvons expliciter la formulation du modèle linéaire mixte en considérant les données d'un exemple antérieur. Nous reprenons à cette fin l'exemple du paragraphe 6.5, en nous limitant toujours à l'ensemble factoriel  $3^2$  qui correspond à trois niveaux de fumure phosphorique et trois niveaux de fumure calcique, comparés dans trois blocs.

Dans ces conditions, le vecteur-colonne  $\mathbf{y}$  contient les 26 observations du tableau 6.5.2 allant de 1,30 à 3,67 (ou les variables aléatoires associées à ces observations)<sup>26</sup>.

Ensuite, dans la partie fixe du modèle, le vecteur-colonne  $\boldsymbol{\beta}$  est constitué de 16 éléments, à savoir la moyenne générale  $m_{...}$ , les trois effets principaux  $a_i$  relatifs au facteur phosphore, les trois effets principaux  $b_j$  relatifs au facteur calcium, et les neuf termes d'interaction  $(ab)_{ij}$  des deux facteurs [STAT2, § 11.2.3]. Quant à la matrice  $\mathbf{X}$ , elle est semblable à celle du paragraphe 12.4.3.2°, mais elle est de dimensions  $26 \times 16$  (26 observations  $\times$  16 paramètres).

Dans la partie aléatoire du modèle, figurent le vecteur-colonne  $\mathbf{u}$ , constitué de trois éléments, à savoir les effets aléatoires  $C_k$  relatifs aux trois blocs, et la matrice d'incidence  $\mathbf{Z}$ , de dimensions  $26 \times 3$  (26 observations  $\times$  3 paramètres). Cette matrice indique par des valeurs 1 à quels blocs correspondent les diverses observations.

Enfin, le vecteur  $\mathbf{d}$  est formé des 26 termes d'erreur qui sont associés aux 26 observations<sup>27</sup>.

Le tableau 12.4.4 présente les résultats qui sont fournis pour ces données par la fonction « *lmer* » du logiciel R, en ce qui concerne les deux facteurs fixes et leur interaction. Ces résultats sont très proches de ceux qui ont été obtenus antérieurement (tableau 6.5.3).

Les différences qui sont observées résultent non seulement des différences de procédures de calcul qui sont adoptées, mais aussi de la manière dont est traitée la

<sup>26</sup> Pour rappel, une observation est manquante (26 observations au lieu de 27).

<sup>27</sup> En présentant le modèle de cette façon, nous supposons implicitement que les interactions phosphore-blocs, calcium-blocs et phosphore-calcium-blocs sont regroupées, en vue de constituer le terme « résiduel », comme il est de pratique courante en ce qui concerne les expériences en blocs aléatoires complets (§ 6.2.2°).

**Tableau 12.4.4.** Comparaison de fumures sur blé : résultats obtenus à l'aide du modèle linéaire mixte.

| Sources de variation | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | F        | P      |
|----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|----------|--------|
| Phosphore            | 2                 | 6,4698                       | 3,2349        | 41,0 *** | 0,0000 |
| Calcium              | 2                 | 3,2694                       | 1,6347        | 20,8 *** | 0,0000 |
| Interaction          | 4                 | 0,1471                       | 0,0368        | 0,47     | 0,76   |

question de la donnée manquante (analyse basée sur 27 observations au paragraphe 6.5.2, y compris une valeur estimée remplaçant la valeur manquante, et analyse basée sur 26 observations ici).

Le modèle linéaire mixte généralisé permettrait de traiter également diverses fonctions (logarithmes ou autres) des données observées, et cela éventuellement aussi dans des conditions beaucoup moins restrictives que celles de l'analyse de la variance classique.

## ⊖ 12.4.5 L'analyse de la variance à plusieurs dimensions

### 1° Un critère de classification

L'analyse de la variance à plusieurs dimensions ou à plusieurs variables<sup>28</sup> a pour but de comparer deux ou plusieurs populations ou groupes d'individus en ce qui concerne, simultanément, les moyennes de deux ou plusieurs variables [DAGNELIE, 1986, chap. 11].

Ce type d'analyse est une généralisation relativement simple de l'analyse de la variance classique, les sommes des carrés des écarts étant remplacées par des matrices de sommes de carrés et de produits d'écarts. Pour  $p$  variables, ces matrices se présentent comme suit :

$$\begin{bmatrix} \text{SCE}_{11} & \text{SPE}_{12} & \dots & \text{SPE}_{1p} \\ \text{SPE}_{21} & \text{SCE}_{22} & \dots & \text{SPE}_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{SPE}_{p1} & \text{SPE}_{p2} & \dots & \text{SCE}_{pp} \end{bmatrix},$$

si on désigne par  $\text{SCE}_{ii}$  les  $p$  sommes des carrés des écarts des variables considérées individuellement, et par  $\text{SPE}_{ij}$  les  $p(p-1)/2$  sommes des produits des écarts des variables considérées deux à deux, la matrice étant symétrique par rapport à sa

<sup>28</sup> En anglais : *multivariate analysis of variance, MANOVA*.

diagonale descendante, car :

$$\text{SPE}_{ji} = \text{SPE}_{ij}.$$

Dans le cas de l'analyse de la variance à un critère de classification, la matrice des sommes des carrés et des produits des écarts relatives à l'ensemble des observations est subdivisée en deux composantes, à savoir une matrice des sommes des carrés et des produits des écarts factorielle et une matrice des sommes et des produits des écarts résiduelle, de la même manière que, pour une seule variable, la somme des carrés des écarts totale est subdivisée en une composante factorielle et une composante résiduelle. La matrice factorielle et la matrice résiduelle sont ensuite comparées par différents tests qui généralisent en quelque sorte le test  $F$  de FISHER-SNEDECOR.

Les principaux tests utilisés sont le test de WILKS, le test de LAWLEY et HOTELLING, le test de PILLAI et le test de ROY. D'une manière générale, ces différents tests ne donnent pas des résultats identiques, et aucun d'entre eux n'est toujours supérieur aux autres.

Les résultats de ces tests sont cependant identiques quand deux populations ou deux groupes d'individus seulement sont comparés. Les différents tests se confondent alors, et ils correspondent aussi au test  $T^2$  de HOTELLING, qui généralise le test  $t$  de STUDENT [DAGNELIE, 1986, § 10.4].

## 2° Deux ou plusieurs critères de classification

Pour deux ou plusieurs critères de classification, et en revenant tout d'abord au cas d'une seule variable, on peut considérer que toutes les comparaisons qui sont réalisées par des tests  $F$  font intervenir, au numérateur, une somme des carrés des écarts relative à un facteur principal ou à une interaction, et au dénominateur, une somme des carrés des écarts relative à une autre interaction ou à une composante résiduelle. Le choix de la base de comparaison qui intervient au dénominateur dépend dans chaque cas du modèle sous-jacent (modèle croisé ou hiérarchisé, fixe, mixte ou aléatoire, etc.).

Ces principes restent d'application pour deux ou plusieurs variables, les sommes des carrés des écarts cédant toutefois la place à des matrices de sommes de carrés et de produits d'écarts. La matrice qui correspond à l'hypothèse à tester, et au numérateur dans le cas d'une seule variable, est généralement désignée par la lettre  $\mathbf{H}$ , tandis que la matrice qui sert de base de comparaison ou d'« erreur », et qui correspond au dénominateur dans le cas d'une seule variable, est désignée par la lettre  $\mathbf{E}$ .

Les matrices  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{E}$  sont comparées par les mêmes tests de WILKS, de LAWLEY et HOTELLING, de PILLAI et de ROY.

Nous présentons un exemple d'analyse de la variance à deux variables et deux facteurs au paragraphe 12.7.3°.

## 12.5 Les données manquantes

### 1° Approches classiques

Nous avons envisagé à diverses reprises la question des données manquantes, en considérant deux solutions relativement simples. Il s'agissait, d'une part, de rechercher des estimations des valeurs manquantes, en assurant le minimum de la somme des carrés des écarts résiduelle (§ 6.3.5° et 8.3.3° notamment), et d'autre part, de remplacer l'analyse de la variance par une analyse de la covariance faisant intervenir une ou plusieurs covariables instrumentales (§ 12.4.2.3°).

Des informations particulières relatives au traitement des données manquantes pour les différents dispositifs expérimentaux sont fournies entre autres par FEDERER [1955] et JOHN et QUENOUILLE [1977].

Un problème subsidiaire peut être de déterminer quelle est la perte d'information ou de précision liée à l'absence d'une ou plusieurs observations. Selon HUNT et LI [1995], cette perte serait approximativement égale au quotient du nombre d'observations manquantes et du nombre de degrés de liberté du carré moyen résiduel majoré d'une unité.

En ce qui concerne par exemple le problème envisagé au paragraphe 6.5 (comparaison de fumures sur blé), le nombre de degrés de liberté du carré moyen résiduel devrait être normalement égal à 16 (tableau 6.5.3), et l'existence d'une observation manquante conduirait donc à une perte d'information égale à :

$$1/17 = 0,059 \text{ ou } 6 \text{ \%}.$$

Par contre, dans le cas de l'exemple du paragraphe 8.5 (expérience de chauffage du sol sur *Ficus elastica*), l'absence d'une seule donnée aurait conduit à une perte d'information sensiblement plus importante, à savoir (tableau 8.5.2) :

$$1/7 = 0,143 \text{ ou } 14 \text{ \%}.$$

### 2° Autres situations et autres solutions

Dans les différents cas que nous avons envisagés, une hypothèse sous-jacente, qui ne doit pas être négligée, est le fait que les données manquantes se présentent de manière *complètement aléatoire*<sup>29</sup>. D'autres situations doivent cependant aussi être prises en considération, car l'expérimentateur peut être confronté à l'existence de données manquantes *non aléatoires*<sup>30</sup>.

Le caractère non aléatoire des données manquantes peut être lié à la variable observée elle-même. Les observations peuvent en effet être tronquées, par exemple parce que certaines valeurs se situent en deçà de la limite de détection de l'une ou l'autre méthode d'analyse chimique, ou au contraire, parce que certaines valeurs sont trop élevées pour être observées correctement ou dans un délai raisonnable.

<sup>29</sup> En anglais : *missing completely at random, MCAR*.

<sup>30</sup> En anglais : *missing not at random, MNAR*.

Les données manquantes peuvent aussi dépendre des facteurs pris en considération, ou d'une ou plusieurs autres variables, observées ou non observées. La probabilité qu'une valeur soit manquante peut en effet être fonction de l'une ou l'autre caractéristique particulière des unités expérimentales (sexe, âge, taille, poids, etc.).

D'autre part, les données manquantes peuvent être tout à fait indépendantes les unes des autres ou être au contraire étroitement liées entre elles. Dans le cas d'observations successives effectuées sur les mêmes individus, des données peuvent être manquantes de façon tout à fait fortuite en raison d'erreurs de manipulation ou de défaillances occasionnelles de certains instruments de mesure. Mais des données peuvent être manquantes aussi en raison de la mort, de l'élimination ou du retrait de certains patients ou de certains animaux, comme nous l'avons vu au paragraphe 11.5 (comparaison d'alimentations attribuées à des taureaux). L'absence d'une première observation implique alors en général l'absence de toutes les observations ultérieures.

Diverses méthodes d'analyse ont été proposées pour faire face aux différentes situations. On peut citer en particulier la méthode dite d'*imputations multiples*<sup>31</sup>, qui consiste à attribuer aux données manquantes plusieurs valeurs plausibles différentes, déterminées en fonction des observations disponibles, et à réaliser ensuite une série d'analyses statistiques séparées, dont on détermine un résultat « moyen », affecté d'un indice de fiabilité de ce résultat.

[ Des informations complémentaires peuvent être trouvées dans les livres de DODGE [1985] et LITTLE et RUBIN [2002], et les articles de CRETTEZ DE ROTEN et HELBLING [1996], HAREL et ZHOU [2007], VERBEKE *et al.* [2001], et ZHANG [2003].

## 12.6 L'étude des résidus de l'analyse de la variance

### 1° Étude classique des résidus

D'une manière relativement générale, l'étude des *résidus*<sup>32</sup> de l'analyse de la variance et, le cas échéant, de l'analyse de la covariance ou de toute autre méthode apparentée s'impose en vue de vérifier si les conditions d'application de la ou des méthodes utilisées sont satisfaites.

Cette étude peut être réalisée notamment par la préparation de graphiques (« *boxplots* », histogrammes ou diagrammes de probabilité) et la recherche d'éventuelles valeurs aberrantes [STAT2, ex. 9.3.2]. Nous avons présenté les points essentiels d'une telle étude, à titre d'exemple, au paragraphe 5.4.2.

---

<sup>31</sup> En anglais : *multiple imputation*.

<sup>32</sup> En anglais : *residual*.

L'étude des résidus peut orienter le choix de l'une ou l'autre transformation de variable [STAT2, chap. 4], ainsi que les décisions à prendre, le cas échéant, en matière de maintien ou d'élimination de valeurs apparemment aberrantes [STAT2, § 3.5]. À cet égard, il est bon de rappeler que l'élimination de telles valeurs sur la base des seules données numériques disponibles doit toujours être réalisée avec une extrême prudence, une élimination abusive pouvant en effet engendrer divers inconvénients, dont une éventuelle sous-estimation importante de la variation résiduelle [DYKE et PEARCE, 2000; ROCKE, 1992].

### 2° Cartographie des résidus

Une autre exploitation possible des résidus de l'analyse de la variance a pour principe d'en établir une représentation cartographique, correspondant exactement au dispositif expérimental qui a été adopté.

Une telle étude permet de vérifier a posteriori si une expérience a été réalisée dans les meilleures conditions possibles, en ce qui concerne par exemple la dimension et la forme des parcelles, la dimension et la forme des blocs, etc. Et une telle étude permet parfois d'expliquer certaines anomalies ou certains résultats surprenants. En particulier, les résidus d'une analyse de la variance peuvent être traités comme des résultats d'expériences d'uniformité (§ 3.5, 3.6 et 6.4) [HATHEWAY et WILLIAMS, 1958; KOCH et RIGNEY, 1951].

L'étude approfondie des résidus peut être considérée comme constituant une réelle *autopsie*<sup>33</sup> de l'expérience, et peut contribuer notamment aux prises de décision en matière de données aberrantes [PEARCE, 1976c; SUDDUTH et DRUMMOND, 2007].

Enfin, il a parfois été suggéré de définir éventuellement, sur base des résidus, l'un ou l'autre système de *blocs a posteriori* ou de *post-stratification*<sup>34</sup>. C'est une pratique qui nous semble cependant dangereuse, si elle n'est pas utilisée avec circonspection, ainsi que le souligne entre autres GILMOUR [2000].

### 3° Exemple

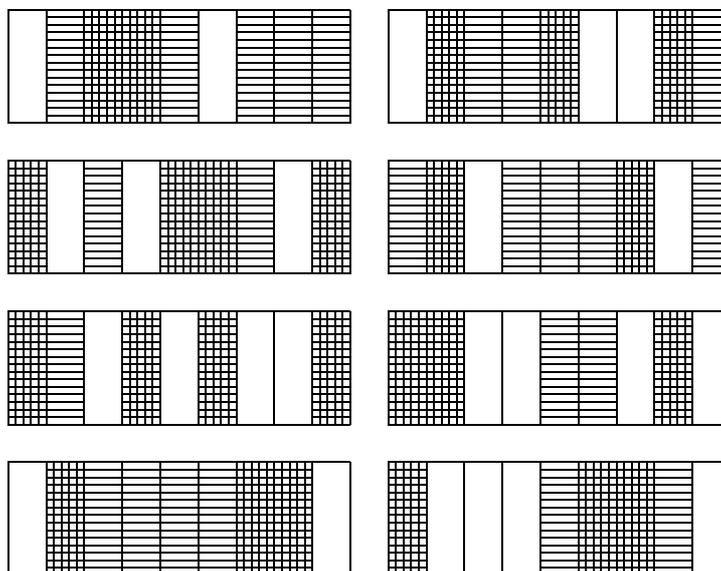
La figure 12.6.1 illustre les possibilités de représentation des résidus de l'analyse de la variance sous forme cartographique. Elle concerne l'exemple du paragraphe 7.4 (inoculation bactérienne sur haricot).

Le canevas général de cette figure est constitué du plan de l'expérience, tel qu'il est présenté à la figure 7.4.1. Quant aux résidus, ils découlent de l'analyse de la variance dont les résultats constituent le tableau 7.4.2.

En vue de leur représentation graphique, les résidus ont été subdivisés en trois groupes de même effectif. Les parcelles auxquelles correspondent les 24 résidus les plus faibles sont représentées en blanc dans la figure 12.6.1. Les parcelles aux-

<sup>33</sup> En anglais : *post-mortem*.

<sup>34</sup> En anglais : *post-blocking*.



**Figure 12.6.1.** Expérience d'inoculation bactérienne sur haricot : représentation cartographique des résidus de l'analyse de la variance.

quelles sont associés les 24 résidus médians sont hachurées horizontalement. Et les parcelles qui correspondent aux 24 résidus les plus élevés sont hachurées à la fois horizontalement et verticalement.

La figure ainsi obtenue ne présente aucune anomalie particulière, telle qu'une concentration excessive de résidus très faibles ou très élevés dans l'un ou l'autre secteur du dispositif expérimental.

Il est évident qu'une subdivision plus fine des résidus, en un plus grand nombre de classes, pourrait être réalisée, et d'autre part, de telles représentations graphiques pourraient aussi être sensiblement améliorées par l'utilisation de couleurs judicieusement choisies.

## 12.7 L'analyse de deux ou plusieurs variables

### 1° Principes

De très nombreuses expériences conduisent à l'observation, non pas d'une seule variable, mais bien de deux ou plusieurs variables, qui sont généralement corrélées entre elles. On peut alors être amené à utiliser, globalement, l'analyse de la variance à plusieurs variables (§ 12.4.5).

Il s'impose toutefois, le plus souvent, de commencer par effectuer des analyses individuelles, variable par variable. Et il nous paraît aussi préférable de se limiter autant que possible à des études unidimensionnelles, en définissant une ou un petit nombre de variables dérivées synthétiques.

De telles variables peuvent être choisies par l'expérimentateur en fonction du ou des buts de l'expérience, comme par exemple des moyennes, éventuellement pondérées, ou d'autres fonctions des différentes variables.

Des variables synthétiques peuvent aussi être définies sans aucun a priori, à partir des valeurs observées elles-mêmes, notamment par l'analyse des composantes ou analyse en composantes principales [DAGNELIE, 1986, chap. 8]. Une telle option est utile en particulier quand le nombre de variables observées est très élevé, notamment dans l'étude des spectres qui peuvent résulter de divers processus d'analyse chimique.

[ Des informations complémentaires sont données entre autres par CHIAO et HAMADA [2001], et LANGSRUD [2001].

## 2° Exemples d'analyse à une variable

Les quelques principes qui viennent d'être exposés peuvent être illustrés en revenant à certains des exemples que nous avons présentés antérieurement.

Au paragraphe 8.5, nous avons analysé des accroissements en hauteur de *Ficus elastica*, soumis à différentes conditions de chauffage du sol. Nous avons aussi signalé que de nombreuses autres variables, telles que les longueurs des entre-nœuds, les nombres de feuilles, les longueurs et les largeurs des feuilles, etc., sont disponibles. Toutes ces variables sont, sous une forme ou sous une autre, des caractéristiques de la dimension ou de la vigueur des plantes. La première composante d'une analyse en composantes principales serait vraisemblablement une excellente mesure globale de cette dimension ou de cette vigueur, intégrant l'ensemble des informations. Et cette première composante pourrait être facilement soumise à l'analyse de la variance.

Au paragraphe 9.5, nous avons étudié la teneur en sucre de différentes variétés de betterave sucrière. Multipliée par le rendement en betteraves, cette caractéristique permet de déterminer le rendement en sucre des différentes variétés, par parcelle et par hectare. En outre, le rendement en sucre pourrait éventuellement être corrigé en fonction de pénalités liées à la récolte, au transport et au traitement des betteraves (charge de terre accompagnant les betteraves, par exemple). L'ensemble des observations pourrait aussi être exprimé sous la forme d'une valeur financière de la récolte.

Au paragraphe 11.3, pour un ensemble d'expériences de comparaison de fumures appliquées à l'épicéa commun, nous avons pris en considération les circonférences moyennes des arbres, calculées parcelle par parcelle. Le protocole expérimental prévoyait qu'outre les circonférences de tous les arbres, les hauteurs d'un certain nombre d'entre eux devaient être mesurées (figure 11.4.1). La connaissance des circonférences et d'un certain nombre de hauteurs permettrait d'estimer

de façon relativement précise les volumes des arbres et les volumes totaux par parcelle, à l'aide de tables de cubage [DAGNELIE *et al.*, 1999]. Ces volumes constitueraient un autre exemple de variable synthétique.

L'exemple du paragraphe 5.4, relatif à la carbonisation du bois de hêtre, est par contre plus délicat. Outre le rendement en charbon de bois, que nous avons étudié, on dispose en effet de divers rendements en liquides et en gaz, de la composition chimique (carbone, hydrogène et oxygène) et du pouvoir calorifique du charbon de bois, et d'autres variables encore [SCHENKEL, 1999]. Certaines variables synthétiques pourraient sans doute être définies, mais il semble plus difficile à première vue d'intégrer dans ce cas-ci l'ensemble des données disponibles en une seule variable.

Ce type de situation nous amène à rappeler que, pour les expériences à objectifs multiples, il importe de définir dès le départ certains ordres de priorité (§ 1.1.2.1°). Idéalement, la manière dont les variables doivent être regroupées ou synthétisées devrait être définie a priori, dans le protocole expérimental, et non pas a posteriori, en fonction des valeurs observées.

### ⊖ 3° Exemple d'analyse à plusieurs variables

En vue d'illustrer brièvement l'utilisation de l'analyse de la variance à plusieurs variables, nous considérons le cas d'une expérience en blocs aléatoires complets destinée à comparer la croissance en hauteur de jeunes sapins de Douglas (*Pseudotsuga douglasii* CARR.), observés sur trois substrats différents [DAGNELIE, 1966].

L'expérience en question comportait six blocs. Pour chacun des substrats et chacun des blocs, on a déduit des hauteurs des plants, une estimation de la fumure optimale en azote, en phosphore et en soufre, par la méthode des variantes systématiques [HOMÈS et HOMÈS-VAN SCHOOR, 1975; HOMÈS et VAN SCHOOR, 1969]<sup>35</sup>.

Les résultats obtenus, exprimés en pourcentages du total (azote + phosphore + soufre), sont donnés dans le tableau 12.7.1.

Les trois variables sont évidemment corrélées, et deux d'entre elles suffisent pour fournir toute l'information disponible, puisqu'elles sont de sommes constantes. Nous ne considérons donc que les valeurs relatives à l'azote et au phosphore.

On se trouve ainsi en présence d'une analyse de la variance à deux critères de classification (substrats et blocs), de modèle mixte (facteur substrats fixe et facteur blocs aléatoire), et à deux variables (N et P). Le facteur substrats doit être testé par rapport à l'interaction substrats-blocs, qui sert de variation résiduelle.

Les matrices des sommes des carrés et des produits des écarts relatives au facteur substrats et à l'interaction sont, respectivement avec 2 et 10 degrés de liberté :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 226,39 & -157,94 \\ -157,94 & 181,81 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 399,12 & -25,05 \\ -25,05 & 119,76 \end{bmatrix}.$$

<sup>35</sup> Des calculs comparables ont aussi été réalisés pour le potassium, le calcium et le magnésium.

**Tableau 12.7.1.** Étude de la croissance en hauteur de jeunes sapins de Douglas : fumures optimales en azote (N), phosphore (P) et soufre (S), en pourcentages.

| Blocs | Substrat 1 |      |      | Substrat 2 |      |      | Substrat 3 |      |      |
|-------|------------|------|------|------------|------|------|------------|------|------|
|       | N          | P    | S    | N          | P    | S    | N          | P    | S    |
| 1     | 17,0       | 38,8 | 44,2 | 37,8       | 38,4 | 23,8 | 39,5       | 38,1 | 22,4 |
| 2     | 28,8       | 38,7 | 32,5 | 33,8       | 35,7 | 30,5 | 35,6       | 28,8 | 35,6 |
| 3     | 24,2       | 40,8 | 35,0 | 27,0       | 47,5 | 25,5 | 34,3       | 32,7 | 33,0 |
| 4     | 25,3       | 40,9 | 33,8 | 23,0       | 37,0 | 40,0 | 37,3       | 26,7 | 36,0 |
| 5     | 28,0       | 46,7 | 25,3 | 24,7       | 42,9 | 32,4 | 27,8       | 39,1 | 33,1 |
| 6     | 30,9       | 36,2 | 32,9 | 43,4       | 37,3 | 19,3 | 30,5       | 34,7 | 34,8 |

Les éléments diagonaux de ces matrices sont les sommes des carrés des écarts qui interviennent dans les analyses de la variance à une variable. Ainsi, on a pour la première variable (N), à partir des valeurs 226,39 et 399,12 :

$$F_{obs} = (226,39/2)/(399,12/10) = 2,84,$$

la probabilité correspondante étant égale à 0,11. Et de même, pour la deuxième variable (P), la valeur observée de la variable  $F$  de FISHER-SNEDECOR est égale à 7,59, avec une probabilité associée égale à 0,010. La deuxième variable fait donc apparaître des différences significatives, ce qui n'est pas le cas pour la première.

Quant aux éléments non diagonaux des matrices  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{E}$ , il s'agit des sommes des produits des écarts, qui peuvent être déterminées par analogie avec les sommes des carrés des écarts.

Le test global d'égalité des moyennes, pour les deux variables prises en considération, et ipso facto pour la troisième variable, peut être réalisé par la méthode de WILKS, qui est la plus couramment utilisée [DAGNELIE, 1986, chap. 11]. Cette méthode est basée sur le calcul des déterminants de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H} + \mathbf{E}$ . Elle conduit à l'obtention de la valeur suivante :

$$W_{obs} = |\mathbf{E}|/|\mathbf{H} + \mathbf{E}| = 47.171/155.150 = 0,3040.$$

Dans le cas particulier de deux variables, la variable de WILKS peut être transformée en une variable  $F$  de FISHER-SNEDECOR. Et on obtient ainsi finalement :

$$F_{obs} = 3,66,$$

avec 4 et 18 degrés de liberté, et une probabilité égale à 0,024.

Les différences existant entre les substrats sont donc globalement significatives, et une analyse plus poussée permettrait de savoir de façon plus précise quels sont les substrats qui diffèrent significativement l'un de l'autre.

## ⊖ 12.8 Les méthodes bayésiennes

Les *méthodes bayésiennes*<sup>36</sup> sont des méthodes d'inférence statistique basées sur l'idée que le ou les paramètres auxquels on s'intéresse (moyennes de différentes populations par exemple) ne sont pas des constantes, mais bien des variables aléatoires [STAT1, § 9.3.5].

Dans cette optique, on considère que le ou les paramètres en question possèdent une ou des distributions de probabilité connues a priori, au moins partiellement, en fonction d'informations qui sont disponibles avant la réalisation d'une expérience. Par le théorème de BAYES [STAT1, § 5.4.3], on peut en déduire une ou des distributions a posteriori, qui tiennent compte à la fois des informations antérieures à l'expérience et des informations complémentaires apportées par l'expérience. La connaissance de la ou des distributions a posteriori permet alors de procéder à des estimations, à des déterminations de limites de confiance, etc.

Ces méthodes sont, dans l'ensemble, relativement peu utilisées dans le domaine de l'expérimentation. Les travaux de BESAG et HIGDON [1999], CHALONER et VERDINELLI [1995], SPIEGELHALTER *et al.* [1994], et THEOBALD et TALBOT [2002] en mettent toutefois en évidence différents aspects.

## ⊖ 12.9 La simulation de résultats d'expériences

### 1° Principes

Dans le cadre de la planification d'une expérience, il peut être intéressant de simuler des résultats possibles, en donnant des valeurs arbitraires, mais plausibles, aux moyennes ou aux effets des objets, des blocs, etc., ainsi qu'à la ou aux variations résiduelles, et en utilisant un générateur de nombres pseudo-aléatoires [STAT1, § 8.2.3].

Une telle *simulation*<sup>37</sup> permet évidemment de vérifier si la procédure qui a été prévue en ce qui concerne l'analyse des résultats ne présente pas de faille. Mais elle permet parfois aussi de mieux préciser les objectifs de l'expérience, et d'envisager certaines modifications qui pourraient être apportées au choix des objets ou du dispositif expérimental.

La simulation peut également être réalisée en supposant que certains résultats sont manquants, ce qui est susceptible d'indiquer comment il y aurait lieu de faire face, le cas échéant, à de telles situations. Enfin, en cas de doute, la simulation de résultats d'expériences peut servir à comparer concrètement deux ou plusieurs ensembles d'objets ou deux ou plusieurs dispositifs expérimentaux différents.

---

<sup>36</sup> En anglais : *Bayesian method*.

<sup>37</sup> En anglais : *simulation*.

### 2° Exemple : données de base

Nous considérons, comme exemple simple de simulation, le cas d'une comparaison de quatre nouvelles variétés de blé avec une variété témoin, au cours d'une expérience qui devrait être réalisée en blocs aléatoires complets. D'une façon plus précise, nous supposons que la variété témoin doit être répétée deux fois plus souvent que chacune des nouvelles variétés, comme le suggère le paragraphe 2.2.2.2°, et que le nombre de blocs est fixé à cinq.

L'expérience devrait donc comporter 30 parcelles, les objets se voyant affecter les numéros 1 à 6, à savoir les numéros 1 à 4 pour les quatre nouvelles variétés et les numéros 5 et 6 pour les deux répétitions, dans chaque bloc, de la variété témoin.

Quant aux valeurs numériques, nous supposons que la moyenne générale du rendement de la variété témoin est égale à 80 quintaux par hectare, et que les variétés nouvelles sont l'une inférieure de 5 % et les trois autres supérieures respectivement de 5, 10 et 15 %, par comparaison avec la variété témoin. Les moyennes théoriques des six objets sont dans ces conditions :

$$m_1 = 76, \quad m_2 = 84, \quad m_3 = 88, \quad m_4 = 92 \quad \text{et} \quad m_5 = m_6 = 80 \text{ q/ha.}$$

En ce qui concerne les cinq blocs, on suppose qu'ils constituent une progression régulière, correspondant par exemple à un gradient de fertilité, le premier bloc ayant un effet négatif de 4 q/ha, le deuxième un effet négatif de 2 q/ha, le troisième un effet nul, le quatrième un effet positif de 2 q/ha, et le cinquième un effet positif de 4 q/ha. Au lieu d'adopter de telles valeurs fixes, on aurait bien sûr pu utiliser aussi des valeurs aléatoires, en considérant par exemple une distribution normale de moyenne nulle et d'écart-type égal à 2 ou 3 q/ha.

Enfin, nous supposons que les variations résiduelles, ou plus exactement les écarts aléatoires qui interviennent dans le terme d'interaction variétés-blocs, suivent une distribution normale de moyenne nulle et d'écart-type égal à 5 q/ha.

Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, ces valeurs sont bien sûr arbitraires, mais tout à fait plausibles. Des différences entre variétés de 5 à 15 %, par rapport à une variété témoin, correspondent en effet à ce qu'un expérimentateur peut raisonnablement attendre, ou espérer mettre en évidence, et l'écart-type résiduel de 5 q/ha correspond à l'ordre de grandeur de 6 % qui est mentionné au paragraphe 11.1.3.2°.

D'autres valeurs des divers paramètres, voire même différentes valeurs des paramètres, pourraient d'ailleurs être facilement utilisées.

### 3° Exemple : simulation et analyse

On peut alors simuler des résultats d'expérience en appliquant le modèle théorique [STAT2, § 10.3.6] :

$$x_{ij} = m_{..} + a_i + b_j + (c_{ij} + d_{ij}) \quad \text{ou} \quad x_{ij} = m_i + b_j + (c_{ij} + d_{ij}),$$

les valeurs des paramètres  $m_i$  et  $b_j$  étant celles qui ont été données ci-dessus, et les valeurs des écarts  $(c_{ij} + d_{ij})$  résultant de la détermination de nombres pseudo-aléatoires. Et on peut ensuite effectuer l'analyse de la variance relative aux données ainsi obtenues.

Le tableau 12.9.1 présente, à titre d'exemple, les valeurs « observées » fournies par une première simulation, et le tableau 12.9.2 donne les résultats de l'analyse de la variance correspondante.

**Tableau 12.9.1.** Simulation de résultats d'expériences :  
exemple de données simulées.

| Objets | Blocs |      |       |      |       | Moyennes |
|--------|-------|------|-------|------|-------|----------|
|        | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     |          |
| 1      | 72,4  | 71,4 | 81,3  | 71,5 | 79,3  | 75,18    |
| 2      | 79,3  | 89,6 | 75,9  | 88,7 | 94,1  | 85,52    |
| 3      | 75,1  | 86,1 | 81,8  | 89,9 | 92,0  | 84,98    |
| 4      | 90,1  | 90,4 | 100,8 | 91,1 | 106,8 | 95,84    |
| 5      | 75,1  | 76,4 | 81,9  | 86,5 | 88,7  | 81,72    |
| 6      | 75,8  | 82,6 | 82,5  | 89,7 | 77,0  | 81,52    |

**Tableau 12.9.2.** Simulation de résultats d'expériences :  
exemple de tableau d'analyse de la variance.

| Sources de variation | Degrés de liberté | Sommes des carrés des écarts | Carrés moyens | $F$      | P      |
|----------------------|-------------------|------------------------------|---------------|----------|--------|
| Variétés             | 5                 | 1.162,51                     | 232,50        | 8,44 *** | 0,0002 |
| Blocs                | 4                 | 448,77                       | 112,19        |          |        |
| Variation résiduelle | 20                | 550,94                       | 27,55         |          |        |
| Totaux               | 29                | 2.162,22                     |               |          |        |

On peut aussi compléter cette analyse par l'estimation de l'efficacité relative (§ 6.3.2°) :

$$[(448,77 + 550,94)/24]/27,55 = 151 \%,$$

par la détermination de la plus petite différence qui devrait être considérée comme significative, au sens de la méthode de DUNNETT [STAT2, § 12.3.2], dans l'optique d'un test unilatéral :

$$2,30 \sqrt{27,55 (1/10 + 1/5)} = 6,61 \text{ q/ha},$$

et par la recherche de la ou des variétés qui seraient significativement supérieures à la variété témoin, à savoir la variété 4, qui est la seule à dépasser la limite :

$$(81,72 + 81,52)/2 + 6,61 = 88,23 \text{ q/ha}.$$

Mais en fait, l'intérêt est surtout d'effectuer plusieurs simulations différentes, afin d'avoir une idée de l'ampleur des fluctuations possibles entre diverses réalisations éventuelles d'une même expérience. Le tableau 12.9.3 donne, toujours à titre d'exemple, les résultats de 10 simulations de l'expérience définie ci-dessus, la première simulation étant celle qui vient d'être présentée. Ce tableau contient successivement, pour chacune des simulations, les valeurs des carrés moyens relatifs aux variétés, aux blocs et à la variation résiduelle (ou interaction variétés-blocs), la valeur de la variable  $F$  de FISHER-SNEDECOR et la probabilité correspondante, l'efficacité relative par rapport à une expérience complètement aléatoire, la valeur de la plus petite différence significative au sens de la méthode de DUNNETT, la valeur limite à partir de laquelle les nouvelles variétés doivent être considérées comme significativement supérieures à la variété témoin, et le ou les numéros de la ou des variétés en question.

**Tableau 12.9.3.** Simulation de résultats d'expériences : résultats de 10 simulations.

| Simul. | Carrés moyens |        |       | $F$   | P      | Eff. rel. | Diff. sign. | Val. lim. | Var. sup. |
|--------|---------------|--------|-------|-------|--------|-----------|-------------|-----------|-----------|
|        | Var.          | Blocs  | Rés.  |       |        |           |             |           |           |
| 1      | 232,50        | 112,19 | 27,55 | 8,44  | 0,0002 | 151       | 6,61        | 88,23     | 4         |
| 2      | 280,02        | 66,32  | 48,57 | 5,77  | 0,0019 | 106       | 8,78        | 90,06     | 4         |
| 3      | 181,20        | 81,23  | 19,13 | 9,47  | 0,0001 | 154       | 5,51        | 87,24     | 3 4       |
| 4      | 328,04        | 115,96 | 19,74 | 16,62 | 0,0000 | 181       | 5,60        | 83,48     | 3 4       |
| 5      | 185,28        | 44,53  | 42,39 | 4,37  | 0,0075 | 101       | 8,20        | 87,14     | 3 4       |
| 6      | 258,86        | 53,14  | 36,17 | 7,16  | 0,0006 | 108       | 7,58        | 85,61     | 3 4       |
| 7      | 220,63        | 89,93  | 27,22 | 8,11  | 0,0003 | 138       | 6,57        | 86,35     | 3 4       |
| 8      | 291,53        | 95,24  | 15,39 | 18,95 | 0,0000 | 187       | 4,94        | 83,16     | 2 3 4     |
| 9      | 154,89        | 84,71  | 27,86 | 5,56  | 0,0023 | 134       | 6,65        | 88,79     | 4         |
| 10     | 155,59        | 52,14  | 25,74 | 6,04  | 0,0015 | 117       | 6,39        | 86,56     | 3 4       |

On peut notamment constater que, pour ces 10 simulations, les valeurs  $F$  varient dans un rapport de plus de 1 à 4, tandis que les plus petites différences significatives varient dans un rapport de 1 à presque 2. De même, il est intéressant d'observer que la variété 4 apparaît toujours comme significativement supérieure à la variété témoin, que la variété 3 l'est très fréquemment, et que la variété 2 ne l'est que de façon relativement exceptionnelle.

De tels résultats, relatifs à un petit nombre de simulations, doivent évidemment être interprétés avec prudence. Ils pourraient être précisés en effectuant un plus grand nombre de simulations, ce qui ne pose aucun problème.

Dans un cas relativement simple comme celui-ci, la simulation pourrait d'ailleurs être remplacée par la recherche de valeurs théoriques, mais nous pensons que quelques valeurs numériques sont souvent plus parlantes pour les expérimentateurs,

que des moyennes et des écarts-types ou des erreurs standards déterminés sur des bases théoriques.

En particulier par exemple, les valeurs moyennes attendues des sommes des carrés des écarts pourraient être calculées à l'aide des formules relatives aux espérances mathématiques de ces caractéristiques [STAT2, § 10.3.6], de même que les paramètres des variables de FISHER-SNEDECOR pourraient être déterminés en fonction des distributions  $F$  non centrales [STAT1, § 6.10.3].

# Synthèse

## Généralités

Au cours de cette synthèse, nous souhaitons revenir sur certains éléments que nous avons exposés antérieurement, en en soulignant l'importance et, éventuellement, en donnant quelques compléments d'information. Nous envisageons successivement la planification des expériences, leur réalisation, l'analyse et l'interprétation de leurs résultats, ainsi que la rédaction de rapports et de publications, et la sauvegarde des données.

Certains logiciels statistiques, tels que Minitab et SAS, tendent à intégrer l'ensemble du processus expérimental, depuis la planification des expériences jusqu'à l'interprétation des résultats et la préparation des rapports. D'une manière générale, nous recommandons toutefois d'éviter d'être trop dépendant d'un logiciel ou d'une procédure donnée, quelles qu'en soient les qualités, au risque sinon d'utiliser parfois des méthodes inappropriées ou mal connues, ou de ne pas répondre exactement aux questions posées au départ.

D'autre part, il ne faut pas perdre de vue le fait que certains pays ou ensembles de pays ont défini des normes ou des règles de bonnes pratiques, qui peuvent être imposées à certains laboratoires ou à certains groupes de laboratoires ou centres de recherche (§ 1.2.3). Tel est le cas notamment pour l'Union européenne et les États-Unis d'Amérique, en particulier dans le domaine médical.

L'aspect contraignant de telles normes peut résulter du fait que seuls les laboratoires qui sont titulaires d'une accréditation officielle et qui respectent les normes imposées peuvent demander l'agrégation de médicaments, à usage humain ou vétérinaire, de produits phytosanitaires, etc.

## La planification des expériences

### Protocole expérimental

Le premier point à souligner, peut-être à la surprise de certains, est l'absolue nécessité d'une planification adéquate des expériences. Cette remarque pourra

paraître superflue aux chercheurs avertis, mais par contre, elle fera vraisemblablement l'unanimité des statisticiens praticiens qui, trop souvent, sont consultés a posteriori pour « réparer la casse », à l'issue d'expériences insuffisamment ou mal planifiées.

Cette remarque implique aussi que, si l'aide d'un statisticien ou de tout autre personne qualifiée en matière d'expérimentation doit être demandée, elle doit l'être très tôt, c'est-à-dire dès la planification, et non pas seulement en cours d'expérience ou au moment de l'analyse des résultats<sup>38</sup>.

Il faut rappeler également que le plan d'expérience ou le protocole expérimental devrait toujours être un document écrit (ou enregistré sur un support informatique), approuvé le cas échéant par les différentes personnes qui sont ou seront impliquées dans la planification et la réalisation de l'expérience.

Quant au contenu du plan d'expérience ou du protocole expérimental, nous l'avons défini comme étant constitué des six points suivants : les objectifs et les conditions de l'expérience, les facteurs et les traitements ou objets, les unités expérimentales, les observations, le dispositif expérimental, et un canevas de l'analyse des résultats.

Il est évident que ces différentes rubriques sont complémentaires, et qu'en pratique, elles sont très souvent étroitement liées les unes aux autres. En particulier, l'ordre de présentation que nous avons adopté au point de vue didactique ne doit pas être considéré comme intangible. Dans de nombreuses situations par exemple, le matériel expérimental ou éventuellement le personnel ou les moyens disponibles constituent les principaux facteurs limitants, de telle sorte que ces points doivent être envisagés avant ou au moment de définir les objectifs poursuivis, les facteurs à étudier, les traitements, etc.<sup>39</sup>.

### **Buts et conditions de l'expérience**

La définition du ou des buts et des conditions de l'expérience est un des points auxquels nous avons consacré le moins de place (chapitre 1), non pas parce que cet élément est d'une importance secondaire, bien au contraire, mais parce qu'il est difficile à traiter d'une manière générale.

Nous soulignons simplement ici la nécessité de toujours bien définir la population ou le domaine (région géographique par exemple) auquel on s'intéresse, l'ordre de priorité des différents objectifs (en cas d'objectifs multiples), et la place qu'occupe éventuellement l'expérience considérée dans un ensemble d'expériences ou dans un programme expérimental plus vaste.

---

<sup>38</sup> La collaboration entre statisticiens et scientifiques d'autres disciplines est l'objet d'une abondante littérature. On peut citer notamment, comme références générales, les ouvrages collectifs de HAND et EVERITT [1987], et RUSTAGI et WOLFE [1982], ainsi que les livres de CABRERA et McDUGALL [2002], et DERR [2000].

<sup>39</sup> Des informations complémentaires relatives aux différents sujets que nous abordons ici sont données notamment dans le dernier chapitre du livre de MEAD [1988].

La définition précise de ces différents éléments ou de certains d'entre eux au moins implique une bonne connaissance préalable des phénomènes étudiés, résultant d'une large étude bibliographique et éventuellement de l'organisation d'expériences ou d'enquêtes pilotes. Ces travaux préliminaires peuvent absorber sans inconvénient une partie substantielle (parfois un quart ou un tiers, sinon plus) des moyens disponibles pour l'ensemble du programme de recherche.

On peut noter en outre que, souvent, une définition précise de la procédure d'analyse des résultats conduit à une meilleure définition des objectifs mêmes de l'expérience. Une définition précise de la procédure d'analyse des résultats peut en effet amener l'expérimentateur à se poser des questions telles que : le but de l'expérience est-il d'effectuer un certain nombre de comparaisons particulières ou, au contraire, de rechercher un optimum ? Le cas échéant, quelles comparaisons particulières ? Le cas échéant aussi, quel(s) modèle(s) de régression, linéaire ou quadratique par exemple, y a-t-il lieu d'utiliser ?

### Facteurs et traitements ou objets

Nous avons par contre consacré une place importante à la question du choix des facteurs et du plan ou de la structure des traitements ou objets (chapitre 2). Les principales possibilités que nous avons envisagées sont résumées dans le tableau suivant et dans les quelques notes qui l'accompagnent.

#### Principales structures des objets et numéros des paragraphes correspondants.

|  |       |
|--|-------|
| Expériences à un facteur <sup>40</sup> .....               | 2.2   |
| Expériences à deux ou plusieurs facteurs                   |       |
| Expériences factorielles .....                             | 2.3.1 |
| Expériences factorielles complètes .....                   | 2.3.2 |
| Expériences factorielles fractionnaires <sup>41</sup> .... | 2.3.3 |
| Expériences non factorielles                               |       |
| Étude des surfaces de réponse <sup>42</sup> .....          | 2.4.1 |
| Étude des mélanges .....                                   | 2.4.2 |
| Plans optimaux .....                                       | 2.4.3 |

Les règles de conduite qui nous semblent devoir s'imposer ici sont, d'une part, de toujours définir un ensemble d'objets qui correspond bien à l'objectif ou aux objectifs préalablement fixés, et d'autre part, de s'en tenir en toute circonstance à des solutions aussi simples que possible. En outre, comme nous l'avons souligné dans l'introduction générale, il faut être attentif au fait de ne pas accorder une

<sup>3</sup> Y compris la notion de témoin.

<sup>4</sup> Y compris les plans de PLACKETT et BURMAN et l'approche TAGUCHI.

<sup>5</sup> Plans composites centrés, plans de BOX et BEHNKEN, plans de DOEHLERT, etc.

place exclusive ou excessive au choix des traitements ou des objets, au détriment du dispositif expérimental.

### Unités expérimentales

Au sujet des unités expérimentales, en plus de la diversité des situations et des principes généraux que nous avons évoqués (chapitre 3), nous insistons sur la nécessité d'être particulièrement attentif à la représentativité des unités choisies. Il est évident en effet que, pour répondre aux objectifs définis au départ, les unités expérimentales qui seront observées devront donner une image correcte de la ou des populations auxquelles on s'intéresse, du domaine qui est pris en considération, etc.

Nous avons aussi associé à la définition des unités expérimentales, la détermination des nombres d'observations ou de répétitions (§ 3.4). L'objectif poursuivi, en prévoyant diverses répétitions des mêmes objets, n'est pas seulement d'augmenter la précision ou la puissance des estimations ou des comparaisons qui doivent être réalisées (le plus souvent des estimations et des comparaisons de moyennes), mais également de fournir des estimations suffisamment précises de la variation résiduelle (ou, le cas échéant, des différentes sources de variation résiduelle).

À cet égard, nous considérons qu'un minimum de 10 degrés de liberté devrait être affecté autant que possible à toute estimation d'une variance résiduelle (ou d'une composante qui en tient lieu)<sup>6</sup>.

### Observations

En ce qui concerne les observations, nous n'ajoutons rien à ce qui a été dit au cours du bref chapitre 4, si ce n'est la nécessité d'être réaliste dans les prévisions qui sont faites au départ, en tenant compte notamment du nombre d'unités expérimentales et de la durée de l'expérience, par comparaison avec les moyens disponibles, en matière de personnel et de qualification du personnel, de possibilités d'analyse, etc.

### Dispositif expérimental

Comme pour la définition des facteurs et des objets, nous avons consacré une place importante aux différents dispositifs expérimentaux. Le tableau suivant rappelle les principaux cas qui ont été envisagés.

<sup>6</sup> La limite de 10 degrés de liberté peut être justifiée en considérant la longueur de l'intervalle de confiance de la variance résiduelle, la longueur de l'intervalle de confiance d'une moyenne ou d'une différence de moyennes, et les risques d'erreur relatifs aux comparaisons de moyennes (principalement le risque de deuxième espèce, c'est-à-dire la probabilité de ne pas mettre en évidence une différence qui est cependant bien réelle) [DAGNELIE, 2000]. En particulier, une simple consultation des tables des distributions  $\chi^2$  de PEARSON montre que, par comparaison avec le cas de 10 degrés de liberté, la longueur de l'intervalle de confiance d'une variance est plus que doublée quand on ne dispose que de cinq degrés de liberté, et multipliée par 7 ou par 23 quand on ne dispose que de trois ou de deux degrés de liberté (comme le prévoit cependant souvent l'étude des surfaces de réponse).

Principaux dispositifs expérimentaux et numéros  
des paragraphes correspondants<sup>7</sup>.

|   |       |                 |
|---|-------|-----------------|
| Expériences complètement aléatoires .....                                 | 5.1   | <i>5.4, 5.5</i> |
| Expériences en blocs aléatoires complets .....                            | 6.1   | <i>6.4, 6.5</i> |
| Expériences en parcelles divisées ( <i>split-plot</i> ) .....             | 7.1   | <i>7.4</i>      |
| Expériences en bandes croisées ( <i>split-block</i> ) .....               | 7.1.3 | <i>7.5</i>      |
| Expériences en carré latin .....  | 8.1.1 | <i>8.5</i>      |
| Expériences avec permutation des objets ( <i>cross-over</i> ) .....       | 8.1.2 | <i>8.6</i>      |
| Généralisations du carré latin et du <i>cross-over</i> <sup>8</sup> ..... | 8.4   |                 |
| Expériences en blocs aléatoires incomplets                                |       |                 |
| Expériences non factorielles <sup>9</sup> .....                           | 9.1   | <i>9.4, 9.5</i> |
| Expériences factorielles .....  | 10.1  | <i>10.4</i>     |

Toujours comme pour les facteurs et les objets, les recommandations les plus importantes peuvent être ici, d'une part, de choisir en toute circonstance un dispositif qui soit bien adapté aux conditions de l'expérience, et en particulier à la variabilité du matériel expérimental, et d'autre part, de s'en tenir dans toute la mesure du possible à des solutions simples.

Il faut également être attentif dans chaque cas à la randomisation des objets, et ne jamais sous-estimer l'importance des fluctuations aléatoires (ou des écarts résiduels), en évitant par-dessus tout de considérer a priori ces fluctuations ou ces écarts comme négligeables.

### Canevas de l'analyse des résultats

Dans l'optique d'un traitement statistique des résultats basé sur l'analyse de la variance, la présentation du schéma de l'analyse à réaliser, ainsi que nous l'avons fait aux paragraphes 7.2, 8.2, 9.2 et 10.2 notamment, s'impose évidemment en premier lieu. Ce schéma doit toutefois être complété par une définition précise du modèle d'analyse de la variance à utiliser, en indiquant quels sont les facteurs qui devront être considérés comme fixes et comme aléatoires, et quelles sont les comparaisons qui devront être effectuées.

Les informations relatives à l'analyse de la variance proprement dite doivent aussi être complétées par des indications précises relatives aux éventuelles méthodes subséquentes à appliquer (comparaisons particulières de moyennes, recherche de conditions optimales, etc.).

D'autres méthodes que l'analyse de la variance, dont les méthodes de régression, peuvent évidemment être utilisées, en particulier en ce qui concerne les facteurs quantitatifs (§ 5.2.2°).

<sup>7</sup> Les numéros de paragraphes qui figurent en italiques concernent les exemples.

<sup>8</sup> Carré gréco-latin, carré latin magique, etc.

<sup>9</sup> Blocs incomplets équilibrés, réseaux carrés équilibrés, carrés latins incomplets, blocs incomplets partiellement équilibrés, etc.

Dans la ligne de ce qui a été dit au paragraphe 12.9, la simulation de résultats d'expériences peut constituer un ultime contrôle, non seulement de la procédure envisagée en ce qui concerne l'analyse des résultats, mais aussi de l'adéquation de l'ensemble du protocole, quant aux objectifs de l'expérience, au choix des objets, au choix du dispositif expérimental, etc.

La simulation, ou l'étude de la puissance des tests, peut parfois conduire aussi à la conclusion qu'il est préférable de renoncer à réaliser une expérience, dans la mesure où on peut être amené à mettre en évidence dans certains cas la qualité manifestement insuffisante des résultats qu'on peut espérer obtenir.

## La réalisation des expériences

### Mise en route et conduite des expériences

En ce qui concerne la réalisation de l'expérience, le premier point qui doit être souligné est l'obligation de toujours respecter scrupuleusement le protocole expérimental ou, si on est obligé de s'en écarter, de noter de façon précise, en les justifiant, les modifications qui y sont apportées.

En particulier, lors de la mise en route de l'expérience, il y a lieu d'être très attentif, le cas échéant, à la délimitation exacte des parcelles, à la formation des lots d'animaux, etc., ainsi qu'à l'application correcte des différents traitements, conformément au protocole expérimental.

En cours d'expérience, l'élément essentiel est la surveillance constante de l'évolution de la situation. Il s'agit autant du contrôle éventuel des traitements (maintien de certaines alimentations ou de certaines températures ou pressions, par exemple), que de l'enregistrement de toutes les anomalies qui pourraient être observées (maladies, dégâts, pannes, etc.).

### Collecte des données

En cours et en fin d'expérience (et éventuellement déjà avant et au moment de la mise en route de l'expérience), il y a lieu d'être particulièrement méticuleux quant à la collecte des données, essentiellement dans l'optique d'en assurer une bonne homogénéité ou une grande reproductibilité. Ceci implique notamment une formation adéquate du personnel, un réglage ou un calibrage constant des appareils de mesure, une définition précise des observations visuelles ou sensorielles à réaliser, etc.

Dans l'optique de faciliter l'enregistrement des données et d'éviter au maximum les erreurs grossières, nous attirons aussi l'attention sur l'utilité de préparer des formulaires ou des grilles d'enregistrement et sur la nécessité de contrôler toutes les manipulations ou transcriptions éventuelles des données.

Enfin, il est bon d'effectuer déjà au moment de la collecte des données un premier examen critique de celles-ci, en faisant éventuellement appel à une ou des personnes compétentes autres que celles qui ont procédé aux observations<sup>10</sup>.

## L'analyse et l'interprétation des résultats

### Analyse des résultats

Comme nous l'avons montré par la présentation détaillée d'exemples, l'analyse ou le traitement des observations ou des résultats comporte souvent trois phases successives, à savoir un examen préliminaire des données, l'analyse de la variance ou le recours à toute autre méthode principale d'analyse, et l'application de méthodes complémentaires. Parmi les points importants à prendre en considération, on peut citer la détection d'éventuelles valeurs aberrantes, le contrôle des conditions d'application des méthodes d'analyse qui sont employées et, en fonction des besoins, l'utilisation éventuelle de transformations de variables.

Nous ne saurions trop insister aussi sur la nécessité de n'utiliser que des méthodes et procédures qui sont bien connues<sup>11</sup>.

### Interprétation des résultats

En ce qui concerne l'interprétation des résultats, le premier point qui s'impose est évidemment de chercher à répondre de façon précise aux questions qui ont été posées au départ.

En particulier, il faut éviter la tentation de soulever en cours de route de nouvelles questions et de vouloir y répondre immédiatement. Vouloir vérifier une hypothèse qui est suggérée par un ensemble de données en se basant sur les mêmes données est en effet une procédure extrêmement dangereuse.

On peut ajouter également que « répondre de façon précise aux questions posées au départ » implique que toutes les estimations (de moyennes ou de différences de moyennes notamment) devraient être assorties d'erreurs standards, de limites de confiance, ou d'autres caractéristiques qui en expriment le degré de fiabilité.

---

<sup>10</sup> Nous avons signalé dans l'introduction générale que certains ouvrages, dont celui de DYKE [1988] en ce qui concerne les expériences en champ, étaient plus orientés vers les aspects pratiques de l'expérimentation. On peut mentionner aussi les manuels et les notes techniques qui sont publiés par certains organismes internationaux, telle que la FAO (Organisation des Nations Unies pour l'Alimentation et l'Agriculture) [FAO, 1995], et par certains instituts de recherche, tel que l'Institut technique (français) des Céréales et des Fourrages (actuellement ARVALIS) [ITCF, 1991, 2002].

<sup>11</sup> D'autres informations générales relatives à l'analyse des résultats peuvent être trouvées dans certains des ouvrages que nous avons cités au cours de l'introduction générale, de même que dans ceux qui sont mentionnés au début de « STAT1 » et « STAT2 ». On peut y ajouter divers articles, tels que ceux de CHATFIELD [1991] et PREECE [1987].

## Et puis encore . . .

### Rapports et publications

Deux points nous semblent devoir retenir l'attention, après la réalisation d'une expérience et l'interprétation de ses résultats. Il s'agit, d'une part, de la préparation de rapports et éventuellement de publications scientifiques, et d'autre part, de la sauvegarde des données.

Les rapports et les publications scientifiques ne sont pas de la même nature, dans la mesure notamment où les premiers peuvent en général être plus détaillés que les secondes. Mais les uns et les autres ont des exigences communes, entre autres d'honnêteté et de clarté.

Les rapports et les publications doivent tout d'abord faire état correctement des objectifs des expériences et des points essentiels du protocole expérimental, ainsi que des modifications qui y auraient été apportées et de leur justification. Les rapports peuvent aussi reproduire, éventuellement en annexe, la version intégrale du protocole expérimental.

Les rapports et les publications doivent contenir en outre des informations suffisamment détaillées au sujet du déroulement des expériences, en particulier en ce qui concerne les difficultés ou les problèmes qui auraient été rencontrés, au sujet des résultats obtenus et au sujet de l'analyse de ces résultats. Les rapports peuvent être plus complets encore, par exemple en reprenant le détail des observations et des analyses réalisées. Et dans le cas des publications, des informations complémentaires, dont éventuellement l'ensemble des données récoltées, peuvent être diffusées par internet<sup>12</sup>.

Enfin, les conclusions doivent être précises et présentées de manière tout à fait objective. Elles peuvent avantageusement être complétées par des suggestions ou des recommandations quant à la suite du programme d'expérimentation ou de recherche.

À tous égards, il y a lieu d'être particulièrement attentif à des « détails » tels que la qualité de la présentation et de la rédaction, l'utilisation de termes simples, aisément compréhensibles pour l'ensemble des lecteurs potentiels, la qualité des tableaux et des figures ou des graphiques, l'utilisation raisonnable de chiffres significatifs (rarement plus de trois ou quatre chiffres), et la mention des unités de mesure ou des unités dans lesquelles sont exprimés les différents résultats<sup>13</sup>.

---

<sup>12</sup> Certaines revues exigent que les données qui ont servi de base aux articles publiés, et parfois aussi les codes utilisés au cours de l'analyse des résultats, soient rendus publics ou soient déposés auprès d'un organisme agréé, afin notamment que ces informations puissent être consultées en cas de contestation.

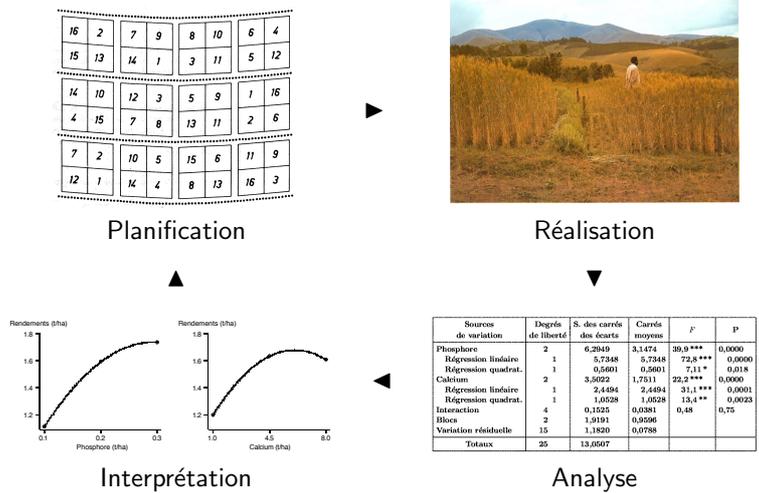
<sup>13</sup> De nombreux ouvrages sont consacrés à la rédaction de rapports et de publications, et en particulier à la présentation des résultats d'expériences. On peut citer à ce propos le livre de LANG et SECIC [2006], et les articles de FINNEY [1993, 1995] et RILEY [1994, 2001].

**Sauvegarde des données**

La sauvegarde des données nous semble devoir constituer la dernière obligation qui s'impose en toutes circonstances à l'expérimentateur. Nous pensons en fait, autant que possible, à une sauvegarde intégrale des données initiales, sans aucune réduction sous forme de moyennes par exemple et sans aucune transformation. De plus, nous pensons à une sauvegarde qui ne soit pas seulement immédiate, mais aussi permanente, de manière à être indépendante notamment de tout changement ultérieur de matériel informatique ou de logiciel.

Les données initiales doivent rester disponibles non seulement pour pouvoir réaliser éventuellement certaines études complémentaires, mais aussi en vue de servir de base, le cas échéant, à la planification de nouvelles expériences.

La formulation de suggestions ou de recommandations relatives à l'organisation d'expériences futures et la possibilité d'utiliser à cette fin des données existantes nous amènent ainsi à terminer cet ouvrage en « bouclant la boucle » que nous avons mise en évidence au départ, à savoir :





# Tables

## 1 Permutations aléatoires de 10, 20 et 50 nombres

### 1.1 Permutations aléatoires des nombres de 1 à 10

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|
| 2 | 7  | 4  | 10 | 8  | 6  | 5  | 9  | 1  | 3  | 1  | 9  | 3  | 10 | 6  | 4 | 7  | 8  | 5  | 2  |
| 3 | 4  | 6  | 5  | 8  | 2  | 9  | 1  | 10 | 7  | 10 | 5  | 7  | 9  | 1  | 3 | 2  | 8  | 4  | 6  |
| 6 | 5  | 10 | 9  | 4  | 1  | 7  | 2  | 3  | 8  | 3  | 8  | 6  | 10 | 5  | 7 | 4  | 1  | 2  | 9  |
| 2 | 6  | 5  | 8  | 3  | 9  | 4  | 10 | 1  | 7  | 10 | 1  | 4  | 2  | 6  | 7 | 3  | 5  | 8  | 9  |
| 6 | 9  | 10 | 2  | 4  | 3  | 5  | 1  | 8  | 7  | 7  | 9  | 3  | 6  | 8  | 1 | 5  | 2  | 10 | 4  |
| 3 | 10 | 1  | 9  | 7  | 4  | 6  | 2  | 5  | 8  | 5  | 10 | 3  | 4  | 2  | 9 | 8  | 7  | 1  | 6  |
| 7 | 5  | 9  | 6  | 3  | 4  | 2  | 10 | 8  | 1  | 7  | 8  | 10 | 6  | 1  | 4 | 2  | 9  | 3  | 5  |
| 1 | 5  | 2  | 4  | 3  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 4  | 1  | 3  | 8  | 10 | 2 | 7  | 6  | 9  | 5  |
| 7 | 1  | 5  | 9  | 2  | 8  | 4  | 10 | 6  | 3  | 3  | 10 | 4  | 8  | 7  | 5 | 2  | 9  | 6  | 1  |
| 2 | 5  | 1  | 9  | 4  | 6  | 3  | 8  | 10 | 7  | 8  | 3  | 7  | 10 | 6  | 1 | 5  | 2  | 9  | 4  |
| 1 | 9  | 4  | 3  | 6  | 7  | 5  | 2  | 10 | 8  | 1  | 6  | 2  | 4  | 8  | 5 | 10 | 3  | 9  | 7  |
| 5 | 6  | 8  | 3  | 7  | 1  | 2  | 4  | 9  | 10 | 6  | 4  | 3  | 8  | 7  | 5 | 1  | 9  | 10 | 2  |
| 2 | 5  | 8  | 6  | 9  | 1  | 4  | 7  | 3  | 10 | 3  | 10 | 5  | 7  | 2  | 6 | 8  | 1  | 4  | 9  |
| 9 | 1  | 8  | 6  | 2  | 7  | 3  | 4  | 10 | 5  | 5  | 4  | 10 | 8  | 3  | 6 | 1  | 2  | 7  | 9  |
| 2 | 3  | 5  | 10 | 8  | 9  | 4  | 1  | 7  | 6  | 8  | 5  | 3  | 1  | 10 | 4 | 2  | 7  | 6  | 9  |
| 1 | 5  | 10 | 6  | 3  | 9  | 8  | 4  | 2  | 7  | 2  | 5  | 9  | 8  | 4  | 7 | 3  | 1  | 6  | 10 |
| 8 | 5  | 10 | 1  | 3  | 2  | 9  | 7  | 6  | 4  | 2  | 9  | 6  | 8  | 4  | 7 | 10 | 3  | 5  | 1  |
| 9 | 2  | 5  | 1  | 4  | 8  | 10 | 3  | 7  | 6  | 9  | 7  | 1  | 5  | 3  | 2 | 4  | 10 | 8  | 6  |
| 1 | 3  | 4  | 5  | 10 | 6  | 9  | 2  | 7  | 8  | 4  | 5  | 1  | 3  | 10 | 9 | 6  | 2  | 7  | 8  |
| 2 | 9  | 8  | 3  | 10 | 5  | 4  | 7  | 1  | 6  | 3  | 4  | 1  | 8  | 2  | 7 | 5  | 6  | 10 | 9  |
| 5 | 9  | 10 | 7  | 3  | 6  | 2  | 8  | 4  | 1  | 1  | 10 | 7  | 5  | 4  | 8 | 3  | 6  | 9  | 2  |
| 9 | 6  | 3  | 10 | 1  | 7  | 5  | 8  | 4  | 2  | 10 | 5  | 6  | 3  | 9  | 8 | 2  | 7  | 4  | 1  |
| 4 | 9  | 10 | 5  | 7  | 6  | 3  | 1  | 2  | 8  | 3  | 6  | 10 | 1  | 2  | 7 | 4  | 8  | 5  | 9  |
| 2 | 4  | 7  | 1  | 8  | 10 | 3  | 6  | 9  | 5  | 4  | 3  | 5  | 1  | 10 | 7 | 2  | 9  | 8  | 6  |
| 6 | 9  | 7  | 4  | 1  | 5  | 10 | 2  | 3  | 8  | 8  | 4  | 5  | 2  | 10 | 7 | 3  | 1  | 9  | 6  |
| 1 | 5  | 9  | 7  | 8  | 4  | 3  | 6  | 2  | 10 | 6  | 3  | 1  | 9  | 8  | 5 | 10 | 2  | 4  | 7  |

## 1.2 Permutations aléatoires des nombres de 1 à 20

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 13 | 1  | 15 | 18 | 14 | 7  | 5  | 8  | 19 | 3  | 7  | 20 | 8  | 1  | 18 | 12 | 13 | 4  | 6  | 3  |
| 2  | 10 | 4  | 16 | 11 | 6  | 20 | 9  | 12 | 17 | 19 | 9  | 10 | 2  | 11 | 14 | 16 | 15 | 5  | 17 |
| 13 | 20 | 18 | 9  | 6  | 15 | 7  | 14 | 17 | 12 | 19 | 3  | 7  | 16 | 10 | 11 | 15 | 20 | 6  | 12 |
| 16 | 5  | 4  | 1  | 8  | 3  | 10 | 2  | 19 | 11 | 2  | 1  | 4  | 9  | 18 | 8  | 14 | 17 | 5  | 13 |
| 1  | 11 | 4  | 18 | 12 | 6  | 8  | 5  | 14 | 17 | 12 | 19 | 11 | 18 | 4  | 20 | 15 | 3  | 17 | 2  |
| 7  | 2  | 15 | 13 | 10 | 9  | 3  | 16 | 20 | 19 | 6  | 8  | 16 | 1  | 13 | 10 | 9  | 7  | 14 | 5  |
| 7  | 18 | 3  | 2  | 1  | 16 | 15 | 6  | 4  | 11 | 6  | 11 | 20 | 4  | 8  | 13 | 2  | 7  | 15 | 19 |
| 12 | 20 | 9  | 13 | 8  | 10 | 17 | 5  | 19 | 14 | 16 | 1  | 10 | 18 | 17 | 3  | 9  | 5  | 14 | 12 |
| 4  | 16 | 14 | 3  | 17 | 8  | 11 | 19 | 1  | 18 | 14 | 20 | 4  | 15 | 11 | 5  | 9  | 19 | 16 | 7  |
| 2  | 10 | 13 | 9  | 5  | 12 | 20 | 6  | 7  | 15 | 6  | 1  | 3  | 2  | 12 | 18 | 17 | 10 | 13 | 8  |
| 15 | 11 | 19 | 12 | 7  | 2  | 20 | 3  | 9  | 17 | 17 | 16 | 15 | 7  | 11 | 20 | 1  | 12 | 19 | 14 |
| 5  | 8  | 13 | 4  | 6  | 16 | 18 | 10 | 14 | 1  | 3  | 9  | 8  | 18 | 5  | 4  | 10 | 6  | 13 | 2  |
| 10 | 19 | 8  | 17 | 13 | 18 | 1  | 4  | 11 | 7  | 19 | 6  | 13 | 15 | 20 | 17 | 12 | 1  | 2  | 11 |
| 12 | 9  | 6  | 3  | 2  | 5  | 16 | 14 | 20 | 15 | 7  | 5  | 16 | 18 | 4  | 14 | 9  | 10 | 3  | 8  |
| 10 | 1  | 11 | 6  | 7  | 18 | 13 | 9  | 17 | 4  | 14 | 9  | 1  | 3  | 19 | 16 | 6  | 12 | 8  | 13 |
| 14 | 16 | 5  | 8  | 20 | 15 | 12 | 19 | 3  | 2  | 11 | 4  | 5  | 17 | 15 | 10 | 7  | 18 | 20 | 2  |
| 12 | 6  | 1  | 9  | 16 | 19 | 10 | 18 | 2  | 13 | 14 | 5  | 3  | 7  | 20 | 15 | 6  | 11 | 8  | 2  |
| 7  | 3  | 4  | 14 | 11 | 8  | 5  | 15 | 20 | 17 | 13 | 17 | 12 | 4  | 9  | 19 | 10 | 16 | 18 | 1  |
| 15 | 5  | 13 | 19 | 10 | 4  | 20 | 7  | 1  | 6  | 4  | 2  | 16 | 11 | 14 | 10 | 5  | 1  | 7  | 3  |
| 16 | 18 | 8  | 17 | 3  | 14 | 11 | 9  | 2  | 12 | 12 | 8  | 13 | 18 | 9  | 15 | 20 | 6  | 19 | 17 |
| 1  | 15 | 17 | 12 | 20 | 11 | 19 | 18 | 3  | 16 | 4  | 16 | 15 | 18 | 5  | 19 | 12 | 20 | 7  | 11 |
| 8  | 13 | 4  | 2  | 7  | 5  | 10 | 14 | 6  | 9  | 14 | 10 | 17 | 9  | 6  | 2  | 13 | 1  | 8  | 3  |
| 2  | 9  | 17 | 15 | 6  | 3  | 5  | 10 | 14 | 7  | 13 | 17 | 11 | 20 | 9  | 2  | 4  | 5  | 6  | 3  |
| 18 | 20 | 16 | 19 | 12 | 13 | 4  | 1  | 11 | 8  | 7  | 18 | 15 | 14 | 19 | 10 | 16 | 1  | 12 | 8  |
| 11 | 8  | 20 | 18 | 5  | 7  | 2  | 1  | 13 | 6  | 12 | 15 | 4  | 9  | 17 | 2  | 20 | 6  | 10 | 16 |
| 19 | 16 | 17 | 10 | 9  | 3  | 4  | 14 | 12 | 15 | 8  | 3  | 13 | 11 | 5  | 19 | 18 | 7  | 14 | 1  |
| 8  | 15 | 16 | 5  | 1  | 13 | 14 | 7  | 19 | 18 | 13 | 2  | 5  | 16 | 12 | 6  | 15 | 18 | 3  | 10 |
| 17 | 10 | 9  | 3  | 20 | 4  | 2  | 11 | 6  | 12 | 8  | 20 | 1  | 9  | 14 | 4  | 19 | 17 | 11 | 7  |
| 5  | 4  | 7  | 18 | 17 | 1  | 20 | 10 | 14 | 6  | 4  | 19 | 2  | 14 | 20 | 18 | 13 | 15 | 3  | 17 |
| 9  | 12 | 3  | 13 | 19 | 11 | 2  | 15 | 8  | 16 | 11 | 10 | 1  | 6  | 9  | 5  | 12 | 16 | 7  | 8  |
| 5  | 13 | 16 | 11 | 1  | 7  | 4  | 19 | 15 | 18 | 5  | 4  | 18 | 13 | 9  | 17 | 1  | 10 | 8  | 3  |
| 10 | 12 | 6  | 2  | 14 | 8  | 9  | 17 | 3  | 20 | 6  | 16 | 11 | 2  | 12 | 19 | 20 | 15 | 7  | 14 |
| 20 | 18 | 6  | 7  | 10 | 4  | 2  | 15 | 13 | 17 | 19 | 16 | 12 | 5  | 18 | 2  | 13 | 14 | 4  | 11 |
| 19 | 11 | 9  | 5  | 3  | 16 | 1  | 12 | 14 | 8  | 8  | 17 | 15 | 9  | 6  | 7  | 3  | 1  | 20 | 10 |

## 1.3 Permutations aléatoires des nombres de 1 à 50

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 50 | 11 | 30 | 35 | 26 | 12 | 1  | 22 | 5  | 7  | 31 | 18 | 5  | 10 | 12 | 6  | 2  | 32 | 25 | 1  |
| 18 | 32 | 15 | 9  | 43 | 24 | 39 | 13 | 37 | 29 | 11 | 42 | 17 | 4  | 44 | 45 | 41 | 9  | 37 | 43 |
| 23 | 19 | 48 | 36 | 47 | 33 | 10 | 41 | 17 | 49 | 20 | 29 | 22 | 21 | 27 | 15 | 8  | 26 | 35 | 39 |
| 20 | 25 | 31 | 8  | 2  | 21 | 45 | 4  | 6  | 27 | 33 | 49 | 3  | 16 | 14 | 19 | 47 | 7  | 30 | 13 |
| 40 | 42 | 3  | 16 | 38 | 46 | 44 | 14 | 28 | 34 | 28 | 50 | 24 | 38 | 23 | 36 | 34 | 40 | 48 | 46 |
| 12 | 4  | 6  | 37 | 14 | 7  | 49 | 18 | 33 | 39 | 50 | 10 | 12 | 34 | 18 | 29 | 7  | 31 | 24 | 5  |
| 9  | 42 | 13 | 29 | 48 | 31 | 28 | 8  | 50 | 45 | 17 | 43 | 39 | 11 | 41 | 19 | 42 | 40 | 46 | 30 |
| 11 | 34 | 2  | 1  | 44 | 19 | 20 | 22 | 21 | 5  | 44 | 26 | 2  | 16 | 35 | 36 | 21 | 47 | 13 | 37 |
| 35 | 27 | 17 | 38 | 40 | 15 | 10 | 26 | 3  | 47 | 33 | 22 | 4  | 8  | 15 | 14 | 27 | 25 | 45 | 3  |
| 16 | 43 | 24 | 41 | 36 | 23 | 46 | 25 | 32 | 30 | 32 | 28 | 38 | 1  | 9  | 20 | 23 | 49 | 6  | 48 |
| 29 | 11 | 37 | 2  | 40 | 15 | 27 | 13 | 17 | 6  | 22 | 5  | 28 | 41 | 35 | 17 | 48 | 11 | 25 | 40 |
| 22 | 44 | 45 | 34 | 41 | 8  | 28 | 10 | 38 | 23 | 34 | 26 | 43 | 4  | 32 | 2  | 46 | 8  | 13 | 42 |
| 19 | 47 | 46 | 25 | 42 | 16 | 18 | 39 | 26 | 43 | 18 | 15 | 24 | 19 | 10 | 30 | 3  | 45 | 37 | 1  |
| 5  | 7  | 50 | 4  | 24 | 9  | 21 | 12 | 3  | 49 | 38 | 31 | 33 | 50 | 27 | 21 | 9  | 44 | 49 | 29 |
| 14 | 36 | 35 | 48 | 33 | 32 | 31 | 20 | 1  | 30 | 12 | 36 | 23 | 20 | 7  | 16 | 14 | 39 | 6  | 47 |
| 32 | 8  | 2  | 26 | 46 | 13 | 43 | 34 | 42 | 31 | 48 | 6  | 37 | 44 | 2  | 35 | 4  | 24 | 50 | 39 |
| 24 | 23 | 49 | 35 | 39 | 18 | 30 | 47 | 45 | 1  | 29 | 21 | 47 | 32 | 31 | 38 | 34 | 46 | 9  | 16 |
| 22 | 38 | 28 | 19 | 4  | 17 | 3  | 50 | 36 | 25 | 5  | 41 | 13 | 10 | 12 | 14 | 43 | 25 | 7  | 27 |
| 11 | 29 | 5  | 14 | 6  | 33 | 12 | 21 | 44 | 15 | 42 | 40 | 36 | 28 | 33 | 1  | 11 | 3  | 20 | 18 |
| 48 | 40 | 41 | 9  | 10 | 27 | 7  | 20 | 37 | 16 | 22 | 26 | 45 | 8  | 17 | 19 | 23 | 30 | 15 | 49 |
| 17 | 7  | 32 | 13 | 2  | 9  | 33 | 25 | 6  | 48 | 43 | 11 | 2  | 23 | 48 | 5  | 18 | 13 | 39 | 35 |
| 40 | 41 | 50 | 20 | 24 | 8  | 23 | 44 | 3  | 18 | 47 | 30 | 37 | 46 | 17 | 42 | 36 | 8  | 9  | 1  |
| 26 | 19 | 38 | 30 | 4  | 5  | 22 | 46 | 14 | 35 | 29 | 28 | 16 | 6  | 21 | 12 | 10 | 24 | 19 | 4  |
| 34 | 37 | 31 | 15 | 12 | 42 | 36 | 45 | 43 | 27 | 40 | 33 | 32 | 45 | 14 | 31 | 50 | 38 | 27 | 3  |
| 47 | 49 | 10 | 21 | 29 | 1  | 16 | 39 | 11 | 28 | 49 | 15 | 22 | 41 | 26 | 44 | 25 | 7  | 34 | 20 |
| 3  | 43 | 21 | 20 | 25 | 28 | 9  | 39 | 37 | 41 | 9  | 26 | 8  | 24 | 30 | 23 | 11 | 45 | 43 | 1  |
| 15 | 22 | 33 | 31 | 48 | 46 | 16 | 38 | 17 | 2  | 18 | 16 | 49 | 48 | 34 | 38 | 12 | 41 | 15 | 10 |
| 47 | 12 | 40 | 49 | 24 | 42 | 23 | 29 | 27 | 50 | 4  | 39 | 40 | 47 | 29 | 42 | 27 | 37 | 6  | 7  |
| 30 | 4  | 7  | 35 | 36 | 26 | 6  | 34 | 1  | 10 | 36 | 44 | 25 | 32 | 46 | 17 | 50 | 21 | 5  | 33 |
| 11 | 45 | 32 | 19 | 8  | 18 | 44 | 13 | 5  | 14 | 20 | 14 | 22 | 35 | 3  | 19 | 2  | 13 | 28 | 31 |
| 37 | 25 | 30 | 8  | 32 | 2  | 27 | 39 | 43 | 12 | 3  | 1  | 46 | 9  | 17 | 23 | 20 | 40 | 8  | 47 |
| 19 | 40 | 21 | 17 | 10 | 14 | 4  | 9  | 42 | 49 | 11 | 34 | 35 | 31 | 28 | 30 | 41 | 25 | 18 | 43 |
| 48 | 50 | 26 | 41 | 5  | 1  | 15 | 20 | 24 | 3  | 24 | 27 | 49 | 36 | 19 | 33 | 38 | 10 | 50 | 32 |
| 7  | 44 | 29 | 47 | 11 | 45 | 46 | 38 | 34 | 16 | 5  | 13 | 26 | 29 | 22 | 45 | 48 | 44 | 6  | 15 |
| 18 | 6  | 23 | 28 | 31 | 35 | 22 | 13 | 33 | 36 | 12 | 21 | 4  | 14 | 16 | 39 | 7  | 37 | 42 | 2  |
| 10 | 26 | 33 | 28 | 9  | 21 | 47 | 13 | 29 | 2  | 15 | 31 | 9  | 34 | 16 | 50 | 6  | 48 | 39 | 26 |
| 7  | 16 | 37 | 24 | 15 | 50 | 25 | 27 | 44 | 49 | 8  | 1  | 10 | 44 | 40 | 38 | 14 | 5  | 19 | 28 |
| 39 | 8  | 22 | 30 | 40 | 34 | 42 | 14 | 3  | 11 | 2  | 32 | 29 | 46 | 20 | 3  | 11 | 30 | 7  | 4  |
| 1  | 36 | 5  | 38 | 4  | 48 | 6  | 32 | 41 | 18 | 36 | 47 | 12 | 42 | 35 | 18 | 25 | 37 | 33 | 41 |
| 46 | 45 | 12 | 31 | 17 | 35 | 43 | 20 | 23 | 19 | 49 | 24 | 17 | 45 | 21 | 23 | 22 | 43 | 13 | 27 |

## 2 Carrés latins de base

### 2.1 Séries complètes de carrés latins de base

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |
| 4 | 3 | 1 | 2 |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

### 2.2 Exemples de carrés latins de base

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 5 | 1 | 4 |
| 3 | 4 | 2 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 1 | 3 | 2 |
| 5 | 1 | 4 | 2 | 3 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 5 | 3 | 4 |
| 3 | 5 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 5 | 1 |
| 5 | 4 | 1 | 2 | 3 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 5 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 5 | 4 |
| 4 | 3 | 5 | 2 | 1 |
| 5 | 4 | 1 | 3 | 2 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 3 | 6 | 5 | 1 | 4 |
| 3 | 6 | 2 | 1 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 6 | 3 |
| 5 | 1 | 4 | 6 | 3 | 2 |
| 6 | 4 | 5 | 3 | 2 | 1 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 3 | 1 | 6 | 4 | 5 |
| 3 | 1 | 2 | 5 | 6 | 4 |
| 4 | 6 | 5 | 2 | 1 | 3 |
| 5 | 4 | 6 | 1 | 3 | 2 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 7 | 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7 | 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

# Index bibliographique

Pour rappel, les renvois [STAT1, ...] et [STAT2, ...] concernent les livres suivants :

STAT1 = DAGNELIE, 2007 (*Statistique Théorique et Appliquée, Tome 1*);

STAT2 = DAGNELIE, 2011 (*Statistique Théorique et Appliquée, Tome 2*).

Les différents sites web qui sont mentionnés ont été consultés  
en dernier lieu en janvier 2012.

Anonyme [1999]. ICH harmonised tripartite guideline : statistical principles for clinical trials. *Stat. Med.* **18** (15), 1905-1942.

Anonyme [2004]. *Référentiel des exigences des bonnes pratiques d'expérimentation (BPE) relatives à l'agrément pour la réalisation d'essais officiellement reconnus*. Paris, Ministère de l'Agriculture et de la Pêche, document PDF, <[http://agriculture.gouv.fr/IMG/pdf/referentiel\\_experimentation\\_nov2004.pdf](http://agriculture.gouv.fr/IMG/pdf/referentiel_experimentation_nov2004.pdf)>, 23 p.

Anonyme [2006]. *Guide to the classical and other long-term experiments, datasets and sample archive*. Harpenden (UK), Rothamsted Research, document PDF, <[www.rothamsted.ac.uk/resources/LongTermExperiments.pdf](http://www.rothamsted.ac.uk/resources/LongTermExperiments.pdf)>, 56 p.

## A

AASTVEIT H. [1983]. On the effect of correlation between plots in randomized block experiments. *Biom. J.* **25** (2), 129-153.

AASTVEIT A.H., MARTENS H. [1986]. ANOVA interactions interpreted by partial least squares regression. *Biometrics* **42** (4), 829-844.

ABOUKALAM M.A.F. [2005]. Quick, easy, and powerful analysis of unreplicated factorial designs. *Commun. Stat. Theory Methods* **34** (5), 1169-1175.

ADUGNA W., LABUSCHAGNE M.T. [2003]. Cluster and canonical variate analyses in multilocation trials of linseed. *J. Agric. Sci.* **140** (3), 297-304.

AHMED R., AKHTAR M. [2011]. Construction of neighbor-balanced designs in linear blocks. *Commun. Stat. Theory Methods* **40** (17), 3198-3205.

ALBERT P.S. [1999]. Longitudinal data analysis (repeated measures) in clinical trials. *Stat. Med.* **18** (13), 1707-1732.

ALEXIS J., ALEXIS P. [2000]. *Pratique industrielle des plans d'expériences – la qualité à moindre coût : l'approche TAGUCHI*. Paris, Association française de Normalisation, 276 p.

- ANDERSON-COOK C.M., BORROR C.M., MONTGOMERY D.C. [2009]. Response surface design evaluation and comparison (with discussion). *J. Stat. Plan. Inference* **139** (2), 629-674.
- ANGELOPOULOS P., KOUKOUVINOS C. [2008]. Detecting active effects in unreplicated designs. *J. Appl. Stat.* **35** (3), 277-281.
- ANSIAUX J.R., GATHY P., FROMENT J. [1977]. Effets d'apports d'engrais minéraux sur des peuplements d'épicéas âgés de 25 à 30 ans. *Ann. Gembloux* **83** (3), 175-209.
- ANTOINE A., SKOURI M., RONDIA G., MATHLOUTHI M., RONDIA-DEKER A., DACHET P. [1976]. Le projet Ferme modèle et démonstrative de Frétissa et son évaluation à mi-parcours : ce qui a été fait, ce qui reste à faire. *Ann. Gembloux* **82** (3), 93-143.
- ANTONIADOU T., WALLACH D. [2000]. Evaluating decision rules for nitrogen fertilization. *Biometrics* **56** (2), 420-426.
- ARMITAGE P. [1995]. Before and after Bradford HILL : some trends in medical statistics. *J. R. Stat. Soc., Ser. A*, **158** (1), 143-153.
- ATKIN A.O.L., HAY L., LARSON R.G. [1977]. Construction of Knut VIK designs. *J. Stat. Plan. Inference* **1** (3), 289-297.
- ATKINSON A.C., DONEV A.N., TOBIAS R.D. [2007]. *Optimum experimental designs, with SAS*. Oxford (UK), University Press, 512 p.
- AZAÏS J.M. [1994]. Analyse de variance non orthogonale : l'exemple de SAS/GLM. *Rev. Stat. Appl.* **42** (2), 27-41.
- AZAÏS J.M., DENIS J.B., DHORNE T., KOBILINSKY A. [1990]. Neighbour analysis of plot experiments : a review of the different approaches. *Biom. Prazim.* **30** (1), 15-39.

**B**

- BAILEY R.A. [1985]. Restricted randomization versus blocking. *Int. Stat. Rev.* **53** (2), 171-182.
- BAILEY R.A. [1992]. Efficient semi-Latin squares. *Stat. Sin.* **2** (2), 413-437.
- BAILEY R.A., KUNERT J. [2006]. On optimal crossover designs when carryover effects are proportional to direct effects. *Biometrika* **93** (3), 613-625.
- BAR-HEN A. [2002]. Influence of missing data on compact designs for spacing experiments. *J. Appl. Stat.* **29** (8), 1229-1240.
- BARTLETT M.S. [1978]. Nearest neighbour models in the analysis of field experiments (with discussion). *J. R. Stat. Soc., Ser. B*, **40** (2), 147-174.
- BASFORD K.E., FEDERER W.T., DELACY I.H. [2004]. Mixed model formulations for multi-environment trials. *Agron. J.* **96** (1), 143-147.
- BATE S.T., JONES B. [2008]. A review of uniform cross-over designs. *J. Stat. Plan. Inference* **138** (2), 336-351.
- BECHHOFFER R.E., TAMHANE A.C. [1981]. Incomplete block designs for comparing treatments with a control : general theory. *Technometrics* **23** (1), 45-57.
- BECHHOFFER R.E., TAMHANE A.C. [1983]. Design of experiments for comparing treatments with a control : tables of optimal allocations of observations. *Technometrics* **25** (1), 87-95.

- BERGONZINI J.C., LEDOUX H. [1988]. Influence des corrélations intrablocs dans les dispositifs en blocs aléatoires équilibrés sur l'utilisation de certains tests  $F$  de l'analyse de la variance. *Biom. Praxim.* **28** (1), 15-25.
- BESAG J., HIGDON D. [1999]. Bayesian analysis of agricultural field experiments (with discussion). *J. R. Stat. Soc., Ser. B*, **61** (4), 691-746.
- BHATTI A.U. [2005]. Using geostatistics to find optimum plot size for field research experiments. *Commun. Soil Sci. Plant Anal.* **35** (15-16), 2299-2310.
- BISGAARD S. [1996]. A comparative analysis of the performance of TAGUCHI's linear graphs for the design of two-level fractional factorials. *Appl. Stat.* **45** (3), 311-322.
- BLOOM B.S. [1986]. Controlled studies in measuring the effectiveness of medical care : a historical perspective. *Int. J. Technol. Assess. Health Care* **2** (2), 299-310.
- BOFILL P., TORRAS C. [2004]. MBMUDs : a combinatorial extension of BIBDs showing good optimality behaviour. *J. Stat. Plan. Inference* **124** (1), 185-204.
- BORKOWSKI J.J., PIEPEL G.F. [2009]. Uniform designs for highly constrained mixture experiments. *J. Qual. Technol.* **41** (1), 35-47.
- BOSE M., STUFKEN J. [2007]. Optimal crossover designs when carryover effects are proportional to direct effects. *J. Stat. Plan. Inference* **137** (11), 3291-3302.
- BOSE R.C., CLATWORTHY W.H., SHRIKHANDE S.S. [1954]. *Tables of partially balanced designs with two associate classes*. Raleigh (NC), North Carolina State College, 255 p.
- BOSE R.C., SHRIKHANDE S.S., PARKER E.T. [1960]. Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of EULER's conjecture. *Can. J. Math.* **12**, 189-203.
- BOX G.E.P., BEHNKEN D.W. [1960]. Some new three level designs for the study of quantitative variables. *Technometrics* **2** (4), 455-475.
- BOX G.E.P., DRAPER N.R. [2007]. *Response surfaces, mixtures, and ridge analyses*. New York, Wiley, 857 p.
- BOX G.E.P., HUNTER J.S., HUNTER W.G. [2005]. *Statistics for experimenters : design, innovation, and discovery*. Hoboken (NJ), Wiley, 663 p.
- BOX G.E.P., WILSON K.B. [1951]. On the experimental attainment of optimum conditions (with discussion). *J. R. Stat. Soc., Ser. B*, **13** (1), 1-45.
- BOX J.F. [1978]. R.A. FISHER, *the life of a scientist*. New York, Wiley, 512 p.
- BOX J.F. [1980]. R.A. FISHER and the design of experiments, 1922-1926. *Am. Stat.* **34** (1), 1-7.
- BRAKEL J., MANIL P. [1965]. La fixation symbiotique de l'azote chez le haricot (*Phaseolus vulgaris* L.) : essais de bactérisation par *Rhizobium phaseoli*. *Bull. Inst. Agron. Stat. Rech. Gembloux* **33** (1), 3-25.
- BREWER A.C., MEAD R. [1986]. Continuous second order models of spatial variation with application to the efficiency of field crop experiments (with discussion). *J. R. Stat. Soc., Ser. A*, **149** (4), 314-348.
- BRIEN C.J., DEMÉTRIO C.G.B. [2009]. Formulating mixed models for experiments, including longitudinal experiments. *J. Agric. Biol. Environ. Stat.* **14** (3), 253-280.
- BROWN D., DAY S., HEMMINGS R., WRIGHT D. [2008]. Assessing the impact of ICH E9. *Pharm. Stat.* **7** (2), 77-87.

- BURTON A., ALTMAN D.G., ROYSTON P., HOLDER R.L. [2006]. The design of simulation studies in medical statistics. *Stat. Med.* **25** (24), 4279-4292.
- BUTLER N.A. [2001]. Optimal and orthogonal Latin hypercube designs for computer experiments. *Biometrika* **88** (3), 847-857.
- BUTLER N.A. [2005]. Supersaturated Latin hypercube designs. *Commun. Stat. Theory Methods* **34** (2), 417-428.

## C

- CABRERA J., MCDUGALL A. [2002]. *Statistical consulting*. New York, Springer, 390 p.
- CALIŃSKI T., CZAJKA S., KACZMAREK Z., LEJEUNE M. [1995a]. The application of factor analysis in interpreting results of a series of variety trials. I. Theory. *Biul. Oceny Odmian (Cultiv. Test. Bull.)* **26-27**, 7-22.
- CALIŃSKI T., CZAJKA S., KACZMAREK Z., LEJEUNE M. [1995b]. The application of factor analysis in interpreting results of a series of variety trials. II. Example. *Biul. Oceny Odmian (Cultiv. Test. Bull.)* **26-27**, 23-38.
- CHALONER K., VERDINELLI I. [1995]. Bayesian experimental design : a review. *Stat. Sci.* **10** (3), 273-304.
- CHAN B.S.P., ECCLESTON J.A. [2003]. On the construction of nearest-neighbour balanced row-column designs. *Aust. N. Z. J. Stat.* **45** (1), 97-106.
- CHANG M., CHOW S.C., PONG A. [2006]. Adaptive design in clinical research : issues, opportunities, and recommendations. *J. Biopharm. Stat.* **16** (3), 299-309.
- CHATFIELD C. [1991]. Avoiding statistical pitfalls (with discussion). *Stat. Sci.* **6** (3), 240-268.
- CHEN B.J., LI P.F., LIU M.Q., ZHANG R.C. [2006]. Some results on blocked regular 2-level fractional factorial designs with clear effects. *J. Stat. Plan. Inference* **136** (12), 4436-4449.
- CHEN J., SUN D.X., WU C.F.J. [1993]. A catalogue of two-level and three-level fractional factorial designs with small runs. *Int. Stat. Rev.* **61** (1), 131-145.
- CHEN X., WEI L. [2003]. A comparison of recent methods for the analysis of small-sample cross-over studies. *Stat. Med.* **22** (18), 2821-2833.
- CHEN X., ZHAO P.L., ZHANG J. [2002]. A note on ANOVA assumptions and robust analysis for a cross-over study. *Stat. Med.* **21** (10), 1377-1386.
- CHENG C.S., MUKERJEE R. [2003]. On regular-fractional factorial experiments in row-column designs. *J. Stat. Plan. Inference* **114** (1-2), 3-20.
- CHENG S.W., WU C.F.J. [2002]. Choice of optimal blocking schemes in two-level and three-level designs. *Technometrics* **44** (3), 269-277.
- CHIAO C.H., HAMADA M. [2001]. Analyzing experiments with correlated multiple responses. *J. Qual. Technol.* **33** (4), 451-465.
- CLATWORTHY W.H. [1973]. *Tables of two-associate-class partially balanced designs*. Washington, National Bureau of Standards.
- CLAUSTRIAUX J.J. [1977]. *Étude de la robustesse de l'analyse des résultats de dispositifs expérimentaux à répartition non conforme des objets*. Gembloux (Belgique), Faculté des Sciences agronomiques, 171 p.

- CLAUSTRIAUX J.J., IEMMA A.F. [1999]. *À propos des qualificatifs complet, orthogonal et équilibré en analyse de la variance*. Gembloux (Belgique), Faculté universitaire des Sciences agronomiques et Centre de Recherches agronomiques, 15 p.
- CLAUSTRIAUX J.J., ROUSSEAU G. [1974]. Analyse statistique de résultats d'essais à blanc. *Biom. Praxim.* **14** (1-2), 57-79.
- CLEAVER T.J., GREENWOOD D.J., WOOD J.T. [1970]. Systematically arranged fertilizer experiments. *J. Hortic. Sci.* **45**, 457-469.
- COCHRAN W.G. [1937]. A catalogue of uniformity trial data. *J. R. Stat. Soc., Suppl.* **4** (2), 233-253.
- COCHRAN W.G. [1976]. Early development of techniques in comparative experimentation. In : OWEN D.B. (ed.). *On the history of statistics and probability*. New York, Dekker, 3-25.
- COCHRAN W.G., COX G.M. [1950]. *Experimental designs*. New York, Wiley, 454 p.
- COCHRAN W.G., COX G.M. [1957]. *Experimental designs*. New York, Wiley, 617 p.
- COLBOURN C.J., DINITZ J.H. [2001]. Mutually orthogonal Latin squares : a brief survey of constructions. *J. Stat. Plan. Inference* **95** (1-2), 9-48.
- COLLINGS B.J. [1989]. Quick confounding. *Technometrics* **31** (1), 107-110.
- COLLOMBIER D. [1996]. *Plans d'expérience factoriels : construction et propriétés des fractions de plans*. Berlin, Springer, 194 p.
- COOK D.J., SACKETT D.L., SPITZER W.O. [1995]. Methodologic guidelines for systematic reviews of randomized controlled trials in health care evaluation from the Potsdam Consultation on Meta-analysis. *J. Clin. Epidemiol.* **48** (1), 167-171.
- COPELAND K.A.F., NELSON P.R. [2000]. Latin squares and two-level fractional factorial designs. *J. Qual. Technol.* **32** (4), 432-439.
- CORNELL J.A. [2002]. *Experiments with mixtures : designs, models, and the analysis of mixture data*. New York, Wiley, 680 p.
- CORNELL J.A., GORMAN J.W. [2003]. Two new mixture models : living with collinearity but removing its influence. *J. Qual. Technol.* **35** (1), 78-88.
- CORREA A.A., GRIMA P., TORT-MARTORELL X. [2009]. Experimentation order with good properties for  $2^k$  factorial designs. *J. Appl. Stat.* **36** (7), 743-754.
- CORSTEN L.C.A., DENIS J.B. [1990]. Structuring interaction in two-way tables by clustering. *Biometrics* **46** (1), 207-215.
- COX D.R. [1958]. *Planning of experiments*. New York, Wiley, 308 p.
- COX D.R. [2009]. Randomization in the design of experiments. *Int. Stat. Rev.* **77** (3), 415-429.
- COX G.M. [1950]. A survey of types of experimental designs. *Biometrics* **6**, 301-302.
- CRESSIE N.A.C. [1993]. *Statistics for spatial data*. New York, Wiley, 900 p.
- CRETTAZ DE ROTEN F., HELBLING J.M. [1996]. Données manquantes et aberrantes : le quotidien du statisticien analyste des données. *Rev. Stat. Appl.* **44** (2), 105-115.
- CRETTE DE PALLUEL F. [1788]. Mémoire sur les avantages et l'économie que procurent les racines employées à l'engrais des moutons à l'étable. *Mémoires d'Agriculture*, Trimestre d'été, 17-23.
- CRETTE DE PALLUEL F. [1790]. On the advantage and economy of feeding sheep in the house with roots. *Annals of Agriculture* **14**, 133-139.

- CUCHERAT M., BOISSEL J.P., LEIZOROVICZ A. [1997]. *Manuel pratique de méta-analyse des essais thérapeutiques*. Livre électronique, <[www.spc.univ-lyon1.fr/livrema/frame.htm](http://www.spc.univ-lyon1.fr/livrema/frame.htm)>, 386 p.
- CULLIS B.R., LILL W.J., FISHER J.A., READ B.J., GLEESON A.C. [1989]. A new procedure for the analysis of early generation variety trials. *Appl. Stat.* **38** (2), 361-375.
- CZITROM V. [1999]. One-factor-at-a-time versus designed experiments. *Am. Stat.* **53** (2), 126-131.
- D**
- DAGNELIE P. [1959]. Le carré latin magique : technique d'analyse de la variance. *Rev. Agric.* **12** (3), 233-242.
- DAGNELIE P. [1966]. La détermination et la comparaison des fumures optimales par la méthode des variantes systématiques et l'analyse statistique à plusieurs variables. *Bull. Rech. Agron. Gembloux* **1** (3), 394-409.
- DAGNELIE P. [1981]. *Principes d'expérimentation*. Gembloux (Belgique), Presses agronomiques de Gembloux, 182 p.
- DAGNELIE P. [1986]. *Analyse statistique à plusieurs variables*. Gembloux (Belgique), Presses agronomiques de Gembloux, 362 p.
- DAGNELIE P. [1987]. La méthode de PAPADAKIS en expérimentation agronomique : considérations historiques et bibliographiques. *Biom. Praxim.* **27** (2), 49-64.
- DAGNELIE P. [1989]. The method of PAPADAKIS in agricultural experimentation : an overview. *Biul. Oceny Odmian (Cultiv. Test. Bull.)* **21-22**, 111-122.
- DAGNELIE P. [2000]. La planification des expériences : choix des traitements et dispositif expérimental. *J. Soc. Fr. Stat.* **141** (1-2), 5-69, <[www.dagnelie.be/docpub/dagnelie-2000.pdf](http://www.dagnelie.be/docpub/dagnelie-2000.pdf)>.
- DAGNELIE P. [2007]. *Statistique théorique et appliquée. Tome 1. Statistique descriptive et bases de l'inférence statistique*. Bruxelles, De Boeck, 511 p.
- DAGNELIE P. [2008a]. Le plan d'expérience évolue... *Rev. MODULAD* **38**, 13-36, <[www.modulad.fr](http://www.modulad.fr)> et <[www.dagnelie.be/docpub/dagnelie-2008a.pdf](http://www.dagnelie.be/docpub/dagnelie-2008a.pdf)>.
- DAGNELIE P. [2008b]. De la régression simple et l'analyse de la variance aux modèles linéaires généralisés : synthèse et chronologie. *Rev. MODULAD* **39**, 107-136, <[www.modulad.fr](http://www.modulad.fr)> et <[www.dagnelie.be/docpub/dagnelie-2008c.pdf](http://www.dagnelie.be/docpub/dagnelie-2008c.pdf)>.
- DAGNELIE P. [2008c]. Avant le sudoku : le carré latin magique. *Rev. MODULAD* **39**, 172-175, <[www.modulad.fr](http://www.modulad.fr)> et <[www.dagnelie.be/docpub/dagnelie-2008d.pdf](http://www.dagnelie.be/docpub/dagnelie-2008d.pdf)>.
- DAGNELIE P. [2009]. *Principes d'expérimentation : photographies*. Document PDF, <[www.dagnelie.be](http://www.dagnelie.be)>, 20 p.
- DAGNELIE P. [2011]. *Statistique théorique et appliquée. Tome 2. Inférence statistique à une et à deux dimensions*. Bruxelles, De Boeck, 736 p.
- DAGNELIE P., PALM R., RONDEUX J., THILL A. [1999]. *Tables de cubage des arbres et des peuplements forestiers*. Gembloux (Belgique), Presses agronomiques de Gembloux, 128 p.
- DAVIES O.L. (ed.) [1954]. *The design and analysis of industrial experiments*. London, Oliver and Boyd, 636 p.
- DAVIS C.S. [2002]. *Statistical methods for the analysis of repeated measurements*. New York, Springer, 415 p.

- DAY S. [2006]. The development of clinical trials. *In* : MACHIN D., DAY S., GREEN S. (eds). *Textbook of clinical trials*. Chichester (UK), Wiley, document PDF, <[http://media.wiley.com/product\\_data/excerpt/42/04700101/0470010142.pdf](http://media.wiley.com/product_data/excerpt/42/04700101/0470010142.pdf)>, 11 p.
- DEAN A.M., VOSS D.T. [1999]. *Design and analysis of experiments*. New York, Springer, 740 p.
- DEL CASTILLO E., CAHYA S. [2001]. A tool for computing confidence regions on the stationary point of a response surface. *Am. Stat.* **55** (4), 358-365.
- DE LEÓN ADAMS G., GRIMA CINTAS P., TORT-MARTORELL LLABRÉS X. [2005]. Experimentation order in factorial designs with 8 or 16 runs. *J. Appl. Stat.* **32** (3), 297-313.
- DELVAUX A. [1992]. Les épreuves sensorielles. *Ann. Gembloux* **98** (2), 105-115.
- DEMIDENKO E. [2004]. *Mixed models : theory and applications*. New York, Wiley, 704 p.
- DENIS J.B. [1979]. Structuration de l'interaction. *Biom. Praxim.* **19** (1-2), 15-34.
- DEPLEDT F. (éd.) [2009]. *Évaluation sensorielle : manuel méthodologique*. Paris, Tec&Doc, 524 p.
- DERR J. [2000]. *Statistical consulting : a guide to effective communication*. Pacific Grove (CA), Duxbury, 200 p.
- DEY A., MUKERJEE R. [1999]. *Fractional factorial plans*. New York, Wiley, 211 p.
- DIGGLE P.J., HEAGERTY P., LIANG K.Y., ZEGER S.L. [2002]. *Analysis of longitudinal data*. Oxford (UK), University Press, 379 p.
- DOBSON A.J., BARNETT A.G. [2008]. *An introduction to generalized linear models*. Boca Raton (FL), Chapman and Hall/CRC, 307 p.
- DODGE Y. [1985]. *Analysis of experiments with missing data*. New York, Wiley, 499 p.
- DOEHLERT D.H. [1970]. Uniform shell designs. *Appl. Stat.* **19** (3), 231-239.
- DROESBEKE J.J., FINE J., SAPORTA G. [1997]. Le cheminement historique des plans d'expériences. *In* : DROESBEKE J.J., FINE J., SAPORTA G. (éd.). *Plans d'expériences : applications à l'entreprise*. Paris, Technip, 1-12.
- DUNNIGAN K., KING D.W. [2010]. Increasing the sample size at interim for a two-sample experiment without type I error inflation. *Pharm. Stat.* **9** (4), 280-287.
- DUPRAZ C. [1999]. Adequate design of control treatments in long term agroforestry experiments with multiple objectives. *Agrofor. Syst.* **43** (1-3), 35-48.
- DYKE G.V. [1988]. *Comparative experiments with field crops*. London, Griffin, 262 p.
- DYKE G.V., PEARCE S.C. [2000]. Aberrant data in field experiments. *Exp.. Agric.* **36** (3), 343-351.

**E**

- EBDON J.S., GAUCH H.G. [2002]. Additive main effect and multiplicative interaction analysis of National Turfgrass Performance Trials. I. Interpretation of genotype × environment interaction. *Crop Sci.* **42** (2), 489-496.
- EDERER F. [1998]. History of clinical trials. *In* : ARMITAGE P., COLTON T. (eds). *Encyclopedia of biostatistics (vol. 3)*. Chichester (UK), Wiley, 1936-1945.
- EDMONDSON R.N. [1998]. Trojan square and incomplete Trojan square designs for crop research. *J. Agric. Sci.* **131** (2), 135-142.

- EDMONDSON R.N. [2002]. Generalised incomplete Trojan designs. *Biometrika* **89** (4), 877-891.
- EDMONDSON R.N. [2005]. Past developments and future opportunities in the design and analysis of crop experiments. *J. Agric. Sci.* **143** (1), 27-33.
- EDMONDSON R.N., WALKER Y., JONES J.E., PARSONS N.R. [2002]. A web based system for the design of experiments. In : *XXI<sup>st</sup> International Biometric Conference Proceedings – Abstracts of special and contributed paper presentations*. Freiburg (Germany), University, 127-128.
- EDWARDS D.J., MEE R.W. [2008]. Empirically determined  $p$ -values for LENTH  $t$ -statistics. *J. Qual. Technol.* **40** (4), 368-380.
- EDWARDS D.J., MEE R.W. [2011]. Supersaturated designs : are our results significant ? *Comput. Stat. Data Anal.* **55** (9), 2652-2664.
- ELSNER R.J.F, MARTIN C.A., DELAHUNTY C.M. [2001]. Ethically responsible research. *Food Technol.* **55** (3), 36-42.
- ENGEL B., KEEN A. [1994]. A simple approach for the analysis of generalized linear mixed models. *Stat. Neerl.* **48** (1), 1-22.
- EVANS J.W. [1979]. Computer augmentation of experimental designs to maximize  $|\mathbf{X}'\mathbf{X}|$ . *Technometrics* **21** (3), 321-330.
- EVERITT B.S. [1995]. The analysis of repeated measures : a practical review with examples. *Statistician* **44** (1), 113-135.

**F**

- FAGROUD M., VAN MEIRVENNE M. [2002]. Accounting for soil spatial autocorrelation in the design of experimental trials. *Soil Sci. Soc. Am. J.* **66** (4), 1134-1142.
- FAN S.K.S., HUANG K.N. [2011]. A new search procedure of steepest ascent in response surface exploration. *J. Stat. Comput. Simul.* **81** (6), 661-678.
- FANG K.T., LI D.K.J., WINKER P., ZHANG Y. [2000]. Uniform design : theory and application. *Technometrics* **42** (3), 237-248.
- FANG K.T., LI R., SUDJIANTO A. [2006]. *Design and modeling for computer experiments*. Boca Raton (FL), Chapman and Hall/CRC, 290 p.
- FAO [1995]. *Guide technique des essais variétaux en plein champ*. Rome, Food and Agriculture Organization, 168 p.
- FEDERER W.T. [1955]. *Experimental design : theory and application*. New York, Macmillan, 544 + 47 p.
- FEDERER W.T. [1975]. The misunderstood split-plot. In : GUPTA R.P. (ed.) *Applied statistics*. Amsterdam, North Holland, 9-39.
- FEDERER W.T. [1977]. Sampling, blocking, and the model considerations for split plot and split block designs. *Biom. J.* **19** (3), 181-200.
- FEDERER W.T. [1993]. *Statistical design and analysis for intercropping experiments. Vol. I. Two crops*. New York, Springer, 298 p.
- FEDERER W.T. [1999]. *Statistical design and analysis for intercropping experiments. Vol. II. Three or more crops*. New York, Springer, 262 p.
- FEDERER W.T. [2002]. Construction and analysis of an augmented lattice square design. *Biom. J.* **44** (2), 251-257.

- FEDERER W.T., KING F. [2007]. *Variations on split plot and split block experiment designs*. New York, Wiley, 270 p.
- FEDERER W.T., RAGHAVARAO D. [1975]. On augmented designs. *Biometrics* **31** (1), 29-35.
- FEDOROV V.V. [1972]. *Theory of optimal experiments* (trad. W.J. STUDDEN et E.M. KLIMKO). New York, Academic Press, 292 p.
- FIELDING W.J., SHERCHAN D.P. [1999]. The variability of level and sloping terraces in eastern Nepal and the implications for the design of experiments. *Exp. Agric.* **35** (4), 449-459.
- FINNEY D.J. [1957]. Stratification, balance, and covariance. *Biometrics* **13** (3), 373-386.
- FINNEY D.J. [1960]. *An introduction to the theory of experimental design*. Chicago (IL), Chicago University Press, 223 p.
- FINNEY D.J. [1990]. Intercropping experiments, statistical analysis, and agricultural practice. *Exp. Agric.* **26** (1), 73-81.
- FINNEY D.J. [1993]. On presenting results of statistical analyses in scientific journals. *Biom. J.* **35** (4), 499-509.
- FINNEY D.J. [1995]. Statistical science and effective scientific communication. *J. Appl. Stat.* **22** (2), 293-308.
- FISHER R.A. [1925]. *Statistical methods for research workers*. Edinburgh (UK), Oliver and Boyd, 239 p.
- FISHER R.A. [1931]. Principles of plot experimentation in relation to the statistical interpretation of the results. In : *The technique of field experiments*. Harpenden, Rothamsted Experimental Station, 11-13.
- FISHER R.A. [1935]. *The design of experiments*. Edinburgh (UK), Oliver and Boyd, 252 p.
- FISHER R.A., YATES F. [1982]. *Statistical tables for biological, agricultural and medical research*. Harlow (UK), Longman, 146 p.
- FITZMAURICE G.M., LAIRD N.M., WARE J.H. [2011]. *Applied longitudinal analysis*. Hoboken (NJ), Wiley, 740 p.
- FLEISS J.L. [1999]. *The design and analysis of clinical experiments*. New York, Wiley, 432 p.
- FLORINS P., ROUSSEL N. [1980]. Essais variétaux sur betterave : précision et nombre de répétitions. *Biom. Praxim.* **20** (1-2), 35-45.
- FRANKLIN M.F. [1985]. Selecting defining contrasts and confounded effects in  $p^{n-m}$  factorial experiments. *Technometrics* **27** (2), 165-172.
- FREEDMAN B., SHAPIRO S.H. [1994]. Ethics and statistics in clinical research : towards a more comprehensive examination. *J. Stat. Plan. Inference* **42** (1-2), 223-240.
- FREEMAN G.H. [1979]. Complete Latin squares and related experimental designs. *J. R. Stat. Soc., Ser. B*, **41** (2), 253-262.
- FREY D.D., WANG H. [2006]. Adaptive one-factor-at-a-time experimentation and expected value of improvement. *Technometrics* **48** (3), 418-431.
- FRIEDE T., KIESER M. [2006]. Sample size recalculation in internal pilot study designs : a review. *Biom. J.* **48** (4), 537-555.

## G

- GARCIA R., BENET M., ARNAU C., COBO E. [2004]. Efficiency of the cross-over design : an empirical estimation. *Stat. Med.* **23** (24), 3773-3780.
- GARNER H.V., WEIL J.W. [1939]. The standard errors of field plots at Rothamsted and outside centres. *Imp. J. Exp. Agric.* **7**, 369-379.
- GAUCH H.G. [1988]. Model selection and validation for yield trials with interaction. *Biometrics* **44** (3), 705-715.
- GAUCHI J.P. [2005]. Plans d'expériences optimaux : un exposé didactique. *Rev. MODULAD* **33**, 139-162, <www.modulad.fr>.
- GÉRARD M. [1977]. *Influence du chauffage du sol sur la croissance de Ficus elastica*. Gembloux (Belgique), Faculté des Sciences agronomiques, 130 p.
- GERKENS M. [1963]. *Contribution à l'étude de l'influence de certains facteurs sur la pénétration d'une solution de soude dans les bois*. Gembloux (Belgique), Institut agronomique, 94 p. + annexes.
- GHOSH D.K., BAGUI S.C. [1998]. Identification of confounded design and its interactions. *J. Appl. Stat.* **25** (3), 349-356.
- GILL P.S. [1991]. A bibliography of nearest neighbour methods in design and analysis of experiments. *Biom. J.* **33** (4), 455-459.
- GILMOUR A.R. [2000]. Post blocking gone too far! Recovery of information and spatial analysis in field experiments. *Biometrics* **56** (3), 944-946.
- GOAD C.L., JOHNSON D.E. [2000]. Crossover experiments : a comparison of ANOVA tests and alternative analyses. *J. Agric. Biol. Environ. Stat.* **5** (1), 69-87.
- GOOS P. [2002]. *The optimal design of blocked and split-plot experiments*. New York, Springer, 244 p.
- GOOS P., DONEV A.N. [2006a]. Blocking response surface designs. *Comput. Stat. Data Anal.* **51** (2), 1075-1088.
- GOOS P., DONEV A.N. [2006b]. The *D*-optimal design of blocked experiments with mixture components. *J. Qual. Technol.* **38** (4), 319-332.
- GOOS P., DONEV A.N. [2007]. *D*-optimal minimum support mixture designs in blocks. *Metrika* **65** (1), 53-68.
- GOOS P., LANGHANS I., VANDEBROEK M. [2006]. Practical inference from industrial split-plot designs. *J. Qual. Technol.* **38** (2), 162-179.
- GOOVAERTS P. [1997]. *Geostatistics for natural resources evaluation*. New York, Oxford University Press, 483 p.
- GOUPY J. [1999]. *Plans d'expériences pour surfaces de réponse*. Paris, Dunod, 409 p.
- GOUPY J. [2000]. *Plans d'expériences : les mélanges*. Paris, Dunod, 300 p.
- GOUPY J. [2005]. *Pratiquer les plans d'expériences*. Paris, Dunod, 568 p.
- GOUPY J., CREIGHTON L. [2009]. *Introduction aux plans d'expériences*. Paris, Dunod, 372 p.
- GREENHOUSE S.W., GEISSER S. [1959]. On methods in the analysis of profile data. *Psychometrika* **24** (2), 95-112.
- GURKA M.J. [2006]. Selecting the best linear mixed model under REML. *Am. Stat.* **60** (1), 19-26.

**H**

- HAND D.J., EVERITT B.S. (eds). [1987]. *The statistical consultant in action*. Cambridge (UK), Cambridge University Press, 189 p.
- HAREL O., ZHOU X.H. [2007]. Multiple imputation : review of theory, implementation and software. *Stat. Med.* **26** (16), 3057-3077.
- HATHEWAY W.H., WILLIAMS E.J. [1958]. Efficient estimation of the relationship between plot size and the variability of crop yields. *Biometrics* **14** (2), 207-222.
- HEDAYAT A. [1973]. Self orthogonal Latin square designs and their importance. *Biometrics* **29** (2), 393-396.
- HEDAYAT A. [1975]. Self orthogonal Latin square designs and their importance, II. *Biometrics* **31** (3), 755-759.
- HEDAYAT A., SEIDEN E. [1970].  $F$ -square and orthogonal  $F$ -squares design : a generalization of Latin square and orthogonal Latin squares design. *Ann. Math. Stat.* **41** (6), 2035-2044.
- HERNANDEZ J.A., MULLA D.J. [2008]. Estimating uncertainty of economically optimum fertilizer rates. *Agron. J.* **100** (5), 1221-1229.
- HINKELMANN K., KEMTHORNE O. [2005]. *The design and analysis of experiments. Vol. 2. Advanced experimental design*. Hoboken (NJ), Wiley, 780 p.
- HINKELMANN K., KEMTHORNE O. [2008]. *The design and analysis of experiments. Vol. 1. Introduction to experimental design*. Hoboken (NJ), Wiley, 631 p.
- HOCKING R.R. [2003]. *Methods and applications of linear models*. New York, Wiley, 741 p.
- HOKE A.T. [1974]. Economical second-order designs based on irregular fractions of the  $3^n$  factorial. *Technometrics* **16** (3), 375-384.
- HOMÈS M.V., HOMÈS-VAN SCHOOR G.H. [1975]. L'alimentation des végétaux, la richesse utile des sols et la méthode des variantes systématiques. *Acad. R. Belg., Bull. Cl. Sci.* **61**, 779-801.
- HOMÈS M.V., VAN SCHOOR G.H. [1969]. *La nutrition minérale des végétaux*. Paris, Masson, 162 p.
- HONG N., WHITE J.G., GUMPertz M.L., WEISZ R. [2005]. Spatial analysis of precision agriculture treatments in randomized complete blocks. *Agron. J.* **97** (4), 1082-1096.
- HORN M. [1979]. Regarding the optimality of the formula  $n_0/n = \sqrt{p}$  for the ratio of sample sizes of a control and of  $p$  treated groups. *Biom. J.* **21** (5), 407-412.
- HUNT D.N., LI E. [1995]. Loss of efficiency in spoilt experiments. *J. Appl. Stat.* **22** (2), 309-315.
- HUYNH H., FELDT L.S. [1970]. Conditions under which mean square ratios in repeated measurements design have exact  $F$ -distributions. *J. Am. Stat. Assoc.* **65** (332), 1582-1589.

**I**

- IBRAHIMY A. [1994]. Optimal designs under the quadratic polynomial model : a practical example. *Biom. Praxim.* **34** (3-4), 189-205.
- IEMMA A.F., CLAUSTRIAUX J.J. [1999]. *Étude des hypothèses de l'analyse de la variance à deux critères de classification : approche par l'exemple*. Gembloux (Belgique), Faculté universitaire des Sciences agronomiques et Centre de Recherches agronomiques, 36 p.

- ITCF [1991]. *La pratique de l'expérimentation en champ : cas des céréales à paille*. Paris, Institut technique des Céréales et des Fourrages, 124 p.
- ITCF [2001]. *Alpha-plans, carrés semi-latins et autres dispositifs en répliques : comment les utiliser ?* Paris, Institut technique des Céréales et des Fourrages, 44 p.
- ITCF [2002]. *Analyse de la variance : comment interpréter les résultats*. Paris, Institut technique des Céréales et des Fourrages, 48 p.

**J**

- JACROUX M. [1989]. The A-optimality of block designs for comparing test treatments with a control. *J. Am. Stat. Assoc.* **84** (405), 310-317.
- JAGGARD K.W., QI A., ARMSTRONG M.J. [2009]. A meta-analysis of sugarbeet yield responses to nitrogen fertilizer measured in England since 1980. *J. Agric. Sci.* **147** (3), 287-301.
- JAGGI S., VARGHESE C., GUPTA V.K. [2007]. Optimal circular block designs for neighbouring competition effects. *J. Appl. Stat.* **34** (5-6), 577-584.
- JOHN J.A., LEWIS S.M. [1983]. Factorial experiments in generalized cyclic row-column designs. *J. R. Stat. Soc., Ser. B*, **45** (2), 245-251.
- JOHN J.A., QUENOUILLE M.H. [1977]. *Experiments : design and analysis*. London, Griffin, 296 p.
- JOHN J.A., RUGGIERO K., WILLIAMS E.R. [2002].  $\alpha_n$ -designs. *Aust. N. Z. J. Stat.* **44** (4), 457-465.
- JOHNSTONE P. [2003]. Random generation and selection of one- and two-dimensional designs for experiments on blocks of natural size. *J. Agric. Biol. Environ. Stat.* **8** (1), 67-74.
- JOLLIFFE P.A., WANJAU F.M. [1999]. Competition and productivity in crop mixtures : some properties of productive intercrops. *J. Agric. Sci.* **132** (4), 425-435.
- JONES B., KENWARD M.G. [2003]. *Design and analysis of cross-over trials*. London, Chapman and Hall/CRC, 382 p.
- JONES B., NACHTSHEIM C.J. [2009]. Split-plot designs : what, why, and how. *J. Qual. Technol.* **41** (4), 340-361.
- JOURDAN A. [2005]. Planification d'expériences numériques. *Rev. MODULAD* **33**, 63-73, <www.modulad.fr>.

**K**

- KERR K.F. [2006]. Efficient  $2^k$  factorial designs for blocks of size 2 with microarray applications. *J. Qual. Technol.* **38** (4), 309-318.
- KHOSLA R.K., SARDANA M.G., SAKSENA M.P., SAHANI M.L. [1973]. A review of agricultural experimentation in India. *J. Indian Soc. Agric. Stat.* **25** (1), 136-139.
- KLAR N., DONNER A. [2001]. Current and future challenges in the design and analysis of cluster randomization trials. *Stat. Med.* **20** (24), 3729-3740.
- KOCH E.J., RIGNEY J.A. [1951]. A method of estimating optimum plot size from experimental data. *Agron. J.* **43** (1), 17-21.
- KOUKOUVINOS C., MYLONA K., SKOUNTZOU A. [2011]. A variable selection method for analyzing supersaturated designs. *Commun. Stat. Simul. Comput.* **40** (4), 484-496.

- KOWALSKI S.M., PARKER P.A., VINING G.G. [2007]. Tutorial : industrial split-plot experiments. *Qual. Eng.* **19** (1), 1-15.
- KRAEMER H.C., THIEMANN S. [1987]. *How many subjects ? Statistical power analysis in research*. Newbury Park (CA), Sage, 120 p.
- KRISTENSEN K., ERSBØLL A.K. [1992]. The use of geostatistical methods in planning variety trials. *Biul. Oceny Odmian (Cultiv. Test. Bull.)* **24-25**, 139-157.
- KUEHL R.O. [2000]. *Design of experiments : statistical principles of research design and analysis*. Pacific Grove (CA), Brooks/Cole, 666 p.
- KUNERT J. [2000]. Randomization of neighbour balanced designs. *Biom. J.* **42** (1), 111-118.

## L

- LANG T.A., SECIC M. [2006]. *How to report statistics in medicine : annotated guidelines for authors, editors, and reviewers*. Philadelphia (PA), American College of Physicians, 488 p.
- LANGSRUD Ø. [2001]. Identifying significant effects in fractional factorial multiresponse experiments. *Technometrics* **43** (4), 415-424.
- LAROCHE M.J., ROUSSELET F. [1990]. *Les animaux de laboratoire : éthique et bonnes pratiques*. Paris, Masson, 393 p.
- LECLERCQ R. [1960]. *Histoire et avenir de la méthode expérimentale*. Paris, Masson, 138 p.
- LEE S.J., ZELEN M. [2000]. Clinical trials and sample size considerations : another perspective (with discussion). *Stat. Sci.* **15** (2), 95-110.
- LENTH R.V. [2001]. Some practical guidelines for effective sample size determination. *Am. Stat.* **55** (3), 187-193.
- LEUCHOVIVUS T. [1997]. *Good experimental practice. Databases for field trials*. Uppsala (Sweden), Swedish University of Agricultural Sciences, document PDF, <www.ffe.slu.se/FFE/Info/Fdb1997.pdf>, 8 p.
- LEWIS S.L., MONTGOMERY D.C, MYERS R.H. [2001a]. Examples of designed experiments with nonnormal responses. *J. Qual. Technol.* **33** (3), 265-278.
- LEWIS S.L., MONTGOMERY D.C, MYERS R.H. [2001b]. Confidence interval coverage for designed experiments analyzed with GLMs. *J. Qual. Technol.* **33** (3), 279-292.
- LI G., MAJUMDAR D. [2008]. D-optimal designs for logistic models with three and four parameters. *J. Stat. Plan. Inference* **138** (7), 1950-1959.
- LI H., YUE L.Q. [2008]. Statistical and regulatory issues in nonrandomized medical device clinical studies. *J. Biopharm. Stat.* **18** (1), 20-30.
- LIN C.S., BINNS M.R. [1984]. Working rules for determining the plot size and numbers of plots per block in field experiments. *J. Agric. Sci.* **103** (1), 11-15.
- LIN C.S., MORSE P.M. [1975]. A compact design for spacing experiments. *Biometrics* **31** (3), 661-671.
- LINDGREN D. [1985]. Cost-efficient number of test sites for ranking entries in field trials. *Biometrics* **41** (4), 887-893.
- LINDSEY J.K. [1997]. *Applying generalized linear models*. New York, Springer, 256 p.

- LITTLE R.J.A., RUBIN D.B. [2002]. *Statistical analysis with missing data*. New York, Wiley, 381 p.
- LOEPPKY J.L., SITTER R.R. [2002]. Analyzing unreplicated blocked or split-plot fractional factorial designs. *J. Qual. Technol.* **34** (3), 229-243.
- LOONEY S.W., STANLEY W.B. [1989]. Exploratory repeated measures analysis for two or more groups : review and update. *Am. Stat.* **43** (4), 220-225.
- LOUGHIN T.M. [2006]. Improved experimental design and analysis for long-term experiments. *Crop Sci.* **46** (6), 2492-2502.
- LOUGHIN T.M., ROEDIGER M.P., MILLIKEN G.A., SCHMIDT J.P. [2007]. On the analysis of long-term experiments. *J. R. Stat. Soc., Ser. A*, **170** (1), 29-42.
- LOWE C.W. [1974]. Evolutionary operation in action. *Appl. Stat.* **23** (2), 218-226.

### M

- MA R.H., HARRINGTON J.B. [1948]. The standard errors of different designs of field experiments at the University of Saskatchewan. *Sci. Agric.* **28**, 461-474.
- MACE A.E. [1964]. *Sample-size determination*. New York, Reinhold, 226 p.
- MAJUMDAR D., MARTIN R.J. [2002]. Finding optimal designs in the presence of trends. *J. Stat. Plan. Inference* **106** (1-2), 177-190.
- MARTIN R.J., ECCLESTON J.A., CHAUHAN N., CHAN B.S.P. [2006]. Some results on the design of field experiments for comparing unreplicated treatments. *J. Agric. Biol. Environ. Stat.* **11** (4), 394-410.
- MATHIEU D., PHAN-TAN-LUU R. [1997a]. Approche méthodologique des mélanges. In : DROESBEKE J.J., FINE J., SAPORTA G. (éd.). *Plans d'expériences : applications à l'entreprise*. Paris, Technip, 279-309.
- MATHIEU D., PHAN-TAN-LUU R. [1997b]. L'approche TAGUCHI. In : DROESBEKE J.J., FINE J., SAPORTA G. (éd.). *Plans d'expériences : applications à l'entreprise*. Paris, Technip, 311-323.
- MATTHEWS J.N.S. [2006]. *Introduction to randomized controlled clinical trials*. New York, Chapman and Hall/CRC, 304 p.
- MATTHEWS J.N.S., ALLCOCK G.C. [2004]. Optimal designs for MICHAELIS-MENTEN kinetic studies. *Stat. Med.* **23** (3), 477-491.
- MAUCHLY J.W. [1940]. Significance test for sphericity of a normal  $n$ -variate distribution. *Ann. Math. Stat.* **11** (2), 204-209.
- MAYO O. [1987]. Comments on "Randomization and the design of experiment" by P. URBACH. *Philos. Sci.* **54** (4), 592-596.
- MCCONKEY B.J., MEZEY P.G., DIXON D.G., GREENBERG B.M. [2000]. Fractional simplex designs for interaction screening in complex mixtures. *Biometrics* **56** (3), 824-832.
- MCLEAN R.A., ANDERSON V.L. [1984]. *Applied factorial and fractional designs*. New York, Dekker, 373 p.
- MEAD R. [1988]. *The design of experiments : statistical principles for practical applications*. Cambridge (UK), Cambridge University Press, 620 p.
- MEAD R. [1990]. The non-orthogonal design of experiments (with discussion). *J. R. Stat. Soc., Ser. A*, **153** (2), 151-201.

- MEAD R., PIKE D.J. [1975]. A review of response surface methodology from a biometric viewpoint. *Biometrics* **31** (4), 803-851.
- MEAD R., RILEY J. [1981]. A review of statistical ideas relevant to intercropping research (with discussion). *J. R. Stat. Soc., Ser. B*, **144** (4), 462-509.
- MEINERT C.L. [1998]. Clinical trials, overview. In : ARMITAGE P., COLTON T. (eds). *Encyclopedia of biostatistics (vol. 1)*. Chichester (UK), Wiley, 698-713.
- MILLER A. [2005]. The analysis of unreplicated factorial experiments using all possible comparisons. *Technometrics* **47** (1), 51-63.
- MILLIKEN G.A., JOHNSON D.E. [2002]. *Analysis of messy data. Vol. 3. Analysis of covariance*. Boca Raton (FL), Chapman and Hall/CRC, 605 p.
- MITCHELL T.J. [1974]. An algorithm for the construction of "D-optimal" experimental designs. *Technometrics* **16** (2), 203-210.
- MODJESKA J.S., RAWLINGS J.O. [1983]. Spatial correlation analysis of uniformity data. *Biometrics* **39** (2), 373-384.
- MOERBEEK M. [2005]. Randomization of clusters versus randomization of persons within clusters : which is preferable? *Am. Stat.* **59** (2), 173-179.
- MOLENBERGHS G., RENARD D., VERBEKE G. [2002]. A review of generalized linear mixed models. *J. Soc. Fr. Stat.* **143** (1-2), 53-78.
- MONOD H., MAKOWSKI D., SAHMOUDI M., WALLACH D. [2002]. Optimal experimental designs for estimating model parameters, applied to yield response to nitrogen models. *Agronomie* **22** (2), 229-238.
- MONTGOMERY D.C. [2008]. *Design and analysis of experiments*. New York, Wiley, 656 p.
- MOZZO G. [1990]. Plan quadratique gigogne. *Rev. Stat. Appl.* **38** (3), 23-34.
- MURRAY D.M. [2001]. Statistical models appropriate for designs often used in group-randomized trials. *Stat. Med.* **20** (9-10), 1373-1385.
- MYERS R.H. [1999]. Response surface methodology : current status and future directions. *J. Qual. Technol.* **31** (1), 30-44.
- MYERS R.H., MONTGOMERY D.C. [1997]. A tutorial on generalized linear models. *J. Qual. Technol.* **29** (3), 274-291.
- MYERS R.H., MONTGOMERY D.C., ANDERSON-COOK C.M. [2009]. *Response surface methodology : process and product optimization using designed experiments*. New York, Wiley, 680 p.
- MYERS R.H., MONTGOMERY D.C., VINING G.G., ROBINSON T.J. [2010]. *Generalized linear models with applications in engineering and the sciences*. New York, Wiley, 496 p.

## N

- NAES T., AASTVEIT A.H., SAHNI N.S. [2007]. Analysis of split-plot designs : an overview and comparison of methods. *Qual. Reliab. Eng. Int.* **23** (7), 801-820.
- NAIR V.N. [1992]. TAGUCHI's parameter design : a panel discussion. *Technometrics* **34** (2), 128-161.
- NEEL H., DE PRINS H. [1973]. *Essai d'amélioration des sols des prairies d'altitude à Mata*. Rubona (Rwanda), Institut des Sciences agronomiques du Rwanda, 33 p.

- NELDER J.A. [1962]. New kinds of systematic designs for spacing experiments. *Biometrics* **18** (3), 283-307.
- NELSON L.S. [1996]. Notes on the use of randomization in experimentation. *J. Qual. Technol.* **28** (1), 123-126.
- NETER J., KUTNER M., NACHTSHEIM C., WASSERMAN W. [1996]. *Applied linear statistical models*. Chicago (IL), Irwin, 1408 p.
- NGUYEN N.K. [1994]. Construction of optimal block designs by computer. *Technometrics* **36** (3), 300-307.
- NGUYEN N.K., BORKOWSKI J.J. [2008]. New 3-level response surface designs constructed from incomplete block designs. *J. Stat. Plan. Inference* **138** (1), 294-305.
- NGUYEN N.K., WILLIAMS E.R. [1993]. An algorithm for constructing optimal resolvable row-column design. *Aust. J. Stat.* **35** (3), 363-370.
- NJOS A., NISSEN O. [1956]. Standard errors of field experiments at the Farm Crop Institute, Agricultural College of Norway. *Agron. J.* **48**, 416-418.
- NORMAND S.L.T. [1999]. Meta-analysis : formulating, evaluating, combining, and reporting. *Stat. Med.* **18** (3), 321-359.

## O

- ODEH R.E., FOX M. [1991]. *Sample size choice : charts for experiments with linear models*. New York, Dekker, 194 p.
- OGER R. [1980]. *Contribution à l'étude de la planification des essais en champ basée sur l'examen de la variabilité expérimentale*. Gembloux (Belgique), Faculté des Sciences agronomiques, 138 p.
- OGER R., ROISIN C. [1992]. The influence of block size on the efficiency of incomplete block designs in Belgian cereal variety trials. *Biul. Oceny Odmian (Cultiv. Test. Bull.)* **24-25**, 159-165.
- ÖHRVIK J. [1998]. Nonparametric methods in crossover trials. *Biom. J.* **40** (7), 771-789.
- OMAN S.D. [1991]. Multiplicative effects in mixed model analysis of variance. *Biometrika* **78** (4), 729-739.
- OMAR R.Z., WRIGHT E.M., TURNER R.M., THOMPSON S.G. [1999]. Analysing repeated measurements data : a practical comparison of methods. *Stat. Med.* **18** (13), 1587-1603.

## P

- PAGÈS J., PÉRINEL E. [2007]. Blocs incomplets équilibrés *versus* plans optimaux. *J. Soc. Fr. Stat.* **148** (2), 99-112.
- PALMER C.R. [2002]. Ethics, data-dependent designs, and the strategy of clinical trials : time to start learning-as-we-go? *Stat. Methods Med. Res.* **11** (5), 381-402.
- PARK D.K., BOSE M., NOTZ W.I., DEAN A.M. [2011]. Efficient crossover designs in the presence of interactions between direct and carry-over treatment effects. *J. Stat. Plan. Inference* **141** (2), 846-860.
- PARK H.J., PARK S.H. [2010]. Extension of central composite design for second-order response surface model building. *Commun. Stat. Theory Methods* **39** (7), 1202-1211.
- PARK S.H., KIM K. [2002]. Construction of central composite designs for balanced orthogonal blocks. *J. Appl. Stat.* **29** (6), 885-893.

- PARKER R.A., BERMAN N.G. [2003]. Sample size : more than calculations. *Am. Stat.* **57** (3), 166-170.
- PATERSON L.J. [1988]. Some recent work on making incomplete-block designs available as a tool for science. *Int. Stat. Rev.* **56** (2), 129-138.
- PATTERSON H.D., HUNTER E.A. [1983]. The efficiency of incomplete block designs in National List and Recommended List cereal variety trials. *J. Agric. Sci.* **101** (2), 427-433.
- PATTERSON H.D., NABUGOOMU F. [1992]. REML and the analysis of series of crop variety trials. In : *XVI<sup>th</sup> International Biometric Conference – Proceedings of invited papers*. Hamilton (New Zealand), Ruakura Agricultural Centre, 77-93.
- PATTERSON H.D., SILVEY V., TALBOT M., WEATHERUP S.T.C. [1977]. Variability of yields of cereal varieties in U.K. trials. *J. Agric. Sci.* **89** (1), 239-245.
- PATTERSON H.D., WILLIAMS E.R. [1976]. A new class of resolvable incomplete block designs. *Biometrika* **63** (1), 83-92.
- PATTERSON H.D., WILLIAMS E.R., HUNTER E.A. [1978]. Block designs for variety trials. *J. Agric. Sci.* **90** (2), 395-400.
- PEARCE S.C. [1964]. Experimenting with blocks of natural size. *Biometrics* **20** (4), 699-706.
- PEARCE S.C. [1965]. Statistical techniques in fruit tree research. *Biom. Praxim.* **6** (2), 79-92.
- PEARCE S.C. [1976a]. *Field experimentation with fruit trees and other perennial plants*. Slough (UK), Commonwealth Agricultural Bureaux, 182 p.
- PEARCE S.C. [1976b]. An examination of Fairfield SMITH's law of environmental variation. *J. Agric. Sci.* **87** (1), 21-24.
- PEARCE S.C. [1976c]. The conduct of « post-mortems » on concluded field trials. *Exp. Agric.* **12**, 151-162.
- PEARCE S.C. [1998]. Field experimentation on rough land : the method of PAPADAKIS reconsidered. *J. Agric. Sci.* **131** (1), 1-11.
- PEARSON E.S., HARTLEY H.O. (eds). [1966-1972]. *Biometrika tables for statisticians (2 vol.)*. Cambridge (UK), Cambridge University Press, 264 + 385 p.
- PETERSEN R.G. [1994]. *Agricultural field experiments : design and analysis*. New York, Dekker, 409 p.
- PIEPHO H.P., BÜCHSE A., EMRICH K. [2003]. A hitchhiker's guide to mixed models for randomized experiments. *J. Agron. Crop Sci.* **189** (5), 310-322.
- PIEPHO H.P., RICHTER C., WILLIAMS E. [2008]. Nearest neighbour adjustment and linear variance models in plant breeding trials. *Biom. J.* **50** (2), 164-189.
- PILLET M. [1997]. *Les plans d'expériences par la méthode TAGUCHI*. Paris, Éditions d'Organisation, 330 p.
- PLACKETT R.L., BURMAN J.P. [1946]. The design of optimum multifactorial experiments. *Biometrika* **33** (4), 305-325.
- POULTNEY R., RILEY J., WEBSTER R. [1997]. Optimizing plot size and shape for field experiments on terraces. *Exp. Agric.* **33** (1), 51-64.
- PREECE D.A. [1987]. Good statistical practice. *Statistician* **36** (4), 397-408.

- PREECE D.A. [1990]. R.A. FISHER and experimental design : a review. *Biometrics* **46** (4), 925-935.
- PREECE D.A. [2001]. Types of factor in experiments. *J. Stat. Plan. Inference* **95** (1-2), 269-282.
- PREECE D.A., FREEMAN, G.H. [1983]. Semi-Latin squares and related designs. *J. R. Stat. Soc., Ser. B*, **45** (2), 267-277.
- PREECE D.A., PEARCE S.C., KERR J.R. [1973]. Orthogonal designs for three-dimensional experiments. *Biometrika* **60** (2), 349-358.
- PRESCOTT P. [2008]. Nearly uniform designs for mixture experiments. *Commun. Stat. Theory Methods* **37** (13), 2095-2115.
- PRESCOTT P., DRAPER N.R. [1998]. Mixture designs for constrained components in orthogonal blocks. *J. Appl. Stat.* **25** (5), 613-638.
- PRESCOTT P., DRAPER N.R. [2008]. D-optimal mixture component-amount designs for quadratic and cubic models. *J. Appl. Stat.* **35** (7), 739-749.
- PRVAN T., STREET D.J. [2002]. An annotated bibliography of application papers using certain classes of fractional factorial and related designs. *J. Stat. Plan. Inference* **106** (1-2), 245-269.
- PUKELSHEIM F. [1993]. *Optimal design of experiments*. New York, Wiley, 454 p.
- PUTT M.E., CHINCHILLI V.M. [2004]. Nonparametric approaches to the analysis of cross-over studies. *Stat. Sci.* **19** (4), 712-719.

## Q

- QUENOUILLE M.H. [1953]. *Design and analysis of experiment*. London, Griffin, 356 p.

## R

- RADY E.A., ABD EL-MONSEF M.M.E., SEYAM M.M. [2009]. Relationships among several optimality criteria. *InterStat*, <<http://interstat.statjournals.net/INDEX/Jun09.html>>, 11 p.
- RAGHAVARAO D. [1971]. *Constructions and combinatorial problems in the design of experiments*. New York, Wiley, 386 p.
- RECK B., MORGAN J.P. [2005]. Optimal design in irregular BIBD settings. *J. Stat. Plan. Inference* **129** (1-2), 59-84.
- RENCHER A.C., SCHAALJE G.B. [2008]. *Linear models in statistics*. New York, Wiley, 672 p.
- RILEY J. [1994]. Aspects of statistical technique and presentation. *Exp. Agric.* **30** (4), 381-394.
- RILEY J. [2000]. Design perspectives in long-term experimentation. *Exp. Agric.* **36** (2), 151-163.
- RILEY J. [2001]. Presentation of statistical analyses. *Exp. Agric.* **37** (1), 115-123.
- RIXHON L. [1972]. Rotations et assolements. In : LECOMTE R. *et al. Rapport d'activité 1972*. Gembloux (Belgique), Centre de Recherches agronomiques, 158-162.
- ROBINSON G.K. [2000]. *Practical strategies for experimenting*. Chichester (UK), Wiley, 265 p.
- ROCKE D.M. [1992]. Estimation of variation after outlier rejection. *Comput. Stat. Data Anal.* **13** (1), 9-20.

- ROCKHOLD F.W. [2002]. Industry perspectives on ICH guidelines. *Stat. Med.* **21** (19), 2949-2957.
- ROQUEMORE K.G. [1976]. Hybrid designs for quadratic response surfaces. *Technometrics* **18** (4), 419-423.
- RUBIN D.B. [2006]. The design versus the analysis of observational studies for causal effects : parallels with the design of randomized trials. *Stat. Med.* **26** (1), 20-36.
- RUSTAGI J.S., WOLFE D.A. (eds). [1982]. *Teaching of statistics and statistical consulting*. New York, Academic Press, 548 p.

## S

- SADO G., SADO M.C. [2000]. *Les plans d'expériences : de l'expérimentation à l'assurance qualité*. Paris, Association française de Normalisation, 411 p.
- SANTNER T.J., WILLIAMS B.J., NOTZ W.I. [2003]. *The design and analysis of computer experiments*. New York, Springer, 283 p.
- SAUVANT D., SCHMIDELY P., DAUDIN J.J. [2005]. Les méta-analyses des données expérimentales : applications en nutrition animale. *Prod. Anim.* **18** (1), 63-73.
- SCHABENBERGER O., GOTWAY C.A. [2005]. *Statistical methods for spatial data analysis*. Boca Raton (FL), Chapman and Hall/CRC, 488 p.
- SCHENKEL Y. [1999]. *Modélisation des flux massiques et énergétiques dans la carbonisation du bois en four cornue*. Gembloux (Belgique), Faculté universitaire des Sciences agronomiques, 328 p.
- SENN S. [2002a]. Ethical considerations concerning treatment allocation in drug development trials. *Stat. Methods Med. Res.* **11** (5), 403-411.
- SENN S. [2002b]. *Cross-over trials in clinical research*. Chichester (UK), Wiley, 345 p.
- SHADISH W.R., CLARK M.H., STEINER P.M. [2008]. Can nonrandomized experiments yield accurate answers? A randomized experiment comparing random and non-random assignments (with discussion). *J. Am. Stat. Assoc.* **103** (484), 1334-1356.
- SILVEY S.D. [1980]. *Optimal design : an introduction to the theory for parameter estimation*. London, Chapman and Hall, 86 p.
- SINGH M., JONES M.J. [2002]. Modeling yield sustainability for different rotations in long-term barley trials. *J. Agric. Biol. Environ. Stat.* **7** (4), 525-535.
- SINGH M., PALA M. [2004]. Use of covariance structures for temporal errors in the analysis of a three-course wheat rotation and tillage trial. *J. Agric. Sci.* **142** (2), 193-201.
- SINHA K., SINGH M.K., KAGEYAMA S., SINGH R.S. [2002]. Some series of rectangular designs. *J. Stat. Plan. Inference* **106** (1-2), 39-46.
- SMITH A., CULLIS B., THOMPSON R. [2001]. Analyzing variety by environment data using multiplicative mixed models and adjustments for spatial field trend. *Biometrics* **57** (4), 1138-1147.
- SMITH C.D., JOHNSON D.E. [2007]. Comparing analyses of unbalanced split-plot experiments. *J. Stat. Comput. Simul.* **77** (2), 119-129.
- SMITH F.H. [1938]. An empirical law describing heterogeneity in the yields of agricultural crops. *J. Agric. Sci.* **28** (1), 1-23.
- SMITH P.L. [1981]. The use of analysis of covariance to analyse data from designed experiments with missing or mixed-up values. *Appl. Stat.* **30** (1), 1-8.

- SNEE R.D. [1983]. Statistics in industry. In : KOTZ S., JOHNSON N.L. (eds). *Encyclopedia of statistical sciences (vol. 4)*. New York, Wiley, 69-73.
- SPIEGELHALTER D.J., FREEDMAN L.S., PARAMAR M.K.B. [1994]. Bayesian approaches to randomized trials (with discussion). *J. R. Stat. Soc., Ser. A*, **157** (3), 357-416.
- STASSE F. [1986]. *Comparaison de deux complémentations azotées de la pulpe surpressée de betterave sucrière : l'urée et le gluten feed de maïs*. Gembloux (Belgique), Faculté des Sciences agronomiques, 144 p.
- STEINBERG D.M., LIN D.K.J. [2006]. A construction method for orthogonal Latin hypercube designs. *Biometrika* **93** (2), 279-288.
- SUDDUTH K.A., DRUMMOND S.T. [2007]. Software for removing errors from crop yield maps. *Agron. J.* **99** (6), 1471-1482.
- SUTTON A.J., ABRAMS K.R., JONES D.R., SHELDON T.A., SONG F. [2000]. *Methods for meta-analysis in medical research*. Chichester (UK), Wiley, 317 p.
- SUTTON A.J., HIGGINS J.P.T. [2008]. Recent developments in meta-analysis. *Stat. Med.* **27** (5), 625-650.
- SVENSSON E. [2000]. Comparison of the quality of assessments using continuous and discrete ordinal rating scales. *Biom. J.* **42** (4), 417-434.
- T**
- TACK L., VANDEBROEK M. [2002]. Trend-resistant and cost-efficient block designs with fixed or random block effects. *J. Qual. Technol.* **34** (4), 422-436.
- TACK L., VANDEBROEK M. [2004]. Budget constrained run orders in optimum design. *J. Stat. Plan. Inference* **124** (1), 231-249.
- TAGUCHI G. [1987]. *System of experimental design : engineering methods to optimize quality and minimize costs (2 vol.)*. White Plains (NY), Unipub/Kraus, 552 + 656 p.
- TALBOT M. [1992]. Analysis of variety  $\times$  region data using REML. *Biul. Oceny Odmian (Cultiv. Test. Bull.)* **24-25**, 47-54.
- TARDIF S., BELLAVANCE F., VAN EEDEN C. [2005]. A nonparametric procedure for the analysis of balanced crossover designs. *Can. J. Stat.* **33** (4), 471-488.
- TAYE G., NJUHO P. [2007]. An improvement on the PAPADAKIS covariate to account for spatial variation. *J. Agric. Biol. Environ. Stat.* **12** (3), 397-413.
- TERMAN G.L. [1957]. Variability in phosphorous rate and source experiments in relation to crop and yield levels. *Agron. J.* **49**, 271-276.
- THEOBALD C.M., TALBOT M. [2002]. The Bayesian choice of crop variety and fertilizer dose. *Appl. Stat.* **51** (1), 23-36.
- TRINCA L.A., GILMOUR S.G. [2000]. An algorithm for arranging response surface designs in small blocks. *Comput. Stat. Data Anal.* **33** (1), 25-43.
- TRINCA L.A., GILMOUR S.G. [2002]. Erratum to "An algorithm for arranging response surface designs in small blocks". *Comput. Stat. Data Anal.* **40** (3), 475.
- TUKEY J. [1955]. Query 113. *Biometrics* **11** (1), 111-113.
- TURE T.E. [1994]. Optimal row-column designs for multiple comparisons with a control : a complete catalog. *Technometrics* **36** (3), 292-299.

## U

- ULLRICH P. [2002]. Officers, playing cards, and sheep : on the history of Eulerian squares and of the design of experiments. *Metrika* **56** (3), 189-204.
- URDAPILLETA I., TON NU C., SAINT DENIS C., HUON DE KERMADEC F. [2001]. *Traité d'évaluation sensorielle : aspects cognitifs et métrologiques des perceptions*. Paris, Dunod, 592 p.
- UTZ H.F., LAIDIG F. [1989]. Genetic and environmental variability of yields in the official FRG variety performance tests. *Biul. Oceny Odmian (Cultiv. Test. Bull.)* **21-22**, 75-85.
- UWAMWEZI M.C. [1996]. *Dispositifs expérimentaux utilisés en biotechnologie : étude bibliographique et application*. Gembloux (Belgique), Faculté universitaire des Sciences agronomiques, 56 p. + annexes.

## V

- VANDEMEULEBROECKE M. [2008]. Group sequential and adaptive designs : a review of basic concepts and points of discussion. *Biom. J.* **50** (4), 541-557.
- VAN EEUWIJK F. [2007]. Statistical methods for the analysis of series of plant breeding experiments. In : BLEIHOLDER H., PIEPHO H.P. (eds). *Proceedings of the International Symposium Agricultural Field Trials Today and Tomorrow*. Stuttgart, Grauer, 242-249.
- VAN RENTERGHEM G.T., DAGNELIE P. [1963]. La fumure du cotonnier : analyse statistique d'une série d'essais locaux. *Bull. Inst. Agron. Stat. Rech. Gembloux* **31** (2), 246-258.
- VARGAS M., CROSSA J., VAN EEUWIJK F., SAYRE K.D., REYNOLDS M.P. [2001]. Interpreting treatment  $\times$  environment interaction in agronomy trials. *Agron. J.* **93** (4), 949-960.
- VEISSIER I. [1999]. Expérimentation animale : biologie, éthique, réglementation. *Prod. Anim.* **12** (5), 365-375.
- VENABLES W.N., ECCLESTON J.A. [1993]. Randomized search strategies for finding optimal or near optimal block and row-column designs. *Aust. J. Stat.* **35** (3), 371-382.
- VERBEKE G., MOLENBERGHS G. [1997]. *Linear mixed models in practice : a SAS-oriented approach*. New York, Springer, 306 p.
- VERBEKE G., MOLENBERGHS G. [2001]. *Linear mixed models for longitudinal data*. New York, Springer, 568 p.
- VERBEKE G., MOLENBERGHS G., THIJS H., LESAFFRE E., KENWARD M.G. [2001]. Sensitivity analysis for nonrandom dropout : a local influence approach. *Biometrics* **57** (1), 7-14.
- VINING G.G., MYERS R.H. [1990]. Combining TAGUCHI and response surface philosophies : dual response approach. *J. Qual. Technol.* **22** (1), 38-45.

## W

- WANG P.C. [2007]. Planning experiments when some specified interactions are investigated. *Comput. Stat. Data Anal.* **51** (9), 4143-4151.
- WATSON S. [2000]. Spatial dependence and block designs in spaced plant herbage trials. *J. Agric. Sci.* **134** (3), 245-258.

- WEST B.T., WELCH K.B., GALECKI A.T. [2007]. *Linear mixed models : a practical guide using statistical software*. Boca Raton (FL), Chapman and Hall/CRC, 353 p.
- WHITEHEAD A. [2002]. *Meta-analysis of controlled clinical trials*. Chichester (UK), Wiley, 336 p.
- WILKINSON G.N., ECKERT S.R., HANCOCK T.W., MAYO O. [1983]. Nearest neighbour (NN) analysis of field experiments (with discussion). *J. R. Stat. Soc., Ser. B*, **45** (2), 151-211.
- WILLIAMS E.R., JOHN J.A. [1996]. Row-column factorial designs for use in agricultural field trials. *Appl. Stat.* **45** (1), 39-46.
- WILLIAMS E.R., JOHN J.A. [2003]. A note on the design of unreplicated trials. *Biom. J.* **45** (6), 751-757.
- WILLIAMS E.R., MATHESON A.C., HARWOOD C.E. [2002]. *Experimental design and analysis for tree improvement*. Collingwood (Australia), Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, 214 p.
- WITTES J. [1998]. Randomized treatment assignment. In : ARMITAGE P., COLTON T. (eds). *Encyclopedia of biostatistics (vol. 5)*. Chichester (UK), Wiley, 3703-3711.
- WU T., DUTILLEUL P. [1999]. Validity and efficiency of neighbor analyses in comparison with classical complete and incomplete block analyses of field experiments. *Agron. J.* **91** (4), 721-731.

**X**

- XU H., LAU S. [2006]. Minimum aberration blocking schemes for two- and three-level fractional factorial designs. *J. Stat. Plan. Inference* **136** (11), 4088-4118.

**Y**

- YANG R.C., YE T.Z., BLADE S.F., BANDARA M. [2004]. Efficiency of spatial analyses of field pea variety trials. *Crop Sci.* **44** (1), 49-55.
- YATES F. [1936]. Incomplete randomized blocks. *Ann. Eugenics* **7**, 121-140.
- YATES F. [1937]. *The design and analysis of factorial experiments*. Harpenden (UK), Imperial Bureau of Soil Science, 95 p.
- YATES F. [1964]. Sir Ronald FISHER and the design of experiments. *Biometrics* **20** (2), 307-321.

**Z**

- ZHANG P. [2003]. Multiple imputation : theory and method. *Int. Stat. Rev.* **71** (3), 581-592.
- ZIMMERMANN G. VON [1774]. *Traité de l'expérience en général, et en particulier dans l'art de guérir* (tome 1 : trad. M. LE FEBVRE). Paris, Vincent, 384 p.

# Index des traductions et sigles anglais

L'index renvoie à l'introduction (introd.), aux différents paragraphes  
et à la synthèse (synth.).

|  |  |
|--|--|
| <i><math>\alpha</math>-design:</i> 9.1.5.4°                            | <i>Balanced:</i> 12.4.1.2°                       |
| <i>Active contrast:</i> 5.2.5°   | <i>Balanced for carry-over effects:</i> 8.2.3.1° |
| <i>Active effect:</i> 5.2.5°   | <i>Balanced incomplete blocks:</i> 9.1.2.1°      |
| <i>Adaptive experiment:</i> 2.4.4.1°                                   | <i>Balanced lattice:</i> 9.1.3.4°                |
| <i>Additive main effects and multiplicative interaction:</i> 11.1.2.6° | <i>Balanced lattice square:</i> 9.1.3.1°         |
| <i>Adjusted mean:</i> 9.2.1.2°   | <i>Baseline:</i> 4.1.2°                          |
| <i>Agroforestry:</i> 12.2.1°   | <i>Bayesian method:</i> 12.8                     |
| <i>Alias:</i> 2.3.3.2°   | <i>BIB:</i> 9.1.2.1°                             |
| <i>Aliased:</i> 2.3.3.2°   | <i>Binary data:</i> 4.2.1°                       |
| <i>Alpha-design:</i> 9.1.5.4°  | <i>Bioequivalence:</i> 1.1.1.3°                  |
| <i>AMMI:</i> 11.1.2.6°   | <i>Blocking:</i> 6.3.6°                          |
| <i>Analysis of covariance:</i> 12.4.2.1°                               | <i>Border:</i> 3.2.2.1°                          |
| <i>Analysis of variance:</i> 5.2.1°                                    | <i>BOX-BEHNKENS's design:</i> 2.4.1.5°           |
| <i>ANCOVA:</i> 12.4.2.1°   | <i>Buffer interval:</i> 3.2.2.4°                 |
| <i>ANOCOVA:</i> 12.4.2.1°  | <i>Canonical analysis:</i> 11.1.2.6°             |
| <i>ANOVA:</i> 5.2.1°   | <i>Canonical variate analysis:</i> 11.1.2.6°     |
| <i>A-optimal design:</i> 2.4.3.7°                                      | <i>Carry-over effect:</i> 8.2.3.1°               |
| <i>A-optimality:</i> 2.4.3.7°  | <i>Central composite design:</i> 2.4.1.3°        |
| <i>Augmented incomplete blocks:</i> 9.1.2.5°                           | <i>Change-over:</i> 8.1.2                        |
| <i>Augmented Latin square:</i> 8.4.3°                                  | <i>Check:</i> 2.2.2.1°                           |
| <i>Autoregressive:</i> 12.3.3.3°                                       | <i>Check observation:</i> 4.1.4°                 |
| <i>Average optimality:</i> 2.4.3.7°                                    | <i>Check treatment:</i> 2.2.2.1°                 |
|  | <i>Clinical trial:</i> introd.                   |

- Cluster randomized design*: 5.1.3°  
*Column*: 8.1.1.1°  
*Complementary design*: 9.1.2.3°  
*Complete blocks*: 6.1.1.1°  
*Complete confounding*: 10.1.3.1°  
*Complete factorial design*: 2.3.1.3°  
*Complete Latin square*: 8.4.2°  
*Completely randomized design*: 5.1.1°  
*Compliance*: 1.2.1.3°  
*Component analysis*: 11.1.2.6°  
*Compound symmetry*: 11.2.2.2°  
*Computer experiment*: 2.4.5.1°  
*Confirmatory experiment*: 1.2.2.2°  
*Confounding*: 10.1.1  
*Constant factor*: 2.1.1.3°  
*Constrained randomization*: 5.3.2°  
*Contour curve*: 6.5.3.5°  
*Control*: 2.2.2.1°  
*Controlled factor*: 2.1.1.3°  
*Correlogram*: 3.5.3.1°  
*Counting*: 4.2.1°  
*Covariate*: 12.4.2.1°  
*Criss-cross*: 7.1.3.1°  
*Crop rotation*: 11.2.3.1°  
*Cross-over*: 8.1.2  
  
*Defining contrast*: 10.1.5.2°  
*Dependent variable*: 4.1.1°  
*Design of experiment*: introd.  
*Dispersion matrix*: 2.4.3.8°  
*DOE*: introd.  
*DOEHLERT's design*: 2.4.1.6°  
*D-optimal design*: 2.4.3.7°  
*D-optimality*: 2.4.3.7°  
*Double-blind experiment*: 2.2.2.4°  
*Drop-out*: 1.2.1.3°  
*Dummy variable*: 12.4.3.1°  
  
*Efficacy*: 1.1.1.3°  
*Enumeration*: 4.2.1°  
*E-optimal design*: 2.4.3.7°  
  
*E-optimality*: 2.4.3.7°  
*Equivalence*: 1.1.1.3°  
*Error 1*: 7.2.1.1°  
*Error 2*: 7.2.1.1°  
*Evolutionary operation*: 2.4.4.4°  
*EVOP*: 2.4.4.4°  
*Experiment*: introd.  
*Experiment matrix*: 2.3.2.9°  
*Experimental design*: introd.  
*Experimental method*: introd.  
*Experimental point*: 2.3.2.1°  
*Experimental program*: 1.2.2.1°  
*Experimental strategy*: 1.2.2.1°  
*Experimental unit*: 3.1.1°  
*Experimentation*: introd.  
*Exploratory experiment*: 1.2.2.2°  
  
*Factor*: 2.1.1.1°  
*Factor analysis*: 11.1.2.6°  
*Factorial design*: 2.3.1.3°  
*Fertility gradient*: 3.3.1°  
*Fertility trend*: 3.3.1°  
*Field book*: 4.2.2°  
*Fixed-rotation experiment*: 11.2.3.1°  
*Form*: 4.2.2°  
*Fractional factorial design*: 2.3.1.3°  
*Fractional replication*: 2.3.3.1°  
*Frame*: 4.2.2°  
*Frequency square*: 8.4.2°  
*F-square*: 8.4.2°  
  
*General linear model*: 12.4.3.1°  
*Generalized lattice*: 9.1.5.4°  
*Generalized least squares*: 12.4.3.3°  
*Generalized linear mixed model*: 12.4.4.2°  
*Generalized linear model*: 12.4.4.2°  
*Genotype-environment interaction*:  
     11.1.2.4°  
*Geostatistics*: 3.5.3.2°  
*GLM*: 12.4.3.1°  
*GLS*: 12.4.3.3°  
*Good clinical practices*: 1.2.3

- Good experimental practices*: 1.2.3  
*G-optimal design*: 2.4.3.7°  
*G-optimality*: 2.4.3.7°  
*Gradient*: 5.3.1°  
*Graeco-Latin square*: 8.4.1°  
*Group randomized design*: 5.1.3°  
*Group sequential design*: 2.4.4.4°  
*Guard row*: 3.2.2.1°
- HADAMARD's matrix: 2.2.3.8°  
*Half fraction*: 2.3.3.6°  
*Half-normal plot*: 5.2.4°  
*Half replication*: 2.3.3.6°  
*Hard-to-change factor*: 5.3.3°  
 HOKE's design: 2.4.1.7°  
 HUYNH-FELDT's condition: 11.2.2.2°
- Incidence matrix*: 12.4.3.1°  
*Incomplete blocks*: 9.1.1  
*Incomplete factorial design*: 2.3.1.3°  
*Incomplete Latin square*: 9.1.4.1°  
*Indicator variable*: 12.4.3.1°  
*Information matrix*: 2.4.3.8°  
*Initial observation*: 4.1.2°  
*Inter-block information*: 9.2.1.4°  
*Intercropping*: 12.2.1°  
*Interim analysis*: 4.1.3°  
*Interim observation*: 4.1.3°  
*Intermediate analysis*: 4.1.3°  
*Intermediate observation*: 4.1.3°  
*Intra-block information*: 9.2.1.4°  
*Isoresponse curve*: 6.5.3.5°
- KOSHAL's design: 2.3.2.1°
- Lab book*: 4.2.2°  
*Land equivalent ratio*: 12.2.2°  
*Latin cube*: 8.4.2°  
*Latin hypercube*: 8.4.2°  
*Latin square*: 8.1.1.1°  
*Latinized  $\alpha$ -design*: 9.1.5.4°  
 LENTH's method: 5.2.5°
- LER*: 12.2.2°  
*Level*: 2.1.1.2°  
*Linear mixed model*: 12.4.4.1°  
*Linear model*: 12.4.3.1°  
*Link function*: 12.4.4.2°  
*Longitudinal data*: 11.2.1.1°  
*Long-term experiment*: 11.2.1.1°
- Magic Latin square*: 8.4.2°  
*Main experiment*: 1.2.2.2°  
*Main observation*: 4.1.1°  
 MANOVA: 12.4.5.1°  
 MAUCHLY's test: 11.2.2.3°  
 MCAR: 12.5.2°  
*Measurement*: 4.2.1°  
*Meta-analysis*: 11.1.1.3°  
*Missing completely at random*: 12.5.2°  
*Missing data*: 6.3.5°  
*Missing not at random*: 12.5.2°  
*Misuse*: introd.  
*Mixed crops*: 12.2.1°  
*Mixed model*: 12.4.4.1°  
*Mixture*: 2.4.2.1°  
 MNAR: 12.5.2°  
*Model matrix*: 2.4.3.8°  
*Multi-annual experiment*: 11.1.1.1°  
*Multi-centre experiment*: 11.1.1.3°  
*Multi-environment experiment*: 11.1.1.1°  
*Multi-location experiment*: 11.1.1.1°  
*Multiple imputation*: 12.5.2°  
*Multi-rotation experiment*: 11.2.3.1°  
*Multi-step experiment*: 2.4.4.1°  
*Multivariate analysis of variance*: 12.4.5.1°
- Nearest neighbour*: 12.3.3.1°  
*Nearly balanced design*: 8.2.3.1°  
*Neighbour-balanced design*: 12.3.1.1°  
*Noise*: 2.1.1.5°  
*Nominal data*: 4.2.1°  
*Non-inferiority*: 1.1.1.3°  
*Numerical experiment*: 2.4.5.1°

- Observation*: introd.  
*Observational study*: introd.  
*Off-station experiment*: 1.2.1.2°  
*OLS*: 12.4.3.3°  
*One-factor-at-a-time*: 2.3.1.2°  
*On-farm experiment*: 1.2.1.2°  
*On-station experiment*: 1.2.1.2°  
*Optimal design*: 2.4.3.1°  
*Ordinal data*: 4.2.1°  
*Ordinary least squares*: 12.4.3.3°  
*Orthogonal design*: 2.3.2.10°  
*Orthogonal Latin square*: 8.4.1°  
*Orthogonality*: 2.3.2.10°  
*Output*: 4.1.1°
- PAPADAKIS's method*: 12.3.3.1°  
*Parallel group design*: 5.1.3°  
*Partial confounding*: 10.1.3.1°  
*Partial least squares*: 11.1.2.6°  
*Partially balanced design*: 9.1.5.1°  
*Partially balanced incomplete blocks*:  
 9.1.5.2°  
*PBIB*: 9.1.5.2°  
*PCA*: 11.1.2.6°  
*Perennial crop*: 11.2.1.1°  
*Perennial plant*: 11.2.1.1°  
*Pilot experiment*: 3.5.1.1°  
*Placebo*: 2.2.2.4°  
*PLACKETT-BURMAN's design*: 2.3.3.8°  
*Planning*: introd.  
*Plot*: 3.1.2°  
*PLS*: 11.1.2.6°  
*Post-blocking*: 12.6.2°  
*Post-mortem*: 12.6.2°  
*Prediction variance*: 2.4.3.2°  
*Preliminary experiment*: 1.2.2.2°  
*Preliminary observation*: 4.1.2°  
*Primary observation*: 4.1.1°  
*Principal component analysis*: 11.1.2.6°  
*Proportional sizes*: 12.4.1.2°  
*Pseudo-random number*: 5.1.2°
- Qualitative data*: 4.2.1°  
*Qualitative factor*: 2.1.1.1°  
*Quantitative data*: 4.2.1°  
*Quantitative factor*: 2.1.1.1°  
*Quasi-Latin square*: 10.3
- Radial design*: 2.3.1.2°  
*Random field*: 3.5.3.2°  
*Random number*: 5.1.2°  
*Random permutation*: 5.1.2°  
*Randomization*: 5.1.1°  
*Randomized blocks*: 6.1.1.1°  
*Randomized complete blocks*: 6.1.1.1°  
*Randomized design*: 5.1.1°  
*Rank*: 4.2.1°  
*Ranked qualitative factor*: 2.1.1.2°  
*Recovery of inter-block information*:  
 9.2.1.4°  
*Rectangular lattice*: 9.1.5.3°  
*Relative efficiency*: 6.3.2°  
*Relative total yield*: 12.2.2°  
*REML*: 11.1.2.6°  
*Repeated measurements*: 11.2.1.1°  
*Repeated measurements over time*:  
 11.2.1.1°  
*Replicate*: 3.4.1°  
*Replication*: 3.4.1°  
*Residual*: 12.6.1°  
*Residual effect*: 8.2.3.1°  
*Resolution*: 2.3.3.7°  
*Resolvable design*: 9.1.2.1°  
*Response*: 4.1.1°  
*Response surface*: 2.4.1.1°  
*Restricted maximum likelihood*: 11.1.2.6°  
*Restricted randomization*: 5.3.2°  
*ROQUEMORE's design*: 2.4.1.7°  
*Rotatability*: 2.4.1.4°  
*Rotation*: 11.2.3.1°  
*Row*: 8.1.1.1°  
*Row-and-column design*: 8.4.3°

- Row-column design*: 8.4.3°  
*Run*: introd.  
  
*Sampling*: 4.2.4°  
*Saturated design*: 2.3.3.8°  
*Scale*: 4.2.3°  
*Screening*: 1.2.2.4°  
*Self-orthogonal Latin square*: 8.4.2°  
*Semi-Latin square*: 9.1.5.4°  
*Semi-variogram*: 3.5.3.1°  
*Sensory analysis*: 4.2.3°  
*Sensory evaluation*: 4.2.3°  
*Sequential experiment*: 2.4.4.1°  
*Shape*: 3.3.1°  
*Signal*: 2.1.1.5°  
*Simplex*: 2.4.2.4°  
*Simplex-lattice*: 2.4.2.4°  
*Simulation*: 12.9.1°  
*Single replication*: 2.3.2.8°  
*Size*: 3.2.1.1°  
*SMITH's model*: 3.5.2.1°  
*SMITH's variance law*: 3.5.2.1°  
*Space-filling design*: 2.4.5.2°  
*Spacing*: 3.3.3°  
*Spatial analysis*: 3.5.3.1°  
*Spatial correlation*: 3.5.3.1°  
*Spatial variation*: 3.5.3.1°  
*Sphericity test*: 11.2.2.3°  
*Split-block*: 7.1.3.1°  
*Split-lot*: 7.1.2.1°  
*Split-plot*: 7.1.1.1°  
*Split-split-plot*: 7.1.1.2°  
*Standard Latin square*: 8.1.1.3°  
*Star design*: 2.3.1.2°  
*Steepest ascent*: 2.4.4.4°  
*Stopping rule*: 4.1.3°  
*Stratification*: 6.1.2.3°  
*Strip-block*: 7.1.3.1°  
*Strip-plot*: 7.1.3.1°  
*Structuring*: 11.1.2.4°  
*Sub-block*: 7.1.1.1°  
*Suboptimal design*: 2.4.3.7°
- Sub-plot*: 7.1.1.1°  
*Sub-sub-plot*: 7.1.1.2°  
*Sub-sub-unit*: 7.1.1.2°  
*Sub-unit*: 7.1.1.1°  
*Superiority*: 1.1.1.3°  
*Supersaturated design*: 2.3.3.8°  
*Survey*: introd.  
*Switch-over*: 8.1.2  
*Symmetrical design*: 9.1.2.3°  
*Systematic check plots*: 12.3.2.1°  
*Systematic design*: 5.3.4°  
  
*TAGUCHI's design*: 2.3.3.10°  
*Test of additivity*: 8.2.1.2°  
*Treatment*: introd.  
*Treatment design*: introd.  
*Treatment structure*: introd.  
*Trend*: 5.3.1°  
*Trend-free design*: 5.3.4°  
*Trend-robust design*: 5.3.4°  
*Trial*: introd.  
*Trojan square*: 9.1.5.4°  
*TUKEY's test*: 8.2.1.2°  
*Two-step experiment*: 2.4.4.1°  
*Two-treatment two-period cross-over*: 8.1.2  
*Type H matrix*: 11.2.2.2°  
  
*Unbalanced*: 12.4.1.2°  
*Uncontrolled factor*: 2.1.1.3°  
*Uniform design*: 2.4.5.2°  
*Uniform-balanced design*: 8.2.3.1°  
*Uniformity experiment*: 3.5.1.2°  
  
*Variety*: 9.1.2.1°  
*Variety-environment interaction*: 11.1.2.4°  
*Variogram*: 3.5.3.1°  
*VIK's square*: 8.4.2°  
  
*Wash out*: 3.2.2.5°  
*Whole plot*: 7.1.1.1°  
*Whole unit*: 7.1.1.1°  
  
*YOUDEN's square*: 9.1.4.1°



# Index des matières

L'index renvoie à l'introduction (introd.), aux différents paragraphes et à la synthèse (synth.). Les numéros de paragraphes qui figurent en italiques concernent les exemples.

- $\alpha$ -plan : 9.1.5.4°
- A posteriori (blocs —) : 12.6.2°
- Accessoire (facteur —) : 2.1.1.4°
- Accident (en cours d'expérience) : 4.1.4°, 12.4.2.3°
- Actif (contraste — et effet —) : 5.2.5°
- Adaptative (expérience —) : 2.4.4
- Additivité (test d'—) : 8.2.1.2°, 8.5.2.2°
- Agroforesterie : 12.2.1°
- Ajustée (moyenne —) : 9.2.1.2°, 9.4.2.3°
- Aléatoire (champ —) : 3.5.3.2°
- Aléatoire (donnée manquante complètement — et non —) : 12.5.2°
- Aléatoire (expérience complètement —) : 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5
- Aléatoire (répartition —) : 5.1, 5.3.5°, 5.4.3, synth.
- Aléatoires (blocs — complets) : 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5
- Aléatoires (blocs — incomplets) : 9.1.1
- Aléatoires (nombres —) : 5.1.2°
- Aléatoires (permutations —) : 5.1.2°
- Alias : 2.3.3.2°
- Aliasé : 2.3.3.2°
- Alpha-plan : 9.1.5.4°
- Analyse (de la covariance) : 11.5.2.6°, 12.4.2
- Analyse (de la variance) : 5.2.1°, 6.2, 12.4
- Analyse (des résultats) : introd., synth.
- Analyse (intérimaire ou intermédiaire) : 4.1.3°
- Analyse (spatiale) : 3.5.3.1°, 3.6.3
- Années (expériences répétées au cours de plusieurs —) : 11.1, 11.4
- Années (nombre d'—) : 11.1.3
- A-optimal (plan —) : 2.4.3.7°
- A-optimalité : 2.4.3.7°
- Arrêt (règle d'—) : 4.1.3°
- Augmenté (carré latin —) : 8.4.3°
- Augmentés (blocs incomplets —) : 9.1.2.5°
- Auto-orthogonal (carré latin —) : 8.4.2°
- Autopsie (d'une expérience) : 12.6.2°
- Auxiliaire (facteur —) : 2.1.1.4°
- Auxiliaire (variable —) : 12.4.2.1°
- Aveugle (double —) : 2.2.2.4°
- Bandes (expérience en — croisées) : 7.1.3, 7.2.3, 7.3, 7.5
- Base (carré latin de —) : 8.1.1.3°
- Base (ligne de —) : 4.1.2°
- Bayésiennes (méthodes —) : 12.8
- Bibliographie : introd.
- Bioéquivalence : 1.1.1.3°

- Blanc (essai à —) : 3.5.1.2°, 3.6, 6.4  
 Bloc : 6.1.1, 6.1.2, 6.3.6°  
 Blocs (a posteriori) : 12.6.2°  
 Blocs (aléatoires complets) : 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5  
 Blocs (aléatoires incomplets) : 9.1.1  
 Blocs (complets) : 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5  
 Blocs (dimension des —) : 6.3.6°, 9.1.1  
 Blocs (FISHER) : 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5  
 Blocs (incomplets) : 9.1.1  
 Blocs (incomplets équilibrés) : 9.1.2, 9.2.1, 9.3, 9.4  
 Blocs (incomplets partiellement équilibrés) : 9.1.5.2°  
 Blocs (randomisés complets) : 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5  
 Bonnes (pratiques) : 1.2.3, synth.  
 Bordure : 3.2.2, 6.4.3  
 BOX et BEHNKEN (plan de —) : 2.4.1.5°  
*Boxplot* : 3.6.1.2°  
 Bruit (ou — de fond) : 2.1.1.5°  
 But (de l'expérience) : 1.1, synth.
- Cahier (de champ ou de laboratoire) : 4.2.2°  
 Calculs (réalisation des —) : 12.4.1.5°  
 Carré (de VIK ou de Knuth VIK) : 8.4.2°  
 Carré (de YOUNG) : 9.1.4, 9.2.2, 9.3  
 Carré ( $F$ ) : 8.4.2°  
 Carré (gréco-latin) : 8.4.1°  
 Carré (latin) : 8.1.1, 8.2.1, 8.3, 8.5  
 Carré (latin augmenté) : 8.4.3°  
 Carré (latin auto-orthogonal) : 8.4.2°  
 Carré (latin complet) : 8.4.2°  
 Carré (latin incomplet) : 9.1.4, 9.2.2, 9.3  
 Carré (latin magique) : 8.4.2°  
 Carré (quasi latin) : 10.3  
 Carré (réseau — équilibré) : 9.1.3, 9.2.2, 9.3, 9.5  
 Carré (semi-latin) : 9.1.5.4°  
 Carré (troyen) : 9.1.5.4°  
 Carrés (latins orthogonaux) : 8.4.1°  
 Cartographie (des résidus) : 12.6
- Casualisation : 5.1, 5.3.5°, 5.4.3, synth.  
 Centré (plan composite —) : 2.4.1.3°  
 Champ (aléatoire) : 3.5.3.2°  
 Cible (variable —) : 4.1.1°  
 Clinique (essai —) : introd.  
 Collecte (des observations) : 4.2.2°, synth.  
 Colonne (d'un carré latin, etc.) : 8.1  
 Colonnes (expérience en lignes et —) : 8.4.3°  
 Complémentaires (blocs incomplets —) : 9.1.2.3°  
 Complet (carré latin —) : 8.4.2°  
 Complète (confusion —) : 10.1.2, 10.2, 10.4  
 Complète (expérience factorielle —) : 2.3.1.3°, 2.3.2, 5.4, 5.5, 7.4, 7.5, 10.4  
 Complète (répétition —) : 9.1.2.1°  
 Complètement (donnée manquante — aléatoire) : 12.5.2°  
 Complètement (expérience — aléatoire) : 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5  
 Complètes (blocs aléatoires —) : 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5  
 Composée (symétrie —) : 11.2.2.2°  
 Composite (plan — centré) : 2.4.1.3°  
 Condition (de HUYNH et FELDT) : 11.2.2.2°  
 Conditions (d'application) : 5.4.2.3°  
 Conditions (de l'expérience) : 1.2, synth.  
 Conduite (de l'expérience) : synth.  
 Confirmation (expérience de —) : 1.2.2.2°  
 Confusion (complète) : 10.1.2, 10.2, 10.4  
 Confusion (d'effets) : 10.1.1  
 Confusion (expérience avec — d'effets) : 10.1, 10.2, 10.3, 10.4  
 Confusion (partielle) : 10.1.3, 10.2  
 Constant (facteur —) : 2.1.1.3°  
 Contraintes (randomisation sous —) : 5.3.2°  
 Contraste (actif) : 5.2.5°  
 Contraste (de définition) : 10.1.5.2°  
 Contrôle (de l'hétérogénéité) : 8.1.1.1°  
 Contrôle (des observations) : 4.2.5°

- Contrôlé (facteur — et non —) : 2.1.1.3°  
 Contrôle (observation de —) : 4.1.4°  
 Corrélacion (entre observations successives) : 11.2.2.2°, 11.5.2.6°  
 Corrélacion (entre unités expérimentales et — spatiale) : 3.5.3.1°, 3.6.3.1°, 6.3.7°  
 Corrélogramme : 3.5.3.1°, 3.6.3.2°  
 Courbe (d'isoreponse) : 6.5.3.5°  
 Covariable : 12.4.2.1°  
 Covariance (analyse de la —) : 11.5.2.6°, 12.4.2  
 Criblage : 1.2.2.4°, 2.3.3.8°  
 Croisées (expérience en bandes —) : 7.1.3, 7.2.3, 7.3, 7.5  
*Cross-over* : 8.1.2, 8.2.2, 8.3, 8.4.3°, 8.6  
 Cube (latin) : 8.4.2°  
 Cultures (mélangées) : 12.2  
 Cultures (pérennes) : 11.2.1.1°  
 Cultures (succession de —) : 11.2.3, 11.6  
  
 Définition (contraste ou mot de —) : 10.1.5.2°  
 Degré (unité expérimentale du premier et du deuxième —) : 7.1.1.1°, 7.4.1.2°  
 Demi-diagramme (de probabilité) : 5.2.4°, 5.5.3  
 Demi-répétition : 2.3.3.6°, 5.5.5  
 Dépendante (variable —) : 4.1.1°  
 Dérive : 5.3.1°, 5.4.3  
 Dérives (dispositif insensible aux —) : 5.3.4°  
 Deux (expérience en — phases ou — étapes) : 2.4.4  
 Dimension (des blocs) : 6.3.6°, 9.1.1  
 Dimensions (analyse de la variance à plusieurs —) : 12.4.5, 12.7.3°  
 Dimensions (des unités expérimentales) : 3.2, 3.5.2.3°, 6.4.2, 6.4.3  
 Dispersion (matrice de —) : 2.4.3.8°  
 Dispositif (expérimental) : introd., synth.  
 Distances (de plantation) : 3.3.3°  
 Divisées (expérience en parcelles —) : 7.1, 7.2, 7.3, 7.4  
  
 Documentation : introd.  
 DOEHLERT (plan de —) : 2.4.1.6°  
 Domaine (expérimental) : 2.3.2.1°  
 Donnée (manquante) : 5.4.2.2°, 6.3.5°, 6.5.2.2°, 12.4.2.3°, 12.5  
 Donnée(s) : voir observation(s)  
 Données (longitudinales) : 11.2.1.1°, 11.5  
 D-optimal (plan —) : 2.4.3.7°  
 D-optimalité : 2.4.3.7°  
 Double (aveugle) : 2.2.2.4°  
 Durée (expérience de longue —) : 11.2.1.1°  
  
 Échantillonnage : 4.2.4°  
 Échelle (d'observation) : 4.2.3°  
 Effet (actif) : 5.2.5°  
 Effet (résiduel) : 8.2.3.1°, 8.6.2.5°  
 Effets (confusion d'—) : 10.1.1  
 Efficacité : 1.1.1.3°  
 Efficacité (relative) : 6.3, 7.3.4°, 8.3.2°  
 En station (expérience —) : 1.2.1.2°  
 Endroits (expériences répétées en plusieurs —) : 11.1, 11.3, 11.4  
 Endroits (nombre d'—) : 11.1.3  
 Enquête : introd.  
 Enregistrement (des observations) : 4.2.2°, synth.  
 Entrante (variable —) : 2.1.1.5°  
 Entrée (paramètre d'—) : 2.1.1.5°  
 E-optimal (plan —) : 2.4.3.7°  
 E-optimalité : 2.4.3.7°  
 Équilibré (dispositif — pour les effets résiduels) : 8.2.3.1, 8.6.1.1°  
 Équilibré (dispositif — pour les parcelles voisines) : 12.3.1  
 Équilibré (dispositif partiellement —) : 9.1.5  
 Équilibré (dispositif presque —) : 8.2.3.1°  
 Équilibré (réseau —) : 9.1.3.4°  
 Équilibré (réseau carré —) : 9.1.3, 9.2.2, 9.3, 9.5  
 Équilibrés (blocs incomplets —) : 9.1.2, 9.2.1, 9.3, 9.4

- Équilibrés (blocs incomplets partiellement —) : 9.1.5.2°
- Équivalence : 1.1.1.3°
- Erreur (de deuxième espèce) : 3.4
- Erreur (1 et — 2) : 7.2.1.1°, 7.4.2.2°
- Espace (expériences répétées dans l'—) : 11.1, 11.3, 11.4
- Essai : introd.
- Essai (clinique) : introd.
- Essentiel (facteur —) : 2.1.1.4°
- Étapes (expérience en deux ou plusieurs —) : 2.4.4
- Éthique : 2.2.2.5°
- Étoile (expérience en —) : 2.3.1.2°
- EVOP (méthode —) : 2.4.4.4°
- Expérience : introd.
- Expérience (matrice d'—) : 2.3.2.9°
- Expérience (plan d'—) : introd., synth.
- Expérimental (dispositif —) : introd., synth.
- Expérimental (domaine —) : 2.3.2.1°
- Expérimental (paramètre —) : 2.1.1.5°
- Expérimental (point —) : 2.3.2.1°
- Expérimental (programme —) : 1.2.2
- Expérimental (protocole —) : introd., 11.3.1, synth.
- Expérimentale (méthode —) : introd.
- Expérimentale (stratégie —) : 1.2.2
- Expérimentale (unité —) : 3.1, synth.
- Expérimentation : introd.
- Explicative (variable —) : 2.1.1.5°
- Expliquée (variable —) : 4.1.1°
- Exploratoire (expérience —) : 1.2.2.2°
- $F$  (carré —) : 8.4.2°
- Facteur : 2.1.1
- Facteur (un — à la fois) : 2.3.1.2°
- Facteurs (nombre de —) : 2.3.1.1°
- Factorielle (expérience — complète et — incomplète) : 2.3.1.3°, 2.3.3.1°
- Factorielle (expérience — et non —) : 2.3.1.3°
- Fertilité (gradient de —) : 3.3.1°, 3.6.1.2°, 6.1.1.2°
- Fiche (de terrain) : 4.2.2°
- FISHER (blocs —) : 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5
- Forme (des blocs) : 6.1.1.2°
- Forme (des unités expérimentales) : 3.3, 6.1.1.2°
- Formulaire (de terrain) : 4.2.2°
- Fractionnaire (expérience factorielle —) : 2.3.1.3°, 2.3.3, 5.2, 5.5.5, 10.1.4
- Fractionnaire (répétition —) : 2.3.3, 5.2, 5.5.5, 10.1.4
- Général (modèle linéaire —) : 12.4.3
- Généralisé (modèle linéaire —) : 12.4.4.2°
- Généralisé (modèle linéaire mixte —) : 12.4.4.2°
- Généralisé (réseau —) : 9.1.5.4°
- Généralisés (moindres carrés —) : 12.4.3.3°
- Génotype-environnement (interaction —) : 11.1.2.4°
- Géostatistique : 3.5.3.2°, 3.6.3.3°
- G-optimal (plan —) : 2.4.3.7°
- G-optimalité : 2.4.3.7°
- Gradient : 3.3.1°, 5.3.1°, 5.4.3
- Gradient (de fertilité) : 3.3.1°, 3.6.1.2°, 6.1.1.2°
- Grande (parcelle) : 7.1.1.1°, 7.4.1.2°
- Gréco-latin (carré —) : 8.4.1°
- Groupes (expérience séquentielle par —) : 2.4.4.4°
- Groupes (parallèles ou randomisés) : 5.1.3°
- H (matrice de type —) : 11.2.2.2°
- HADAMARD (matrice d'—) : 2.3.3.8°
- Hasard (répartition au —) : 5.1, 5.3.5°, 5.4.3, synth.
- Historique : introd.
- HOKE (plan de —) : 2.4.1.7°
- Hors station (expérience —) : 1.2.1.2°
- HUYNH et FELDT (condition de —) : 11.2.2.2°
- Hypercube (latin) : 8.4.2°

- Imputations (multiples) : 12.5.2°  
 Incidence (matrice d'—) : 12.4.3.1°  
 Incident (en cours d'expérience) : 4.1.4°, 12.4.2.3°  
 Incomplet (carré latin —) : 9.1.4, 9.2.2, 9.3  
 Incomplète (expérience factorielle —) : 2.3.1.3°, 2.3.3, 5.2, 5.5.5, 10.1.4  
 Incomplète (répétition —) : 2.3.3, 5.2, 5.5.5, 10.1.4  
 Incomplets (blocs —) : 9.1.1  
 Incomplets (blocs — équilibrés) : 9.1.2, 9.2.1, 9.3, 9.4  
 Incomplets (blocs — partiellement équilibrés) : 9.1.5.2°  
 Incomplets (blocs aléatoires —) : 9.1.1  
 Indicatrice (variable —) : 12.4.3.1°  
 Influent (facteur —) : 1.2.2.4°  
 Information (inter-blocs et intra-blocs) : 9.2.1.4°  
 Information (matrice d'—) : 2.4.3.8°  
 Initiale (observation —) : 4.1.2°  
 Insensible (dispositif — aux dérives) : 5.3.4°  
 Instrumentale (variable —) : 12.4.3.1°  
 Interaction (génotype-environnement) : 11.1.2.4°  
 Interaction (structuration de l'—) : 11.1.2.4°, 11.3.2.5°  
 Inter-blocs (information —) : 9.2.1.4°  
 Intérimaire (analyse —) : 4.1.3°  
 Intérimaire (observation —) : 4.1.3°  
 Intermédiaire (analyse —) : 4.1.3°  
 Intermédiaire (observation —) : 4.1.3°  
 Internet (documentation par —) : introd.  
 Interprétation (des résultats) : synth.  
 Intra-blocs (information —) : 9.2.1.4°  
 Isoréponse (courbe d'—) : 6.5.3.5°  
 Isovariance (par rotation) : 2.4.1.4°  
  
 KOSHAL (plan de —) : 2.3.1.2°  
  
 Latin (carré —) : 8.1.1, 8.2.1, 8.3, 8.5  
 Latin (carré — augmenté) : 8.4.3°  
 Latin (carré — auto-orthogonal) : 8.4.2°  
 Latin (carré — complet) : 8.4.2°  
 Latin (carré — incomplet) : 9.1.4, 9.2.2, 9.3  
 Latin (carré — magique) : 8.4.2°  
 Latin (carré quasi —) : 10.3  
 Latin (cube —) : 8.4.2°  
 Latin (hypercube —) : 8.4.2°  
 Latins (carrés — orthogonaux) : 8.4.1°  
 LENTH (méthode de —) : 5.2.5°  
 Lieux (expériences répétées en plusieurs —) : 11.1, 11.3, 11.4  
 Lieux (nombre de —) : 11.1.3  
 Ligne (d'un carré latin, etc.) : 8.1  
 Ligne (de base) : 4.1.2°  
 Lignes (expérience en — et colonnes) : 8.4.3°  
 Linéaire (modèle — ou modèle — général) : 12.4.3  
 Linéaire (modèle — généralisé) : 12.4.4.2°  
 Linéaire (modèle — mixte) : 12.4.4.1°  
 Linéaire (modèle — mixte généralisé) : 12.4.4.2°  
 Livre (de champ ou de laboratoire) : 4.2.2°  
 Logarithmique (transformation —) : 7.4.2.6°  
 Logiciel : introd., 12.4.1.5°  
 Longitudinales (données —) : 11.2.1.1°, 11.5  
 Longue (expérience de — durée) : 11.2.1.1°  
  
 Magique (carré latin —) : 8.4.2°  
 Maillage : 2.3.2.4°  
 Maîtrise (de l'hétérogénéité) : 8.1.1.1°  
 Maîtrisé (facteur — et non —) : 2.1.1.3°  
 Manquante (donnée —) : 5.4.2.2°, 6.3.5°, 6.5.2.2°, 12.4.2.3°, 12.5  
 Matrice (de dispersion) : 2.4.3.8°  
 Matrice (de type H) : 11.2.2.2°  
 Matrice (d'expérience) : 2.3.2.9°  
 Matrice (d'HADAMARD) : 2.3.3.8°  
 Matrice (d'incidence) : 12.4.3.1°  
 Matrice (d'information) : 2.4.3.8°

- Matrice (du modèle) : 2.4.3.8°, 12.4.3.1°
- MAUCHLY (test de —) : 11.2.2.3°, 11.5.2.5°
- Maximum (rendement —) : 6.5.3.2°
- Mélangées (cultures —) : 12.2
- Mélanges (étude des —) : 2.4.2
- Mesures (répétées ou répétées dans le temps) : 7.3.6°, 11.2, 11.5
- Mésusage : introd.
- Méta-analyse : 11.1.1.3°
- Méthode (expérimentale) : introd.
- Mixte (modèle — ou modèle linéaire —) : 12.4.4.1°
- Mixte (modèle — généralisé ou modèle linéaire — généralisé) : 12.4.4.2°
- Modalité (d'un facteur) : 2.1.1.2°
- Modalités (nombre de —) : 2.2.1, 2.3.1.1°
- Modèle (de SMITH) : 3.5.2, 3.6.2
- Modèle (linéaire ou linéaire général) : 12.4.3
- Modèle (linéaire généralisé) : 12.4.4.2°
- Modèle (linéaire mixte) : 12.4.4.1°
- Modèle (linéaire mixte généralisé) : 12.4.4.2°
- Modèle (matrice du —) : 2.4.3.8°, 12.4.3.1°
- Modèle (mixte ou linéaire mixte) : 12.4.4.1°
- Modèle (mixte généralisé ou linéaire mixte généralisé) : 12.4.4.1°
- Modifier (facteur difficile à —) : 5.3.3°
- Moindres (carrés généralisés) : 12.4.3.3°
- Moindres (carrés ordinaires) : 12.4.3.3°
- Mot (de définition) : 10.1.5.2°
- Moyenne (ajustée) : 9.2.1.2°, 9.4.2.3°
- Multicentres (expériences —) : 11.1.1.3°
- Multilocales (expériences —) : 11.1.1.1°, 11.3, 11.4
- Multiples (imputations —) : 12.5.2°
- Nature (des observations) : 4.2.1°
- Niveau (d'un facteur) : 2.1.1.2°
- Nombre (d'années) : 11.1.3
- Nombre (d'endroits ou de lieux) : 11.1.3
- Nombre (d'observations ou de répétitions) : 3.4, 11.1.3, synth.
- Nombre (de facteurs) : 2.3.1.1°
- Nombre (de modalités) : 2.2.1, 2.3.1.1°
- Nombre (de témoins) : 2.2.2.2°, 9.5.1
- Nombre (de traitements ou d'objets) : 2.2.1, 2.3.1.1°
- Nombres (aléatoires) : 5.1.2°
- Nombres (pseudo-aléatoires) : 5.1.2°
- Non-infériorité : 1.1.1.3°
- Numérique (expérience —) : 2.4.5
- Objectif (de l'expérience) : 1.1, synth.
- Objet : introd., 2.1.2, synth.
- Objet (de référence) : 2.2.2
- Objets (expérience avec permutation des —) : 8.1.2, 8.2.2, 8.3, 8.4.3°, 8.6
- Objets (nombre d'—) : 2.2.1, 2.3.1.1°
- Observation : introd.
- Observation (structurée) : introd.
- Observations : 4.1, 4.2
- Observations (collecte ou enregistrement des —) : 4.2.2°, synth.
- Observations (contrôle des —) : 4.2.5°
- Observations (nombre d'—) : 3.4, 11.1.3, synth.
- Observations (sauvegarde des —) : 4.2.5°, synth.
- Observations (successives) : 7.3.6°, 11.2, 11.5
- Observations (traitement des —) : 4.2.5°, synth.
- Observé (paramètre —) : 4.1.1°
- Optimal (plan —) : 2.4.3
- Optimalité (critère d'—) : 2.4.3.7°
- Optimum (rendement —) : 6.5.3.3°
- Ordinaires (moindres carrés —) : 12.4.3.3°
- Ordinateur (expérience par —) : 2.4.5
- Ordonné (facteur qualitatif —) : 2.1.1.2°
- Orthogonale (analyse de la variance — et non —) : 12.4.1
- Orthogonale (expérience —) : 2.3.2.10°

- Orthogonalité (d'une analyse de la variance) : 12.4.1.2°
- Orthogonalité (d'une expérience) : 2.3.2.10°
- Orthogonaux (carrés latins —) : 8.4.1°
- PAPADAKIS (méthode de —) : 12.3.3.2°
- Parallèles (groupes —) : 5.1.3°
- Paramètre (d'entrée ou expérimental) : 2.1.1.5°
- Paramètre (de sortie ou observé) : 4.1.1°
- Parcelle : 3.1.2°
- Parcelle (grande — et petite —) : 7.1.1.1°, 7.4.1.2°
- Parcelles (dimensions des —) : 3.2, 3.5.2.3°, 6.4.2, 6.4.3
- Parcelles (expérience en — divisées) : 7.1, 7.2, 7.3, 7.4
- Parcelles (forme des —) : 3.3, 6.1.1.2°
- Parcelles (voisines) : 12.3.1, 12.3.3
- Partielle (confusion —) : 10.1.3, 10.2
- Partielle (répétition —) : 2.3.3, 5.2, 5.5.5, 10.1.4
- Partiellement (blocs incomplets — équilibrés) : 9.1.5.2°
- Partiellement (dispositif — équilibré) : 9.1.5
- Pente (maximum ou plus grande —) : 2.4.4.4°
- Pérennes (cultures — et plantes —) : 11.2.1.1°
- Période (de transition ou tampon) : 3.2.2.4°, 8.6.1.1°
- Permutation (expérience avec — des objets) : 8.1.2, 8.2.2, 8.3, 8.4.3°, 8.6
- Permutations (aléatoires) : 5.1.2°
- Petite (parcelle) : 7.1.1.1°, 7.4.1.2°
- Phase (I à IV) : 1.2.2.3°
- Phases (expérience en deux ou plusieurs —) : 2.4.4
- Pilote (expérience —) : 3.5.1.1°
- Placebo : 2.2.2.4°
- PLACKETT et BURMAN (plan de —) : 2.3.3.8°
- Plan (d'expérience) : introd., synth.
- Plan (des traitements ou des objets) : introd., 2.1.2.2°, synth.
- Planification (de l'expérience) : introd., synth.
- Plantation (distances de —) : 3.3.3°
- Plantes (pérennes) : 11.2.1.1°
- Pluriannuelles (expériences —) : 11.1.1.1°, 11.4
- Plusieurs (analyse de deux ou — variables) : 12.7
- Plusieurs (analyse de la variance à — dimensions ou — variables) : 12.4.5, 12.7.3°
- Plusieurs (expérience en — phases ou — étapes) : 2.4.4
- Point (expérimental) : 2.3.2.1°
- Pratiques (bonnes —) : 1.2.3, synth.
- Précision : 3.4.5°
- Prédiction (variance de —) : 2.4.3.2°
- Préliminaire (expérience —) : 1.2.2.2°
- Préliminaire (observation —) : 4.1.2°
- Principal (facteur —) : 2.1.1.4°
- Principale (expérience —) : 1.2.2.2°
- Principale (observation —) : 4.1.1°
- Probabilité (demi-diagramme de —) : 5.2.4°, 5.5.3
- Proches (plus — voisins) : 12.3.3
- Programme (expérimental) : 1.2.2
- Proportionnels (effectifs —) : 12.4.1.2°
- Protocole (expérimental) : introd., 11.3.1, synth.
- Pseudo-aléatoires (nombres —) : 5.1.2°
- Publication (des résultats) : synth.
- Qualitatif (facteur —) : 2.1.1.1°, 2.2.1.1°
- Qualitatif (facteur — ordonné) : 2.1.1.2°
- Quantitatif (facteur —) : 2.1.1.1°, 2.2.1.2°
- Quasi (carré — latin) : 10.3
- Radiale (expérience —) : 2.3.1.2°
- Randomisation : 5.1, 5.3.5°, 5.4.3, synth.

- Randomisation (restreinte ou sous contraintes) : 5.3.2°  
 Randomisée (expérience complètement —) : 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5  
 Randomisés (blocs —) : 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5  
 Randomisés (groupes —) : 5.1.3°  
 Rapport : synth.  
 Réalisation (de l'expérience) : synth.  
 Rectangulaire (réseau —) : 9.1.5.3°  
 Récupération (de l'information inter-blocs) : 9.2.1.4°  
 Référence (objet de —) : 2.2.2  
 Règle (d'arrêt) : 4.1.3°  
 Relatif (rendement — total) : 12.2.2°  
 Remplissage (du domaine expérimental) : 2.4.5.2°  
 Relative (efficacité —) : 6.3, 7.3.4°, 8.3.2°  
 Rendement (maximum) : 6.5.3.2°  
 Rendement (optimum) : 6.5.3.3°  
 Rendement (relatif total) : 12.2.2°  
 Répétées (expériences —) : 11.1, 11.3, 11.4  
 Répétées (mesures — ou — dans le temps) : 7.3.6°, 11.2, 11.5  
 Répétition (complète) : 9.1.2.1°  
 Répétition (demi- —) : 2.3.3.6°, 5.5.5  
 Répétition (fractionnaire, incomplète ou partielle) : 2.3.3, 5.2, 5.5.5, 10.1.4  
 Répétition (simple ou unique) : 2.3.2.8°, 5.2, 5.5.4, 10.1.4.3°  
 Répétitions (nombre de —) : 3.4, 11.1.3, synth.  
 Réplique(s) : voir répétition(s)  
 Répliques (dispositif en —) : 9.1.2.1°  
 Réponse : 4.1.1°  
 Réponse (surface de —) : 2.4.1, 6.5.3.4°  
 Réseau (carré équilibré) : 9.1.3, 9.2.2, 9.3, 9.5  
 Réseau (équilibré) : 9.1.3.4°  
 Réseau (généralisé) : 9.1.5.4°  
 Réseau (rectangulaire) : 9.1.5.3°  
 Réseau (simplexe) : 2.4.2.4°  
 Résiduel (effet —) : 8.2.3.1°, 8.6.2.5°  
 Résiduelle (variation — 1 et 2) : 7.2.1.1°, 7.4.2.2°  
 Résidus (cartographie des —) : 12.6  
 Résidus (de l'analyse de la variance) : 12.6  
 Résolubles (blocs incomplets —) : 9.1.2.1°  
 Résolution (d'une expérience factorielle) : 2.3.3.7°  
 Restreinte (randomisation —) : 5.3.2°  
 Risque (de deuxième espèce) : 3.4  
 ROQUEMORE (plan de —) : 2.4.1.7°  
 Rotatabilité : 2.4.1.4°  
 Rotation (de cultures) : 11.2.3, 11.6  
 Rotation (isovariance par —) : 2.4.1.4°  
 Saturé (plan —) : 2.3.3.8°  
 Sauvegarde (des observations) : 4.2.5°, synth.  
 Semi-latin (carré —) : 9.1.5.4°  
 Semi-variogramme : 3.5.3.1°, 3.6.3.2°  
 Sensorielle (analyse —) : 4.2.3°  
 Sensorielle (épreuve —) : 4.2.3°  
 Séquentielle (expérience —) : 2.4.4  
 Séquentielle (expérience — par groupes) : 2.4.4.4°  
 Signal : 2.1.1.5°  
 Simple (répétition —) : 2.3.2.8°, 5.2, 5.5.4, 10.1.4.3°  
 Simplexe (ou réseau —) : 2.4.2.4°  
 Simulation (de résultats d'expériences) : 12.9  
 SMITH (modèle de —) : 3.5.2, 3.6.2  
 Sortie (paramètre de —) : 4.1.1°  
 Sous-bloc : 7.1.1.1°  
 Sous-parcelle : 7.1.1.1°  
 Sous-sous-parcelle : 7.1.1.2°  
 Soustractive (expérience —) : 2.3.3.9°  
 Spatiale (analyse —, corrélation — et variation —) : 3.5.3.1°, 3.6.3  
 Sphéricité (test de —) : 11.2.2.3°, 11.5.2.5°  
*Split-plot* : 7.1, 7.2, 7.3, 7.4  
 Station (expérience en — et hors —) : 1.2.1.2°

- Stratégie (expérimentale) : 1.2.2  
 Stratification : 6.1.2.3°  
 Structuration (de l'interaction) : 11.1.2.4°, 11.3.2.5°  
 Structure (des traitements ou des objets) : introd., 2.1.2.2°, synth.  
 Suboptimal (plan —) : 2.4.3.7°  
 Succession (de cultures) : 11.2.3, 11.6  
 Successives (observations —) : 7.3.6°, 11.2, 11.5  
 Supériorité : 1.1.1.3°  
 Surface (des parcelles) : 3.2, 3.5.2.3°, 6.4.2, 6.4.3  
 Surface (de réponse) : 2.4.1, 6.5.3.4°  
 Sursaturé (plan —) : 2.3.3.8°  
 Symétrie (ou — composée) : 11.2.2.2°  
 Symétriques (blocs incomplets —) : 9.1.2.3°  
 Systématique (expérience —) : 5.3.4°  
 Systématique (tendance —) : 5.3.1°, 5.4.3  
 Systématiques (témoins —) : 2.2.2.3°, 12.3.2  
 Systématiques (variantes —) : 2.4.2.7°, 12.7.3°  
 TAGUCHI (plan de —) : 2.3.3.10°  
 Tampon (période —) : 3.2.2.4°, 8.6.1.1°  
 Témoin : 2.2.2  
 Témoins (nombre de —) : 2.2.2.2°, 9.5.1  
 Témoins (systématiques) : 2.2.2.3°, 12.3.2  
 Temps (expériences répétées dans le —) : 11.1, 11.4  
 Tendance (systématique) : 5.3.1°, 5.4.3  
 Traitement : introd., 2.1.2, synth.  
 Traitement (des observations) : 4.2.5°, synth.  
 Traitements (nombre de —) : 2.2.1, 2.3.1.1°  
 Transformation (logarithmique) : 7.4.2.6°  
 Transition (période de —) : 3.2.2.4°, 8.6.1.1°  
 Treillis : voir réseau  
 Troyen (carré —) : 9.1.5.4°  
 TUKEY (test de —) : 8.2.1.2°, 8.5.2.2°  
 Type (I à IV) : 12.4.1.4°  
 Un (facteur à la fois) : 2.3.1.2°  
 Uniforme (plan —) : 2.4.5.2°  
 Uniformité (expérience d'—) : 3.5.1.2°, 3.6, 6.4  
 Unique (répétition —) : 2.3.2.8°, 5.2, 5.5.4, 10.1.4.3°  
 Unité (expérimentale) : 3.1, synth.  
 Unité (expérimentale du premier et du deuxième degré) : 7.1.1.1°, 7.4.1.2°  
 Unités (dimensions des — expérimentales) : 3.2, 3.5.2.3°, 6.4.2, 6.4.3  
 Unités (forme des — expérimentale) : 3.3, 6.1.1.2°  
 Variabilité (du matériel expérimental) : 3.5, 11.1.3.2°  
 Variable (auxiliaire) : 12.4.2.1°  
 Variable (cible, dépendante ou expliquée) : 4.1.1°  
 Variable (entrante ou explicative) : 2.1.1.5°  
 Variable (indicatrice ou instrumentale) : 12.4.3.1°  
 Variables (analyse de deux ou plusieurs —) : 12.7  
 Variables (analyse de la variance à plusieurs —) : 12.4.5, 12.7.3°  
 Variance (analyse de la —) : 5.2.1°, 6.2, 12.4  
 Variance (de prédiction) : 2.4.3.2°  
 Variante (d'un facteur) : 2.1.1.2°  
 Variantes (systématiques) : 2.4.2.7°, 12.7.3°  
 Variation (résiduelle 1 et 2) : 7.2.1.1°, 7.4.2.2°  
 Variation (spatiale) : 3.5.3.1°, 3.6.3  
 Variété : 9.1.2.1°  
 Variété-environnement (interaction —) : 11.1.2.4°  
 Variogramme : 3.5.3.1°, 3.6.3.2°  
 VIK (carré de — ou de Knuth —) : 8.4.2°  
 Voisines (parcelles —) : 12.3.1, 12.3.3  
 Voisins (plus proches —) : 12.3.3  
 YOUNG (carré de —) : 9.1.4, 9.2.2, 9.3

## Le livre

*Principes d'expérimentation : planification des expériences et analyse de leurs résultats* présente les notions de base de l'expérimentation, considérée comme l'utilisation raisonnée des plans d'expériences. Cet ouvrage s'étend de la conception de tels plans à l'analyse et l'interprétation des résultats obtenus.

Ces notions sont présentées d'une manière très générale et sont illustrées par de nombreux exemples. L'ensemble comprend aussi des tables numériques, un index bibliographique de plus de 400 références, un index des traductions et sigles anglais, et un index des matières. Des informations complémentaires sont disponibles sur un site web.

Ce livre s'adresse aux enseignants, aux étudiants et aux chercheurs de toutes les disciplines qui font appel à la méthode expérimentale, dans le cadre des universités, des grandes écoles et des centres de recherche publics et privés. Il constitue un complément aux deux tomes de *Théorie et méthodes statistiques : applications agronomiques* (1969-1970), et de *Statistique théorique et appliquée* (1998 et rééditions ultérieures).

## L'auteur

Pierre Dagnelie est ingénieur agronome et docteur en sciences agronomiques, diplômé de la Faculté des Sciences agronomiques de Gembloux (Belgique). Il a acquis une formation complémentaire en mathématique et en statistique à l'Université libre de Bruxelles.

Professeur émérite de la Faculté de Gembloux, il y a enseigné la statistique théorique et appliquée pendant plus de 35 ans. Il a été professeur visiteur dans des universités et institutions d'enseignement supérieur de différents pays africains, américains et européens, et a effectué des missions scientifiques dans une trentaine de pays.

Pierre Dagnelie est ancien président et *Honorary Life Member* de la Société internationale de Biométrie (*International Biometric Society*), membre étranger de l'Académie d'Agriculture de France, *Honorary Fellow* de la *Royal Statistical Society* de Grande-Bretagne, et titulaire du prix du statisticien d'expression française, décerné par les Sociétés de Statistique de Paris et de France.